VÝVOJ POČÍTÁNÍ V PRVNÍ TŘÍDĚ

Miroslav Rendl

OBSAH

V rámci longitudinálního výzkumu prováděného Pražskou skupinou školní etnografie jsme opakovaně pobývali v první třídě jedné pražské ZŠ.[1] Na konci první třídy uměla naprostá většina dětí (snad na jedinou výjimku) "sčítat a odčítat do dvaceti" a měla za sebou v tomto směru (stejně jako v řadě dalších) obdivuhodný pokrok. Analýza toho, v čem tento pokrok spočívá, jaké jsou jeho formy a předpoklady, je předmětem našeho zájmu v této stati.

---

[1] Výzkum je prováděn s podporou grantu GA ČR "Žák v měnících se podmínkách současné školy" (grantový úkol č. 406/94/1417).

Výzkumné sdělení vychází ze záznamů pozorování ve třídě a jejich kvalitativní analýzy. Jde o třídu, která je v jiných kapitolách označována jako "Modrá", resp. jako třída z "Modré školy". Pozorování se provádělo opakovaně od počátku října 1994 do konce školního roku, dvakrát až třikrát za měsíc vždy po celou dobu vyučování. V pozorované třídě byl náhodně nízký počet dětí - šestnáct.

Blíže je možno se s metodologií používanou Pražskou skupinou školní etnografie seznámit ve výzkumné zprávě "Co se v mládí naučíš..." (Zpráva z terénního výzkumu. - Praha: Středisko vědeckých informací a Ústav pedagogických a psychologických výzkumů Pedagogické fakulty Univerzity Karlovy, 1992).

V okamžiku, kdy děti přicházejí do školy, odpovídá podle našich zkušeností naprostá většina z nich na otázku, zda umějí počítat, kladně. Mají tím na mysli znalost "číselné říkanky": umějí odříkat uspořádanou řadu čísel od jedné alespoň do deseti, mnohé do dvaceti, často i dále (např. až "do miliónu", jak nám říkal jeden chlapec z naší třídy). Dospělý se tomu usmívá, protože ví, že tohle žádné počítání není. Ale odpověď na otázku, co tedy počítání je a v jakém je vztahu ke znalosti číselné říkanky, není jednoduchá. Přitom je součástí popisu výchozí situace, v níž se dítě na počátku první třídy nachází.

Východiskem analýzy počítání učiníme **příklad**. Děti se s ním setkávají téměř od počátku výuky matematiky. Když jsme přišli na počátku října do třídy, počítaly děti už do čtyř. V učebnici, kterou používaly, se příklady objevily už před tím - v rámci "sčítání v oboru čísel do 3".

Typická úloha v naší učebnici (Matematika 1-4, Alter, Praha 1993) vypadala následovně. Víceméně realistické obrázky představovaly reálné předměty - hračky, zvířátka, kytičky, děti, talíře atd. atd. Úloha pak žádala to, co se s předměty dělo, "znázornit", "vypočítat" a "říci odpověď". Její zobrazení tu tedy běží ve třech úrovních:

1. Reálné předměty, zastoupené obrázky, a děje s nimi, které popisuje text úlohy. Text má zpočátku podobu řeči učitelky, tedy výhradně orální.

2. Znázornění předmětů jako "kusů", většinou kolečky (různě barevnými), čtverečky, trojúhelníčky, hvězdičkami či čárkami.

3. Symbolické vyjádření pomocí číslic a matematických znamének.

V takovém zadání jsou obsaženy snad všechny základní problémy výchozí situace počítání v první třídě, její složitost či složenost. V čem spočívá, co vše dítě potřebuje k jejímu zvládnutí?

- Musí rozumět textu zadání, tzn. přiřadit obrázky předmětům, o nichž hovoří učitelka, a rozumět tomu, co se s nimi děje.
- Slovní výrazy pro množství musí vztáhnout k počtům předmětů v zadání a počty pak vyjádřit různými způsoby:

- jako jiné jejich názorné zobrazení, totiž takové, které zobrazuje každý předmět právě jen jako kus;
- jako číslici, tedy psaný znak pro orální podobu čísla, který musí ovládnout v dvojité podobě psaní a čtení.

- Musí rozumět tomu, že znázornění odpovídá také dějům s reálnými předměty a že tedy zobrazuje nějaké přeskupení počtů.
- Musí rozumět korespondenci mezi matematickou operací na jedné straně a ději s reálnými či znázorněnými předměty na straně druhé.

Analýza těchto předpokladů z hlediska jejich **nesamozřejmosti**, totiž jejich analýza jakožto produktů ontogeneze, překračuje bohužel rámec naší práce a musíme se spokojit s několika schematickými úvahami. Zcela mimo analýzu tu přitom necháváme **ovládnutí jazyka** jako prostředku zobrazení reálných předmětů a dějů, které v jisté míře tvoří nezbytný předpoklad vstupu do školy.

Také **zobrazení** předmětu pouhým **obrázkem** nepředstavuje pro děti problém a stejně tak není problémem jeho **modelové znázornění**. V určitém smyslu obdobné znázornění představuje počítadlo, knoflíky, které dětem neslouží jako knoflíky, ale jako "pomůcka k počítání", a také prsty. Je na tom vidět, jak je status "reálných předmětů" neurčitý: když jsou zavedeny jako pomůcka, ztrácejí status "předmětů" a nabývají statutu "znázornění". Každý prvek jedné řady může představovat či zastupovat prvek jiné řady, být jeho zobrazením v závislosti na tom, **jak se o něm mluví**, jaký status mu přidělí text úlohy či řeč učitelky.

Tato relativnost předmětu a jeho zobrazení nečinila dětem žádné potíže. V souvislostech Piagetova výkladu "symbolické funkce" to není nic překvapivého: pro děti předškolního věku může prakticky cokoli představovat cokoli - v určitém smyslu je předškolní věk (Piagetovo předoperační stadium) charakteristický právě tímto rozvojem zobrazovací funkce. Přechod mezi různými zobrazeními předmětu berou děti jako zcela přirozený.

VZNIK KORESPONDENCE POČTŮ A ČÍSEL

Znalost číselné říkanky při vstupu do školy vypovídá o tom, že většina dětí je vybavena znalostí slovních výrazů pro čísla jakožto slov označujících množství a počet. V tomto smyslu je správná odpověď předškolního dítěte, když na otázku "kolik máš bonbónů" odpovídá "osum", i když ve skutečnosti má tři: výraz byl správně zařazen do řady výrazů použitelných v odpovědi na otázku "kolik".

Takový příklad ukazuje, že sama znalost slovních výrazů pro čísla ještě nemusí znamenat to, co se nazývá porozuměním či chápáním jejich významu. Piaget dokonce tvrdí: "Můžeme ovšem dítě naučit počítat, ale zkušenost nám ukázala, že slovní používání názvů čísel zůstává celkem bez souvislosti s vlastními číselnými operacemi. Ty někdy předcházejí hlasité numeraci, jindy následují po ní, mezi oběma není nutný vztah." (Piaget, 1970, s.123.)

Předběhneme poněkud argumentaci a předem zde zformulujeme tezi právě opačnou. Podle našich poznatků "hlasitá numerace" sice někdy může předcházet číselné operace a jindy následovat po nich, ale přesto se mezi nimi utváří nutný vztah.

Prozkoumejme, o co Piaget opírá svůj názor, co je pro něj číslo jako operační pojem nezávislý na slovní numeraci. Piagetova formulace k pojmu čísla zní: "Operace, vytvářející číslo - vzájemně jednoznačná korespondence (se zachováním dosažené ekvivalence i při změnách obrazce) a jednoduchá iterace jednotky (1+1=2; 2+1=3; atd.) - předpokládají jen aditivní grupování spoluzahrnutí tříd a řazení asymetrických relací (uspořádání), **které však musí splynout v jediný operační celek** (zvýraznil M.R.), takže jednotka je současně element třídy (1 obsažena ve 2; 2 ve 3; atd.) a řady (první 1 před druhou 1; atd.)." (Piaget, 1970, s.123.) Číslo je pak "soubor předmětů, které jsou chápány současně jako ekvivalentní a jako schopné řazení, přičemž rozdíly mezi nimi se redukují na jediný, na polohu v řadě. Toto sjednocení odlišnosti a ekvivalence předpokládá v tom případě eliminaci kvalit, což právě umožňuje vytvoření homogenní jednotky 1 a přechod od logického k matematickému usuzování" (tamtéž).

Formulace k témuž problému z pozdější Psychologie dítěte přinášejí některé změny:

Ze známého pokusu s nezachováním (nonkonzervací) počtu při zvětšení vzdáleností mezi prvky jedné řady usuzuje Piaget, že v tomto případě ještě nelze mluvit o ("operačním") čísle. Dítě tu totiž ještě nepracuje s jednoznačnou korespondencí, která byla formulována jako "operace vytvářející číslo" už v Psychologii inteligence. Pojmově tu pak Piaget navíc vyčleňuje jedno-jednoznačné (libovolné) korespondence. (Není zcela jasné, zda dřívější formulací o "zachování dosažené ekvivalence i při změnách obrazce" měl na mysli totéž.) Jen tyto libovolné korespondence vedou k číslu, protože už v sobě obsahují číselnou jednotku. (Piaget, Inhelderová, 1970, s.79-80)

Je-li nyní každý prvek souboru počitatelný a nabývá atributu "jednotky", pak podle Piageta stačí už jen "řadit" (v prostoru nebo v čase). "Ale prvky se současně dají také řadit (→) a jediným prostředkem, jak je při těchto inkluzích řadit a nepočítat dvakrát tentýž prvek, je řazení (v prostoru nebo v čase)... Číslo je tedy prostě syntézou řazení a inkluze." (c.d., s.80)

Ačkoli nejelegantnější Piagetovy formulace pracují se syntézou dvojic podmínek - "řazení + inkluze", "ekvivalence + odlišnost", ve skutečnosti mluví o přinejmenším pěti různých věcech:

1. zahrnutí předmětů do jedné třídy a tím ustavení jejich ekvivalence,
2. vzájemně jednoznačná korespondence (dvou řad prvků), z níž se vyvíjí tzv. jedno-jednoznačná (libovolná) korespondence, v níž nezáleží na tom, který prvek je přiřazen kterému, podstatné je zachování párového přiřazení "jeden - jeden",
3. konstrukce řady jako iterace (opakované načítání) jednotky,
4. uspořádání podle odlišnosti, jíž je poloha v řadě,
5. inkluze (zahrnutí všech předchozích členů řady v každém dalším členu).

Je nesporné, že počítání prostřednictvím čísel uspořádaných v číselnou řadu všechny tyto znaky má. Lze naproti tomu demonstrovat také operační podobu jednotlivých parametrů pojmu čísla už v předškolním věku. Problémem však je právě to, jakým způsobem tyto jednotlivé a původně nesouvisející operace "splynou v jediný operační celek" (srv. výše uvedenou citaci). Tvrdíme, že se tak děje ve škole a prostřednictvím číselné říkanky, resp. její postupné rekonstrukce.

Podíváme-li se na Piagetovy parametry, jsou to vlastně koreláty dílčích operací, strukturujících množství. Předpokládáme, že vývoj chápání množství musel v předškolním věku projít těmito obdobími:

1. Období, kdy odpověď na otázku "kolik" zní **"hodně/málo"**. Množství je charakterizováno ve své "nejviditelnější" formě - prostřednictvím velikosti zabraného prostoru. Je bráno jako "hromada", bez vnitřní strukturace na kusy.

Co vlastně vede dítě k takovým vyjádřením? Domníváme se, že na jedné straně jsou podněcována dospělými ("Jak jsi velikej? - Tááákle."), kteří zároveň s otázkami dávají dítěti i rejstřík možných odpovědí. To pak umožňuje jejich využití jednak v dialogických hrách, jednak k vyjádření subjektivních motivačně-afektivních stavů. "Málo" nebo "hodně" se stává prvním kvantitativním popisem, který však je nejspíše vztažen k jeho momentálnímu prožívání: "hodně" je polévky, která dítěti nechutná, "málo" pak je objektivně stejného množství oblíbené pochoutky.

2. Období odpovědi **"méně/více"** (ev. stejně). Tuto odpověď při porovnání dvou množství používá dítě už v předchozím období, ale právě jen k vyjádření subjektivního vztahu k množství: sourozenec má např. při stejném objektivním počtu určitě "více" bonbónů. Nyní však jde o porovnání prostřednictvím série párových přiřazení elementů dvou množství. Množství tu tedy je strukturováno jako množství kusů, jednotek, prvků - nikoli však ještě jako jejich počet.

Jaké operace dítě provádí při takovém porovnání, resp. jaké operace ho obsahují? Dítě např. chce zjistit, zda má "více" než jeho kamarád. Může to udělat dvojím způsobem.

a) Klade-li dítě vedle sebe dvě řady a porovnává jejich **délku**, na první pohled se zdá, že tím zároveň nutně provádí **párové přiřazení**, a že pak právě v jeho důsledku může pak konstatovat "větší - stejná - menší" jako ekvivalentní vyjádření "víc - stejně - méně použitých kostek". Je to však nutnost jen zdánlivá. Ve skutečnosti totiž potřebuje pro porovnání buď jedno nebo druhé, ale nikoli obojí současně.

Pokud jde např. o stejné kostky, ze kterých staví každý svou věž (tedy kostky uspořádané do dvou řad s počátkem na stejné úrovni), stačí pro následné porovnání strukturace na úrovni zabraného prostoru (délky řady). Konstrukce věže, která je nutně konstrukcí řady (tedy iterací jednotky) zůstává nespojena s momentem porovnávání.

b) Jde-li např. o kuličky na hraní (nikoli na počítadle), je porovnání nutno řešit párovým přiřazením, které však nevyžaduje nutně řazení. Je možno dotýkat se současně dvojic kuliček a každou dotčenou dvojici dát stranou. S každou dvojicí se tedy opakuje porovnání "já mám - ty máš" dokud nedojdeme buď k poslednímu páru nebo k situaci "já ještě mám - ty už nemáš". Kdybychom chtěli takové párové přiřazování považovat za řazení, museli bychom za řazení považovat každou sérii ukazovacích gest (např. postupné dotýkání se předmětů), které vyčerpává nějaký soubor. Takové vymezení by samozřejmě bylo možno přijmout a hovořit jako Piaget o "řazení buď v čase nebo v prostoru". Avšak neodlišení těchto dvou způsobů opomíjí jejich podstaný rozdíl:

- Simultánní charakter řady fixuje **celek**, ale neznamená nutně jeho vnitřní strukturaci na počet.
- Naopak sukcesivní charakter postupného ukazování nutně strukturuje množství na jednotlivé elementy, jako **soubor prvků**, ale nefixuje uspořádaný celek množství - řadu. Ten se v průběhu ukazování nevytváří v názorné, viditelné podobě. Ještě významnější je však to, že se v každém okamžiku této sériové operace ztrácí její předchozí průběh a jakékoli jeho zpochybnění tak nutí k opakování celé operace.

c) Je zřejmé, že strukturace množství jako řady prvků je výsledkem syntézy těchto dvou operací, onoho "splynutí v jediný operační celek". Tím je tu **přiřazení prvků dvou řad**, které se položí vedle sebe tak, aby byl vizuálně patrný nejen jejich společný počátek, nýbrž **korespondence** každé dvojice prvků. V experimentu se takové uspořádání zdá samozřejmé, ale v jaké reálné situaci ho dítě potřebuje? Nejpravděpodobnější se zdá pro porovnání dvou řad z odlišných, neekvivalentních prvků, např. nestejně velkých kostek. Představíme-li si dvě věže z nestejných kostek, může mít spor dvou dětí, kdo z nich má větší věž, zajímavou podobu. V logice strukturace "málo/hodně" je větší ta, která je viditelně vyšší. Spor o velikost tak může být sporem argumentu délky proti argumentu množství kostek jako kusů.

Vidíme ovšem, že dítě, které druhý argument použije, bude provádět přiřazení jako důkaz platnosti argumentu. Jestliže by už předtím nedospělo ke konceptu množství kusů, nemělo by přiřazování smysl - na čem by se zakládalo? Odpověď zní, že právě konstrukce řady opakovaným braním elementů - jejich dotýkáním - ukazováním při stavění věže, která pak v sobě tyto kroky uchovává, tento koncept vytváří. Přiřazení dvou řad je jen přiřazení jednotlivých kroků, jimiž vznikaly. Z původní posloupnosti, série jednotlivých kroků činnosti dítěte, které se sice opakují, ale zůstávají přesto v jeho vnímání a myšlení nespojeny v celek a při dosažení cíle se ztrácejí, se stává strukturace vytvořeného celku. Ta zpočátku funguje pouze za přítomnosti vzniklého produktu - věže, která je připomínkou provedené operace i jejího členění, je vlastně jejím záznamem. Tak je množství rekonstruováno jako výsledek činnosti.[2]

3. Porovnání jakožto položení dvou řad vedle sebe vlastně ještě nevede ke spočítání, ke stanovení **počtu**. Jak dítě dospívá k počtu?

Stejně jako dosud můžeme předpokládat dualismus jednak kulturní stimulace dospělými, kteří ukazují dítěti, jak je možno předměty počítat, jednak vlastních potřeb dítěte v situacích každodenního života. Zvažujeme-li však možnost spočítání nezávisle na znalosti číselné říkanky, jak by vyplývala z Piagetova tvrzení, musíme přímou stimulaci dospělými nechat stranou, protože lze těžko předokládat, že by učili dítě spočítat předměty bez užití číslovek.

[2] V tomto uspořádání jsou snad splněny další Piagetovy parametry čísla (2. a 3.), avšak stále nikoli všechny. Říci např., že tímto uspořádáním prokazuje dítě ekvivalenci prvků, je argumentace čistě verbalistická. Dítě volí toto uspořádání proto, že předměty nepovažuje za ekvivalentní, ale pro účely operace porovnání je dovoluje jako ekvivalentní brát. Jejich různost je tu stejně silným důvodem jako jejich shodnost.

Otázka pak zní, kdy dítě potřebuje např. kostky v řadě **spočítat**? Když chce např. vědět, jestli teď postavilo větší věž než předtím. "Stará" věž je zbourána, stojí jen nová. Je-li už její délka vnitřně členěna, pak vzniká problém porovnání dvou členěných řad v různém čase. Strukturálně stejným problémem je porovnání v různém prostoru. V obou případech schopnost ustavit vizuální jedno-jednoznačnou korespondenci nestačí. Dvě řady tu nelze položit vedle sebe.

Pro vyřešení svého problému ovšem dítě ještě nepotřebuje nutně číselnou řadu - mj. i proto, že primárně tu odpovědí na jeho "kolik" nemá být číslo, nýbrž "více, stejně či méně" kostek. Může však problém řešit jedině tak, že vytvoří pomocnou řadu, která je přenosná v čase
a prostoru, a umožňuje tak fixovat počet. Mohlo by např. dělat zářezy, kde by každý zářez odpovídal právě jednomu ukázání na jeden element řady. Spíše však použije prsty.[3]

Nemožnost položit dvě porovnávané řady vedle sebe se tu řeší zavedením **pomocné řady**, na níž se obě řady přenesou - zobrazí. Jejich porovnání pak proběhne jako porovnání počtů vyjádřených prostřednictvím téže řady. Jejím používáním dospívá dítě ke strukturaci množství jako počtu. Tato strukturace vzniká tedy použitím zprostředkující názorné řady jako speciálního zobrazovacího nástroje. Jeho pomocí dává dítě na otázku "kolik" odpověď "tolik" se současným ukázáním příslušného počtu. Opakovaná operace spočítání vede posléze ke spočitatelnosti jako možnosti spočítání, která restrukturuje chápání množství i ve chvíli, kdy aktuálně dítě spočítání neprovádí.[4]

Představa takto pokročilé strukturace množství, která proběhla, aniž se na druhé straně dítě seznámilo s číselnou říkankou a jejím použitím pro spočítání, je ve skutečnosti málo reálná a je snad myslitelná spíš jako myšlenkový experiment. Pokud však v něm budeme pokračovat, pak příklad, který jsme stanovili jako výchozí bod naší analýzy, by vypadal takto:

"tolik" a "tolik" je dohromady "tolik"

| | + | = | | | .

I tehdy, pomineme-li praktickou nemožnost vynechat ze slovního zadání úlohy slovní a tedy symbolická označení různých množství a nahradit je opakovaným "tolik", narážíme na zásadní problém: příklad v této podobě je jen restrukturací imaginárního (názorného) množství.[5] Setrvání u **imaginárních restrukturací** však by šlo zcela mimo směr školního učení, které je naopak uváděním dítěte do symbolického jazyka matematiky. Vytvořilo by zásadní bariéru dalšího vývoje počítání, neboť by dítěti znemožnilo participovat na matematickém vědění jakožto kulturním výdobytku. Namísto osvojování souhrnu historicky vzniklého vědění by tak ponechalo dítě jeho individuálnímu objevování. To je však situace zcela se vymykající realitě normální lidské ontogeneze. Tvrdí-li tedy Piaget něco o vývoji čísla odděleně od jeho symbolického označování, vychází vlastně ze zcela nereálného předpokladu.

[3] Prsty jsou pro dítě nejdisponibilnější, nejuniverzálnější a nejpraktičtější přenosnou řadou. Její uplatnění pro počítání předmětů není zase nic jiného než přiřazení dvou řad - ke každému číslu se dítě dotkne počítaného předmětu nebo na něj ukáže a přiřadí mu vztyčený prst. Kombinace vizuálního a kinestetického vjemu a jejich opakování na stále stejném nástroji patrně umožňují dobře fixovat "početní Gestalty", zejména do pěti. Některými aspekty počítání na prstech se budeme zabývat později a poukážeme přitom mimo jiné na dvojsečnost této jejich počáteční výhody.

[4] Hejného rozlišení etapy separovaných modelů a etapy univerzálního modelu by pak bylo možno chápat jako dvě vývojové fáze použití názorné zprostředkující řady. (Srv. Hejný, 1990, s. 58-9.)

[5] Používáme termín "imaginární" ve významu přibližně synonymním k "názorný", "obrazný". Imaginární je např. vyjádření počtu | | | |, kde každá čárka zobrazuje kus. Naproti tomu "symbolický" používáme pro označení množství čísly v podobě číslovek (orálně) a číslic (graficky). Paralelismus imaginárního a symbolického je podle nás jednou z podstatných stránek vývoje počítání.

4. Vývoj strukturace množství se nutně dostává k bodu, kdy počet je vyjádřen číslem, kdy odpovědí na otázku "kolik" je číslo jako nejprve slovní a později i písemné **označení počtu**. Použití číslovek jako jazykových symbolů však není nutně až završením procesu operační strukturace množství, jak jsme ho naznačili výše, ale může do něj vstupovat - a nejčastěji i vstupuje - mnohem dříve.

K symbolickému označování počtů se tak děti dostávají různými individuálními cestami. Zatímco dosud jsme sledovali především možnost strukturace množství zprostředkované pouze operačně, bez znalosti čísel jako symbolů, reálná situace je jiná, v krajním případě dokonce opačná: děti znají číselnou říkanku, ale operační strukturace množství je teprve na úrovni rozlišení jen o něco vyšší než "hodně/málo".

K tomu, aby se použití slovních výrazů (číslovek) pro spočítání stalo dítěti dostupným, stačí dokonce sukcesivní řazení. Dítě dostává v číselné říkance nástroj řazení v čase. Avšak jmenování čísel souběžně s postupným ukazováním na jednotlivé předměty tu vytváří jen paralelní označovací řadu a přiřazení tu má jiný charakter než u dvou názorných řad. Proto počáteční dovednost spočítání prostřednictvím jmenování čísel není totéž co porovnání dvou názorných řad. Rozdílná označení množství jako počtů mají pro dítě význam právě jen jako různost jejich jmen, ale tato různost není zřejmě vztahována k "méně/více" jako výsledku operačního porovnání dvou názorných řad. Dítě tu nechápe číselnou říkanku jako číselnou řadu, ale právě jen jako říkanku, jejíž jeden výraz přiřadí poslednímu ukázání stejně jako při rozpočitadlu.

Na jedné straně vytváří tedy číselná říkanka přenosný nástroj spočítání, na druhé straně však nemá zpočátku charakter řady korespondující s operačním řazením, s konstrukcí řady, nýbrž jen s ukazováním na jednotlivé elementy.

Dovednost správně označit množství číslem tak může daleko předcházet úroveň operační strukturace, kterou by dospělý očekával, kdyby ji vyvozoval z použití čísel jako řady. To je zřejmě fenomén, který budí dojem nezávislosti používání číslovek a operační strukturace, o které mluvil Piaget. Piaget má tedy pravdu v tom smyslu, že správné přiřazení čísla nějakému množství nevypovídá jednoznačně o úrovni operační strukturace. Ta v tu chvíli nemusí být dokonce ještě ani na úrovni jedno-jednoznačné korespondence. Zdá se, že použití říkanky jako činnost pouze nutně člení množství na kusy a tím přesahuje strukturaci období "hodně/málo".

Většina dětí na začátku první třídy je ve svém vývoji někde mezi těmito dvěma extrémními konstelacemi[6]:

1. pokročilá operační strukturace na úrovni přesné diskriminace názorného počtu bez znalosti symbolického označování počtů,

2. pokročilé označování počtů číslovkami s operační strukturací množství na úrovni sukcesivního řazení.

Protože za mnohem běžnější variantu pokládáme to, že se dítě s číslovkami setká, lze předpokládat, že většina dětí bude blíže spíše druhé variantě. Vývoj počítání, jak ho budeme analyzovat dále, svědčí o tom, že přeměna číselné říkanky v koncept symbolické řady je dlouhodobý proces. Zároveň se však posun k takovému chápání čísla, které by odpovídalo Piagetovu vymezení, uskutečňuje právě prostřednictvím této přeměny a nikoli mimo ni. **Rekonstrukce číselné říkanky v číselnou řadu** je ovšem součástí - nikoli předběžným předpokladem - vývoje počítání, v němž se mění dětské chápání příkladu, jeho subjektivní logika.

[6] Zajímavou otázkou by bylo, zda tyto konstelace vytvářejí dva krajní typy dětí z hlediska vývoje počítání ve škole.

POČÁTEČNÍ VÝVOJ CHÁPÁNÍ PŘÍKLADU

Korespondence "před/za" a "méně/více"

Jak tedy vypadala situace, snad typická pro počátek školní docházky, která předcházela prvnímu příkladu? Už první týden se děti učily rozpoznávat počty odpovídající slovnímu vyjádření "jedna" až "šest", další týden přistoupilo "poznávání číslic 1, 2, 3" - jednak jejich "čtení", jednak přiřazování názorného počtu - a třetí týden totéž s číslicemi 4, 5. Na konci prvního měsíce začaly děti psát číslice 1, 2, 3 a následující týden došlo na první příklady. [7]

I později byla velká část času v hodinách matematiky věnována **různým způsobům zobrazení množství**. Výčet by zahrnoval reálné předměty každodenního života, jejich atrapy a obrázky, počítadlo, kartičky s puntíky, dominové kostky či jejich obrázky, kreslená či vystřižená barevná kolečka, prsty, kreslené čárky, "papírové peníze", "mřížku", a čísla v nejrůznějších podobách: jednak v mluvené - názvy, jména čísel, jednak v psané: kartičky s čísly, čísla na tabuli, v učebnici, v sešitě - buď samostatně nebo jako součást textu (slovní úlohy, psané odpovědi), vepsaná do obrázků, jako součást číselné řady či číselné osy atd.

Co dává používání této pestrosti zobrazení smysl? Samozřejmě, že bychom našli také snahu po vnější atraktivitě, která chce přitáhnout děti k počítání tím, že jim ho nabízí v krásné podobě. Avšak podstatné na použití variety zobrazení je patrně něco jiného. Triviální apriorní úvaha bude zřejmě mít za to, že právě z různosti zobrazení variujících nejrůznější aspekty se vynořuje počet a číslo (jako jeho označení), které tvoří jediné invarianty nabízené proměnlivosti. Kdyby tato úvaha byla správná, pak prostě nabídnutá pestrost a možnost operovat jednou s tím, podruhé s oním a potřetí s úplně jiným zobrazením množství by vedla k tomu, že dítě konstruuje souvislosti, jež jsou pak vyjádřeny v matematických symbolech.

Ve skutečnosti ale vypadají vnitřní souvislosti oné pestrosti školní nabídky jinak. Základem prezentace různých zobrazení množství je vždycky **paralelní prezentace** nejméně dvou různých zobrazení téhož množství. Užití číselných symbolů pro zobrazení pak není něčím, co emerguje na konci jako završení, číselné symboly jsou naopak přítomny od počátku, od prvního dne školní docházky.

Zacházení s číselnou říkankou se stává systematickým. Číslovky jsou přiřazovány na jedné straně názorným počtům, určitému počtu názorných předmětů či tvarů, na straně druhé číslicím.

Tento důsledný postup, prováděný navíc především v hodinách matematiky, vyčleňuje jazyk matematiky z běžného jazyka. Číslovky se stávají tím, co se systematicky používá ke spočítání. Operace spočítání jednak důsledně strukturuje množství předmětů na kusy, jednotky, jednak vede k označení počtu číslem, které se zanedlouho bude účastnit dějů typických pro matematiku - počítání.

Přiřazování číslovek jako slovních výrazů číslicím jako psaným znakům má pak první důsledky typické pro vstup do grafické kultury. Fixováním číslic a jejich uspořádáním do vzestupných a sestupných řad (např. v úlohách na doplňování chybějících číslic) strukturují děti původní číselnou říkanku jako viditelnou řadu elementů. Dosud bylo možno dospět k číslovce jen odříkáním celé říkanky od začátku, dokud se na číslovku nenarazí. Např. při otázce "které číslo je po čtyřce" si dítě zpočátku musí odříkat říkanku od jedné do pěti - a i tak může mít potíže vydělit slova "čtyři" a "pět" jako jednotlivé po sobě jdoucí elementy. Nyní díky své psané podobě na jedné straně a svému významu jako označujícího, signifikantu určitého

[7] Citujeme zde záznamy z třídní knihy.

názorného počtu, nabývají status samostatných elementů závazně uspořádané řady. Číselná říkanka se rekonstruuje v řadu čísel, která se stávají základními termíny matematického jazyka.

Závazná posloupnost čísel poté, co byla vyvázána z proudu číselné říkanky (strukturovaného původně jen rytmicky a foneticky) se mění v uspořádanost podle velikosti. Pojmům "více" a "méně" v imaginárním (názorném) vyjádření odpovídají pojmy "před" a "za" v číselné řadě. Mohli bychom možná dokonce formulovat tezi, že vstup do světa čísel začíná tam, kde se ustavuje korespondence mezi "méně - více" (imaginárním počtem) a "před - za" (postavením v číselné řadě). Atribut čísla "menší - větší" tu nabývá **významové dvojakosti**: je dán jednak jako korespondence s názorným množstvím (tzn. zakotvením ve vztahu k označovanému), jednak jako postavení v číselné řadě (tedy zakotvením v řadě označujících). Nejde tu už jen o odpovídání si daných množství v různých způsobech zobrazení, ale o korespondenci binárních vztahů, tedy odpovídání si vztahů dvojic množství: "4 je větší než 3" znamená "| | | | je více než | | |", ale také "4 je za 3".

Tato situace má pro naši analýzu zajímavý důsledek: umožňuje dospět k porovnání dvou množství jinou cestou, než je výše popsaná operační strukturace prostřednictvím párových přiřazení prvků dvou názorných řad. Zatímco tam bylo nutné přinejmenším sukcesivní řazení párů (ukazování na dvě názorné řady současně), zde je postup jiný: spočítání a označení jednoho množství, spočítání a označení druhého množství a provnání dvou označení. Zatímco operační porovnání prostřednictvím párové korespondence je možné, avšak z každodenních životních situací dětí nevyplývá zřejmě nijak nutně, porovnání prostřednictvím číselného označování je na počátku školní docházky pro dítě kulturní nutností, před kterou ho škola staví. V důsledku toho dospívá možná většina dětí ke strukturaci "méně/více", která se v čistě operační (piagetovské) linii vývoje jevila jako nižší a jako nutný předpoklad dalšího vývoje, později a prostřednictvím "operačně vyšší" strukturace množství jako počtu.

Logika prvních příkladů: sklad počtů

Některé děti umějí při příchodu do školy nejen číselnou říkanku, ale také příklady, nejčastěji "do pěti". Ale také tyto příklady mohou být naučeny jako říkanka, bez chápání jejich významu. Škola to klasicky označuje za "mechanické" osvojení, proti kterému staví "logické". Dále chceme analyzovat právě logiku prvních příkladů ve škole.

Součástí konstrukce či případně rekonstrukce příkladu jako říkanky je nesporně přeměna číselné říkanky v řadu čísel s jejich významy odpovídajícími označení konkrétních počtů. V důsledku toho pak čísla v původní říkance příkladu jsou pochopena jako ony elementy, jichž se děje vyjádřené příkladem týkají.

Od prvních příkladů se ovšem děti učily nejen různá vyjádření počtu (a jejich odpovídání si), ale také vyjádření dějů a operací uvnitř jednotlivých způsobů zobrazení. Na příkladu typické úlohy vypadala tato korespondence takto: "Maminka měla doma dva rohlíky a ještě tři koupila. Kolik měla potom celkem rohlíků? Znázorni a vypočítej."

Na úrovni dějů s "reálnými předměty" byla operace s množstvím formulována jako synonymická řada "ještě koupit, dostat, přinést, přidat, dát dohromady, mít dohromady, mít celkem atd." Tato synonyma operace byla jakožto synonyma speciálně procvičována. "Jak bychom to ještě jinak mohli říct?" zněla třeba otázka učitelky a následně se potvrzovala správná synonymická vyjádření, korigovala nepřesná a zavrhovala špatná. Kritériem této korekce je korespondence s matematickou operací sčítání, kterou ještě děti neznají, ale která prostřednictvím učitelčiny afirmace přesto už strukturuje synonymickou řadu "sčítání" a utváří určitý kontextový soubor, jemuž budou odpovídat některé typy matematických "vět" - příkladů.

"Jak to znázorníme?" je pak otázka na modelové zobrazení nejen reálných předmětů, ale také příslušné operace. Řekněme, že v naší úloze děti znázorní rohlíky jako obloučky (už v podstatě grafické zobrazení). Kdyby nakreslily dva obloučky a k nim bez rozlišení ještě tři obloučky, znemožní toto zobrazení (z hlediska hledaného výsledku adekvátní) právě znázornění operace. Tu lze graficky zobrazit jen tak, že učitelka trvá na rozlišení - např. původní dva "rohlíky" a tři "koupené" rozdělíme mezerou nebo je odlišíme barevně. Jinak by se operace "dát dohromady" ve znázornění ztratila, nebyla by znázorněna. Přesněji řečeno, nebyla by zafixována, existovala by právě jen pro moment kreslení dalších tří obloučků. Mohli bychom namítnout, že se přidávané množství neztratí, automaticky se dostává do výsledku, což je pro spočítání "celkem" úplně postačující. Pravdivost této námitky poukazuje na to, že **dovednost "spočítat" předměty není všechno, k čemu učitelka znázorněním směřuje**. Stanovuje-li učitelka zobrazovací pravidla "znázornění" tak, aby v něm byla vyjádřena operace, umožňuje to na první pohled jen to, že lze pokračovat v intencích zadání úlohy "znázorni a vypočítej". "Vypočítat" totiž znamená, ať už je to explicitně vyjádřeno či nikoli, "zapsat" symbolickými znaky, jinak řečeno "sestavit příklad a vypočítat ho": 2+3=5. Uchovat ve znázornění rozlišení "původních" a "dalších" rohlíků znamená vést zřetelnější, viditelnější paralelu nejen mezi vyjádřením počtů, s nimiž se tu pracuje, ale také mezi operacemi "plus, sčítat", tedy synonymickou řadou symbolického zobrazení operace, a dvěma předchozími názornými řadami:

- "plus znamená, že budeš sčítat",
- a to je jako "spočítat obě skupiny obloučků celkem, najednou, dohromady",
- a to je jako "koupit ještě rohlíky, přidat je, mít ty původní a ty potom koupené dohromady".

Tak je původní říkanka příkladu rekonstruována jako **symbolické** vyjádření (zápis nebo jeho přečtení) **imaginárních** (názorných) počtů a dějů. Paralelismus symbolických a imaginárních zobrazení tak tvoří **logiku**, jíž se konstruuje a rekonstruuje význam původních mechanických dovedností.

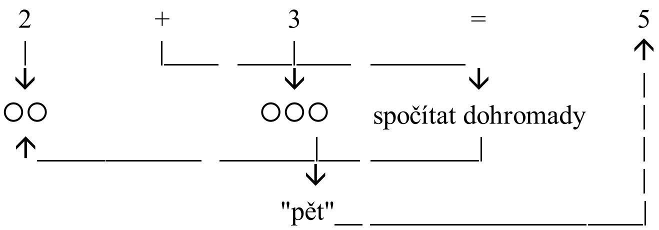
Jak tedy děti počítají první příklady? V našem konkrétním případě můžeme postup vyjádřit posloupností otázek, které učitelka při řešení úlohy dětem klade. Samo řešení může být předznamenáno otázkou navazující na otázku "kolik?": "Víme to?" "Nevíme - musíme to vypočítat", konstatuje učitelka i v případě, že některé děti tvrdí, že víme a některé z nich už skutečně vědí i výsledek. Učitelka však volí postup v co nejmenších krocích, který pokud možno zaručuje, že je přístupný všem, i těm, kteří neumějí počítat "už z domova". Další otázky mohou mít tuto posloupnost:

1. Jak si to znázorníme? (Nakreslíme dva obloučky a ještě tři obloučky.)
2. Jaký bude příklad? (Dva [2] rohlíky a tři [3] rohlíky - a jaké bude znaménko? Ano, plus, budeme sčítat.)
3. Jak ho vypočítáme, jak si pomůžeme? (Spočítáme všechny obloučky dohromady. - Kolik je jich dohromady? - Pět.)
4. Co napíšeme do příkladu? ("5")
5. Jaká bude odpověď? (Maminka měla celkem "pět" rohlíků.)

Jiný postup může změnit pořadí prvních tří kroků:

1. Jak to vypočítáme, jaký bude příklad?
2. Jak ho vypočítáme, jak si pomůžeme? (Znázorníme si ho.)
3. Jak ho znázorníme? (Nakreslíme dva obloučky a ještě tři obloučky.) - Co s nimi teď uděláme, když znaménko je plus, když je to sčítání? - Spočítáme je dohromady.

V obou postupech je příklad řešen jako spočítání názorně vyjádřených počtů, které obsahuje výsledná struktura. Druhý postup vychází ze sestavení příkladu a může tedy být používán i pro řešení příkladů zadaných přímo, nikoli jako součást slovní úlohy:



Ve druhém případě už se status znázorňování, které původně zprostředkovalo přechod mezi reálnými ději a předměty (resp. jejich realistickým zobrazením) a symbolickým zápisem, posouvá. Původně musely být z jazyka zadání úlohy teprve vyčleněny počty jako elementární výrazy jazyka matematiky. Redukce celé bohatosti imaginárních, obrazných kvalit reálných předmětů na jediný, totiž jejich spočitatelnost (či "kusovost" schopnou spočítání) se prováděla speciálním krokem: předměty či jejich obrázky se znázorňovaly jako imaginární, názorné počty, tedy převáděly se na obrázky počtů. Tento paralelismus dvou názorných zobrazení, z nichž jedno je takovým popisem reality, v jakém se dítě pohybuje zcela samozřejmě (a v tomto smyslu tedy popisem nepříznakovým), a druhé popisem matematickým, který je pro dítě nový, nesamozřejmý (a v tomto smyslu příznakový), do nějž se první popis překládá, se stal po ustavení strukturace množství jako počtů-čísel zbytečným. Elementární matematický popis množství reálných předmětů jako počtů se stal nepříznakovým.[8]

Paralelismus imaginárního a symbolického zobrazení, tedy příkladu a znázornění nadále trvá. Znázornění (jako nepříznakové zobrazení) je pro děti tou rovinou, ve které provádějí matematické operace, ze kterého odvozují řešení příkladu. Tím zároveň znovu a znovu reprodukuje logiku příkladu, který přestal být pouhou říkankou.

Logika prvních příkladů je **logikou skladu** dvou názorných počtů.

Problémy korespondence příkladu a úlohy

Počátkem října nejspíše už přicházíme do fáze, kdy potíže s korespondencí názorného a symbolického zobrazení množství nejsou - v tom smyslu, že čísla 1 - 4 jsou běžně používána ke spočítání.

Něco jiného je ovšem sestavení příkladu. "Říct" příklad není snadné, zpočátku ani tehdy, když jde o to přiřadit hotovou symbolickou strukturu (z několika připravených) slovnímu zadání a názornému zobrazení.[9]

[8] Označení toho, co tu popisujemeho, jako přesun příznakovosti, je inspirováno Jakobsonovými pojmy (viz Jakobson, 1993).

[9] Citace záznamů uvádíme kurzívou. Pokud mají formu tabulky, pak v levém sloupci jsou poznámky vzniklé namístě, ve třídě. V pravém sloupci je pak rozšíření záznamu vzniklé při následném zpracování poznámek na počítači (zpravidla následující den), které doplňuje či komentuje poznámky v levé sloupci. Jména dětí jsou smyšlená.

Učí se číst znění příkladu na sčítání: "dvě plus jedna rovná se tři" hromadnou recitací.	
"Dali jsme do tašky jednu housku a dva rohlíky" - který příklad by to mohl být? Mají vybrat z příkladů napsaných na listech papíru. *Stejně "Dva kluci a jedna holčička" - teď už jde "najít správný příklad" snadněji.*	*Tady se vlastně dělá matematizace reálných životních operací. Předměty jsou na nástěnce v podobě jakýchsi atrap - jeden rohlík, dvě housky a mezi nimi + . Děti k tomu mají nacházet adekvátní vyjádření v číslech. Napoprvé se to moc nedaří.*
"Jeden makový a jeden tvarohový" zkouší najít Slávka - nejde jí to.	
Učitelka vyzývá: "jenom to řekni, Tondo".	*Asi aby nemusel chodit z poslední lavice až k první, kde jsou rozloženy listy s příklady.*
Po Tondovi ještě jedna holčička - ale nejde to.	

Někteří to nesvedou vůbec. Slávka nezvládá přiřadit ani napsaný příklad.

Původně jsme se domnívali, že úkol Tondy byl obtížnější - "jen to řekni" - ale není to jisté. Jednak se mohl pohybovat v dětmi preferovaném orálním modu, jednak mohl strukturu vytvářet sukcesivně jednotlivými přiřazovacími kroky. Ale i to bylo na něj moc. Je to patrné i z následujícího týdne.

Teď tedy převod obrázků (řada trojúhelníků, ve které je jich několik škrtnuto) na matematickou formuli - ta fixována hlasitým čtením.	*"Umíme podle obrázků udělat příklad."*
Když trojúhelníky škrtneme, to je jako by tam nebyly, protože je z tabule neumíme sundat.	
Uč.:"Tondo víš?" Kroutí hlavou. Kolik je tam trojúhelníků? - Dva.- Kolik je jich škrtnutých? - Jeden. - Jaký bude příklad? (A Tonda ho po malém váhání zvládl!)	

Až tady se vytváří - pro tuto chvíli! - korespondence příkladu s popisovanými ději. Je vidět, jak se tu matematická operace realizuje jako posloupnost činností, jak je složitá a složená. Struktura tu je strukturou činnosti, je posloupností jednotlivých kroků. Problém není v jednotlivé operaci, ale právě v posloupnosti. Přiřazení čísel počtům je ještě natolik samostatným (příznakovým) krokem, že je Tonda schopen se pohybovat v rámci jednotlivých korespondencí, ale jejich posloupnost musí zprvu držet učitelka. V první citaci možná nezvládl ani přímou korespondenci mezi reálnými předměty a čísly bez zprostředkujícího znázornění.

Počátkem listopadu (3.11.) se objevují zajímavé fenomény:

- Priorita symbolického zápisu.

Příklady s chybou: 3+1=5 *Špatný příklad v učebnici Romanku zaráží - na počitadle osciluje mezi správným zadáním a správným výsledkem.*	*Když vzala ke třem kuličkám další dvě, odpovídalo to zadání, ale když se učitelka ptala na výsledek, viděla, že to vychází jinak než v učebnici a vracela jednu kuličku zpátky. Správné řešení - "příklad je špatně" - musela dopovědět učitelka.*

Romanka projevuje zmatek nad příklady s chybou v učebnici, které jsou v rozporu s právě nabytou korespondencí. A po zjištění rozporu přiznává prioritu symbolickému zápisu v učebnici!

Ve světle toho vypadá jinak i "zdůvodňování", které jsme opakovaně registrovali.

Čtyři děti hrají před tabulí příklady. Nejprve Šárka se 3 kluky. Kolik je tam dětí celkem? - Čtyři. Teď pošleme všechny holčičky sednout - kolik tam zbylo dětí? Blanka: Tři. - Jak jsi na to přišla? Blanka mlčí. Učitelka vyvolá hlásící se Sášu: "Protože čtyři bez jedné rovná se tři." To je správná odpověď.

Na první pohled je na učitelčinu otázku jediná rozumná odpověď: "To přece vidím." Vycházíme-li z představy vývoje "od názoru k číslům", pak to, co tu učitelka vyžaduje jako vysvětlení, nemůže přece vysvětlením být. Má to stát až na konci vysvětlování jako nový výsledek, jako matematický popis toho, co vidím. Ten zastupuje dění v realitě, ale nemůže ho tomu, kdo si teprve osvojuje čísla, vysvětlit. Ono "jak jsi na to přišla" nám tak zní falešně.

Po předchozí analýze logiky prvních příkladů však chápeme, že ve skutečnosti nemusí otázka učitelky být otázkou po kauzálním zdůvodnění ("protože"), ale po prosté korespondenci jevů, po paralelismu názorného a symbolického zobrazení operací s množstvím. Učitelka svou otázkou a správnou odpovědí zaměřuje děti na tuto korespondenci - nic více, nic méně.

Romančino přidělení priority symbolickému zápisu nás však upozorňuje, že směr zdůvodnění "protože", který se zdá tak nesmyslný dospělému, pracujícímu s představou vývoje "od názorného k symbolickému", zdaleka tak nesmyslný není. Ukazuje, že přinejmenším pro některé děti má symbolický zápis či říkanka primární platnost. Názorné zobrazení tuto platnost srozumitelnými prostředky **vysvětluje, avšak nezdůvodňuje**.

Můžeme uvažovat o tom, že nepřesně formulovanou otázkou po zdůvodnění učitelka vlastně takovou souvislost implantuje, že je tedy důsledkem té formulace zdůvodnění, kterou učitelka vyžaduje (o čemž máme pochybnosti). I tak by to ovšem znamenalo, že symbolické výpovědi dospělých o světě nejsou pro dítě formulemi, které přijímá **poté**, co je prověří vlastní názornou zkušeností, nýbrž jsou něčím, co dítě přijímá **a priori** a co jeho názornou zkušenost vede a prestrukturuje. Je tomu tak jen pro některé děti? V souvislosti s tím, co jsme řekli o možnostech předbíhání operační a symbolické strukturace množství v předškolním období, se nabízí otázka, zda např. převaha postupu "od názorného k symbolickému" odpovídá předstihu operační strukturace a naopak. [10]

• K tomu se váže další fenomén.

Děti se (po dvou příkladech) nastavily na "špatně" a Marta označuje 5-2=3 za špatně. (Učitelka se ptá stejnou intonací a Marta jí to baští. Na počitadle se pak přesvědčuje o opaku.)

Je tu patrná snadnost vzniku apriorního nastavení zaměření, momentální, kontextuální apercepce, ustavení kontextu autoritou či vnějším podnětem, kterou můžeme u dětí často pozorovat.

Je to vlastně případ usuzování podle analogie - ale analogie se tu vysuzuje z vnějšího kontextu, nikoli z věcné souvislosti příkladů, jak o ní budeme mluvit později. Dítě odhaduje řešení podle jiných souvislostí - podle předchozích příkladů, podle tónu učitelky apod. Pro dospělého pozorovatele "nepočítá, ale hádá" podle vnějších, nepodstatných, náhodných znaků.

[10] Můžeme také uvažovat o souvislostech s rozdíly mezi pohlavími - chlapci orientováni více na konstrukční hry a na samostatnost, dívky více na komunikaci. Jinou linií by mohla být souvislost s rozdíly mezi verbální a nonverbální inteligencí.

Děti se k tomuto postupu uchylují třeba tehdy, když se jim nechce počítat - jsou unavené, nudí se, nesledují vyučování.

Zde však jde o něco jiného. Zadání asi přesahuje jejich možnosti, protože obsahuje krok navíc oproti prostému vypočítání příkladu. Tím se struktura zadání stává nezřetelnou (obsahuje více kroků, než je dítě schopno myslet) a dítě se začíná pohybovat sice ve vymezeném rámci kontextu, ale nepřesně, odhadem. Také v jiných případech můžeme pozorovat, že vždy, když se prodlouží - byť o jeden krok - posloupnost, kterou k vyřešení zadání musí dítě provést, vzroste počet chyb. Uvažovat jiný kontext než je ten, ve kterém se momentálně pohybuje, znamená nejen o něm vědět - zde tedy vědět o možnosti, že příklady v učebnici mohou být nejen "dobře", nýbrž také "špatně" - ale vyžaduje to držet tento parametr jako součást posloupnosti řešení. Zdá se, že to nutně blokuje část určité omezené kapacity pozornosti či paměti, kterou má dítě v dané chvíli k dispozici. Její překročení pak jako by vedlo k chybám.

17.11. dělá sestavení příkladu (včetně rychlé korespondence počtu a čísla) potíže už jediné holčičce, která se tím zcela vymyká standardu třídy.

Sčítání a odčítání: od logiky skladu k logice změny řady

Úloha znázorňování pro další vývoj počítání se stane zřejmou při srovnání toho, jak se znázorňuje sčítání a jak odčítání. Předběžně budeme formulovat tezi, že **v důsledku znázorňování odčítání se logika skladu dvou množství mění v logiku změny řady**, resp. změny počtu uspořádaného v řadě.

1. Znázornění sukcesivní operace jako simultánní struktury.

Vraťme se znovu k úloze s rohlíky. Do znázornění rohlíků obloučky byl podle požadavku učitelky zaveden rozdíl mezi původními a koupenými rohlíky, jejich rozlišení. To samo už zavádí strukturu. Celkový (výsledný) počet je strukturován jako sklad dvou částí, dílčích počtů. Viděli jsme však, že tato struktura není nutná ke zjištění výsledku, jeví se spíše jen jako zachování analogie počtů daných v textu zadání a v sestaveném příkladu. Tato korespondence rozrušuje mechanickou posloupnost příkladu psaného a čteného zleva doprava, takže se jeho přečtení zprvu jevilo právě jako říkanka. Ať jsou počty tvořící části skladu znázorněny v jakémkoli pořadí, případně pod sebou, a ať jsou v jakémkoli pořadí spočítány, výsledek je vždy tentýž.

Podíváme-li se však na odčítání, fakultativnost rozlišení částí pro účely řešení příkladu se mění. Na úrovni reálných předmětů se totiž zřetelně projeví sukcesivní povaha reálných dějů (tedy operací s reálnými předměty). Synonymickou řadu tu pro operaci odčítání tvoří "sníst, zmizet, ztratit se, dát někam jinam" - vše co vyjadřuje dřívější zmizení a současné nebytí předmětu. Někdy lze nebytí vyjádřit indexem: z ořechu zbyde jen hromádka skořápek, z talíře střepy apod. V zásadě však lze provedené odečtení jako nebytí předmětu vyjádřit až **grafickým** znázorněním - v tomto smyslu už vyjádření prostřednictvím indexu je přechodem ke grafické podobě vyjádření. Předmět nemůže ve své trojrozměrné reálnosti zároveň být a nebýt. Platí to dokonce i pro znázornění na počítadle, kde sčítání mělo dosud strukturu naprosto analogickou jakémukoli jinému způsobu znázornění: "odečíst" tu znamená "dát na stranu". Pokud však zároveň chceme dát na stranu tak, abychom viděli, co jsme odečetli, mají dané kuličky nejednoznačný status a dítě bude patrně zmateno, zda je má zahrnout do výsledku či nikoli, případně jakým způsobem.

Grafické znázornění zavádí jednoznačné zobrazení současné absence původně přítomných předmětů škrtnutím. Oproti úrovni "reality" to umožňuje znázornit posloupnost operace odčítání v simultánním vyjádření - odečtené předměty jsou uchovány jako škrtnuté.

Při srovnání se znázorněním sčítání vidíme, že tato simultánní struktura může být stejná: dvě rozlišené skupiny uvnitř celku. Rozdíl spočívá v tom, že u sčítání je **možné** zavést vnitřní strukturaci celku (ale pro zjištění výsledku to není nutné), kdežto při odčítání je to **nutné**. Odčítání si vynucuje právě grafickou formu znázornění, a ta pak nutně vede k fixování časové posloupnosti dějů s reálnými předměty jako simultánní struktury. Výsledný počet je totiž získán právě rozčleněním původního celku na části.

2. Splynutí operace s počtem.

Když dítě znázorňuje příklad na sčítání, pak může postupovat tak, že nejdříve znázorní jeden počet ze zadání, pak druhý a **teprve potom** se zabývá tím, co s nimi udělá, tedy o jakou jde operaci. Teprve následně je "spočítá dohromady". Při takovém postupu vytváří znázorňování simultánní strukturu jen potenciálně, jen o sobě. Ve skutečnosti, pro dítě, zůstává operace vydělena jako zvláštní krok v posloupnosti několika oddělených kroků.

Naproti tomu znázorňuje-li dítě odčítání, pak ve chvíli, kdy znázorňujet druhý údaj ze zadání, musí ho znázornit současně s operací - druhý počet vytváří škrtnutím. Poté, co je zavedeno odčítání a každý příklad může být buď sčítání nebo odčítání, musí předem zvážit, zda druhý údaj bude vyjádřen ubíráním či přidáváním počtu. To spojuje druhý člen příkladu v jeden celek s operací.

3. Od dvou počtů ke strukturaci téhož počtu

Znázornění sčítání, tedy skladu, pokud chce dítě uchovat jeho strukturu (pokud učitelka trvá na rozlišení dvou částí), je skladem dvou nesplývajících počtů. I když znázorňované počty bývají také znázorňovány jako řady, jsou to právě **dvě** řady: každá z nich představuje speciální krok a jsou spojeny teprve dalším speciálním krokem, spočítáním dohromady.

Naproti tomu znázornění odčítání vytváří pohyb jedné a téže řady. Operace se totiž znázorňuje jako změna původního počtu, jako rozlišení v původně nerozlišeném celku. Znázorňuje-li dítě např. 5 - 2, nakreslí nejdříve pět koleček: OOOOO a potom z nich, **z této řady** dvě škrtne: OOO~~OO~~. Škrtaný ani výsledný počet netvoří další, jinou řadu, nýbrž jsou zkrácením původní řady. Tato logika odčítání jako ubírání, zkrácení řady napříště mění i logiku sčítání, které se stává přidáváním, prodlužováním řady.

Počty však nemusí být nutně znázorňovány jako řady nebo tak nemusí být vnímány, i když jsou jako řady znázorněny. Řekli jsme, že řada jako posloupnost se vytváří jako záznam posloupnosti předchozí činnosti, jako záznam předchozího spočítání či načítání. Při počátečních příkladech s malými počty však děti využívají schopnosti diskriminovat různé počty a bez předchozího spočítání.[11] I v tomto případě je však odčítání rozkladem **téhož** výchozího počtu - celku na zadanou část (která se škrtá naráz, bez ordinálního spočítání, jakoby jedním škrtnutím) a hledaný zbytek. Ve stejné logice se pak součet dvou takto naráz postřehovaných počtů jeví jako sklad dvou zadaných částí v anticipovaný jednotný celek.

Operace skladu a rozkladu počtů jako "kardinálních tvarů" tak připomíná skládačku, v níž pohyb, jímž se realizuje operace, nekoresponduje s pohybem v číselné řadě prováděném při spočítání. **Logika skladu a rozkladu celku jakoby akcentovala vztahy celku a částí** a vytvářela tak možnost pozdějšího svinutí sukcesivních kroků počátečního počítání do simultánní struktury - ovšem struktrury imaginární, názorné, obrazné.

Naopak **prodlužování a zkracování řady**, které se děje spočítáním přidávaného či ubíraného počtu, **akcentuje sukcesivnost této operace**, avšak sukcesivnost, v níž je zjevný paralelismus s pohybem v číselné řadě a jejímž prostřednictvím se vytváří **pohyb s určitým**

---

[11] Schopnost postřehovat počet naráz se někdy dává do vztahu k tzv. kardinálnímu pojetí množství oproti pojetí ordinálnímu, které odpovídá načítání. (Srv. Hejný a kol., 1990, s.60-61.)

směrem. Takovým znázorňováním příkladu se vytváří logika, v níž první údaj už neznamená prostě počet, ale je údajem o počáteční velikosti početní řady, která bude v následujícím kroku prodloužena nebo zkrácena o velikost zadanou jako druhý člen příkladu. Tuto velikost se směrem pak můžeme chápat jako vznik operátora.[12]

Znázornění odčítání tedy zřejmě vytváří alternativní logiku příkladu - na jedné straně **logiku skladu a rozkladu** jako logiku operací s celkem a částmi, na druhé straně **logiku zkracování a prodlužování řady**, v níž operace s počtem je pohybem počtů uspořádaných v jedné řadě.

Argumentujeme-li rolí grafického znázorňování, znamená to, že posun logiky nastává pouze při znázorňování grafickém?

Vezměme odčítání na počítadle. Dítě napočítá výchozí počet. Nyní přichází oproti sčítání změna: musí zvážit operaci, tzn. odkud bude brát další indikovaný počet. Pak odpočítá odčítaný počet. Po jeho zmizení se však ztrácí i původní řada, "zkrácení" se odehrálo jako akt činnosti, ve výsledku však není viditelně uchováno. Výsledek je zjištěn jako nový počet, který nijak viditelně nesouvisí s původním, není jeho částí. Negrafické znázornění odčítání tedy předřazuje operaci před stanovení druhého počtu a v tomto smyslu ji s ním spojuje, činí z něj operátora. Operace jako pohyb se také odehrává v téže řadě. Avšak na rozdíl od grafického znázornění není operace uchována ve výsledku - simultánní vyjádření počtů zadaných v příkladě není součástí výsledného znázornění.

Už na tomto místě bychom však chtěli platnost závěru, který se nabízí - že totiž při negrafickém znázorňování dítěti uniká operace s počty jako pohyb téže řady - relativizovat. Přestože je grafické znázornění nejvýhodnější, stávají se všechny momenty posunu k počítání jako pohybu řady dětem dostupnými zřejmě i jinými cestami, např. zrychleným spočítáním.

Souvislost rychlosti počítání s vývojem jeho logiky není ani jednosměrná ani jednoznačná. Na jedné straně dítě dokáže zrychlovat své počítání i v rámci původního způsobu počítání. Nechme stranou okolnost, že příkladů je zpočátku velmi málo, takže se dobře pamatují jako říkanky, jejichž logika je už nyní zřejmá, ale právě proto nemusí být vždy znovu reprodukována reálnou operací s názornými počty. Jde nám tu o to, že malé názorné počty velmi zkracují dobu nutnou k jejich stanovení. Také schopnost postřehnout určité množství naráz se u dětí do jisté míry postupně zvyšuje.

Korespondence mezi naráz postřehnutelnými počty a čísly se stává okamžitou - do jejich přiřazení nevstupuje spočítání. Jaké to má důsledky? Okamžitá korespondence čísel a počtů zrychluje posloupnost kroků řešení a přibližuje ji tak simultánní strukturaci grafického znázornění. Obrazy tří názorných počtů následují tak rychle po sobě, že se strukturální složení celku a částí stává dočasně viditelné: ve chvíli, kdy dítě bere z původního počtu | | | | | naráz | | |, jsou mizející předměty ještě přítomny.

Je tu dobře patrný výše diskutovaný rozdíl. Postřehnutí počtů naráz přibližuje počítadlo pro moment provádění operace grafickému znázornění v ohledu uchování struktury operace, avšak tato struktura je strukturou skladu a rozkladu částí. Vzetí počtu naráz zvýrazní strukturu celku a částí, ale potlačí směr operace. Naopak směr pohybu je zřetelný právě při načítání přidávaného či ubíraného počtu po jedné.

---

[12] Pojem "operátor" užíváme přibližně v témže významu, jak ho vymezuje Hejný (1990, s.65). V dalším textu ovšem figuruje jednak jako operátor "o sobě", kdy je pojem užíván k popisu podoby čísla v příkladu z objektivního hlediska "dospělé" matematiky, jednak jako operátor "pro dítě", tedy jako popis formy subjektivního chápání čísla dítětem.

"Do pěti" - období bez chyb

Po ovládnutí základní logiky příkladů, v době, kdy počítaly "do 5" (ještě 3.11. přichází při příkladu "4+1" upozornění, že tenhle příklad je těžký) bylo počítání pro děti snadné. Dělaly málo chyb - méně, než učitelka čekala: při diktátech se až v sérii osmi příkladů objevovaly nějaké chyby.

Napomáhá tomu snadnost znázorňování, která se týká jak prstů tak počítadla. Malý počet čísel a počtů, s nimiž dosud pracují, však usnadňuje nejen jejich korespondenci, ale znamená také, že příkladů jako symbolických figur je dosud málo: při sčítání do 5 je to 10 příkladů (resp. 6, nepočítáme-li příklady s komutativní záměnou) a na odčítání 10.

Argumentovali jsme výše, že grafické znázornění odčítání s sebou nese přechod k vyšší logice počítání. Zdá se však, že fenomenologie **počítání s malými počty** svědčí o tom, že tu tento přechod není zprvu nutný.

- Znázorněné malé počty nejsou nutně uspořádány do řady, protože riziko chyby při spočítání je zanedbatelné (vynechání či počítání dvakrát).
- Ani řadově uspořádaná znázornění malých počtů nejsou nutně vnímána jako řady - to přichází až s jejich vizuálním prodloužením.
- Avšak v důsledku výše řečeného ani grafické znázorňování neznázorňuje odčítání důsledně jako změnu téže řady. Interferují tu různé kulturní způsoby vyjádření počtů - především uspořádání obvyklá na hracích a dominových kostkách.
- Také při počítání na prstech (které je v tomto období explicitně tolerováno se snahou upevnit korespondenci čísel a počtů) je způsob ubírání nedůsledný a je dán spíše tím, které ze vztyčených prstů lze snáže skrčit.
- Počítání s malými počty nenutí ke grafickému znázorňování ani kvůli identifikaci případné chyby. Při snadnosti a rychlosti znázornění počtů lze chybu snadno identifikovat opakováním celého postupu.

Dalo by se možná shrnout, že snadná čitelnost malých počtů ve svém důsledku neguje uspořádání znázorněných počtů do řady a vyjádření operace s počty jako změnu téže řady.
Jinak je tomu při **rozšiřování oboru počítání**:

- Obtížnější spočítání nutí počet uspořádat do řady, aby nedošlo k vynechání či počítání dvakrát.
- Rostoucí počty vedou k vizuální percepci znázornění jako řady.
- Pro menší počty je jejich čtení uspořádáním do kulturně obvyklých tvarů usnadněno, neboť tyto tvary fungují jako jakési semisymboly. U větších počtů, pro něž taková semisymbolická zobrazení neexistují, je jejich přečtení možné jen spočítáním a tedy při uspořádání do řady.
- Nejednoznačnost prstových vyjádření různých příkladů vede při větších počtech k chybám, které vyžadují učinit způsob přidávání a ubírání prstů jednoznačným. V důsledku toho se pohyb prstů většinou stává ekvivalentem pohybu (přidávání/ubírání) řady.
- Opakování celého postupu při chybě v počítání vede při rostoucích počtech, které je nutno spočítat, k opravě výsledku, nikoli však k identifikaci kroku, kde se původně chyba stala. Grafické znázorňování se tak stává výhodnějším.

Můžeme tedy patrně udělat závěr, že znázorňování odčítání přináší přechod k logice příkladu jako pohybu řady až při počítání s většími počty.

POČÍTÁNÍ S VĚTŠÍMI ČÍSLY

Po rozšíření oboru počítání postupně jeho snadnost mizí. Obtížnější znázorňování počtů se navíc stále obtížněji dá kompenzovat naučením příkladů zpaměti - roste i počet příkladů. Při počítání do 5 je to celkem 16 příkladů (při komutativní ekvivalenci jde o 6 příkladů na sčítání a 10 na odčítání). V období před vánočními prázdninami, kdy děti počítaly do 7, už to bylo 33 příkladů. Za dalších šest týdnů po návratu z prázdnin musely zvládnout rozšíření oboru do 10, které implikuje 70 příkladů (nepočítaje v to příklady s nulou a příklady s komutativní záměnou).

Ve chvíli, kdy dítě začíná potřebovat znázorňování nikoli jen k reprodukci logiky příkladu (který si ovšem snadno pamatuje jako jednu z matematických říkanek), ale právě ke zjištění výsledku příkladu, který nezná zpaměti, nastává paradox: znázornit stále větší počty je stále obtížnější a zdlouhavější.

K tomu přistupuje - v jistém smyslu také paradoxně - zvyšující se tlak na rychlost řešení příkladů. Je vyjádřen jak v pobízení učitelky, tak v čase, který mají na počítání k dispozici. I když ho nestanoví učitelka přímo, probíhají ve třídě nejrůznější formy vyhlášené i nevyhlášené soutěže o to, kdo bude první, nejrychlejší.

Tyto rozpory a tlaky, do nichž se dítě dostává, jsou vnějšími činiteli vývoje počítání. U většiny dětí vedou k nalezení rychlejší postupů počítání a většina z těhto rychlejších postupů je také výhodnější z hlediska přechodu k pokročilejšímu chápání logiky příkladu.

Odlišíme zde 2 linie řešení požadavků, jimž je dítě vystaveno - totiž nalézat rychleji výsledky příkladů, kterých je přitom více a jsou obtížnější. Jednou z nich je nacházet analogie mezi příklady a dosazovat či odvozovat výsledky z "hotových příkladů". Tento postup probereme později.

Druhou linií je rychlejší znázorňování především prostřednictvím rychlejšího spočítání počtů. Postřehování počtů naráz a jeho využití při načítání i takových počtů, které naráz uchopitelné nejsou, patří k takovým postupům.

Rostoucí písařská zběhlost a důsledné uspořádání počtu do řady pochopitelně zrychluje grafické znázorňování.

Při znázorňování na počítadle začínají děti využívat také jeho prestrukturace, spočívající v barevném odlišení prvních a druhých pěti kuliček v řadě a v desítkovém uspořádání řad. Využití této strukturace však už souvisí nejen se schopností postřehování naráz, ale také s tím, co budeme diskutovat později: s postupující strukturací vztahů mezi čísly, která umožňuje vzít např. 8 kuliček tak, že od celé řady se uberou dvě (viditelné naráz). V tu chvíli řídí manipulaci kuliček na počítadle už čistě symbolická znalost 10-2=8. Kuličky tu nezdůvodňují symbolický zápis příkladu, nýbrž naopak: taková znalost symbolického příkladu, při níž jeho logika už nepotřebuje zdůvodnění, tu zdůvodňuje formu názorné operace. Že však takový postup na počítadle není samozřejmý a je produktem vývoje spíše pozdějšího, než o kterém hovoříme v tuto chvíli, je patrné z následujícího:

27.4.95:

Romanka 6 načítá po jedné, Přemek 3 a 4 nikoli. *Blanka 5 načítá, načítá také 9 ve chvíli, kdy s ní vlastně doplňuje desítku!*	*Dokáží kardinálně postřehovat tak maximálně do čtyř - u Slávky bylo dobře viditelné, jak její postřehnutí 4 bylo "skorokardinální", složené ze 3 a 1 kuliček: její ruka se při nabírání kuliček na chviličku zastavila nad třetí kuličkou a vzápětí přibrala ještě jednu, takže žádané 4 nabrala "skoro najednou". Platí to samozřejmě pro řadu na počitadle - na hrací kostce určitě zvládnou i šest.*

Problémy počítání na prstech

Znázorňování počtů na prstech je zcela přirozenou fází dětského počítání, jíž procházejí patrně všechny děti bez výjimky. Přesto od určité chvíle začíná učitelka vyjadřovat s jejich používáním nesouhlas. Poprvé jsme ho zaregistovali už na začátku listopadu. Naproti tomu počítadlo učitelka ještě dlouho nejen tolerovala, ale nabádala k jeho použití místo prstů.

Nesouhlas školy s počítáním na prstech se ovšem zdá stejně tradiční jako nezdůvodněný či alespoň nezdůvodňovaný. Pokusíme se nastínit, do jakého světla staví roli prstů ve vývoji počítání naše analýza.

V počáteční fázi školního počítání slouží prsty ke znázornění počtu všude tam, kde není znázorněn jinak. Jakkoli by případný didaktický záměr chtěl prsty stavět na roveň kterémukoli jinému názornému zobrazení počtu, prsty mají výlučné postavení, vyplývající z jejich dostupnosti, rychlosti zobrazení dané snadnou manipulovatelností a nakonec i z toho, že jsou původně také nástrojem sdělení počtu (viz výše zmiňované "tolik" jako fáze operační strukturace množství).

Vzhledem ke svým vlastnostem jsou prsty výhodné při počátečním ustavování korespondence počtů a čísel a pro ustavení logiky prvních příkladů. Avšak v dalším průběhu vyučování, s rozšiřováním oboru počítání, se stávají problematickými. Problematičnost spočívá právě v tom, co jsme identifikovali jako podstatný krok dalšího vývoje počítání - v přechodu k počítání příkladů jako zkracování či prodlužování řady. Použití prstů, ponecháno samo sobě, poskytuje velké možnosti zrychlení počítání, ale děje se to způsobem, který je svého druhu vývojovou slepou uličkou, který nevede k přechodu k počítání s jednoznačně uspořádanou řadou a nesměřuje k dalším vývojovým stupňům - počítání prostřednictvím fixní názorné řady, později číselné řady a nakonec prostřednictvím restrukturace symbolických triád, jak o tom budeme mluvit dále.

Zřetelná je nemožnost uchovat na prstech strukturu proběhlé operace. Podobně však je tomu u počítadla, kde jsme přitom dokázali najít formy, jimiž se tento nedostatek kompenzuje. Otázka tedy je, zda počítání na prstech je analogií počítání na počítadle, zda prsty představují totéž, co kuličky na jednom drátu počítadla. Předběhneme-li odpovědí samotný výklad a argumentaci, pak může znít: Ve většině případů se počítání na prstech postupně stává analogií počítání na počítadle a děti je používají jako "rychlé počítadlo". Tato příznivá varianta vývoje je patrně nejobvyklejší a nastává ve většině případů, aniž je taková transformace prstového počítání přímo řízena. Dostačuje k tomu patrně tlak proti prstům a používání jiných způsobů znázorňování, které mají charakter řady. Přechod k jiné logice počítání se tu odehrál pod vlivem jiných než prstových modelů a v jeho důsledku je transformován i způsob používání prstů. V některých případech však k tomu nedochází, a právě na tuto variantu počítání na prstech, kdy jejich používání zůstává neovlivněno jinými způsoby znázorňování, se zde zaměříme.[13]

Výchozím místem problémů s prsty je prstové vyjádření počtů větších než 5, tedy přesahujících jednu ruku. V rámci jedné ruky má sice načítání počtu charakter rozvíjení řady, ale prakticky není potřebné - malé počty jsou brzy postřehovány naráz a mají tak spíše charakter různých prstových figur pro různá čísla. Při přechodu k vyšším počtům není nejednoznačnost prstových vyjádření tak velká, jak by se mohlo na první pohled zdát. Čistě

[13] Bylo by samozřejmě velmi zajímavé zkoumat příčiny toho, ale přesahuje to naše možnosti v této práci. Máme za to, že nemusí být jen tak zjevné, jako např. neobratnost v manipulaci předměty, která byla patrná u jedné z holčiček, u kterých prstový způsob počítání přetrvával. Není vyloučeno, že mohou sahat velmi hluboko do strukturace individuální ontogeneze.

kombinatoricky poskytuje sice použití prstů obou rukou pro vyjádření každého počtu řadu možností, ve skutečnosti jsou však limitovány tím, že je tu zpočátku nutné spočítání.

Pro zjednodušení dalšího popisu předpokládejme, že dítě má při počítání ruce obráceny dlaněmi ke svému obličeji a načítání počtů zahajuje na levé ruce. Už v této poloze, která je podle našich zkušeností nejobvyklejší, se odráží nikoli nepodstatná zvláštnost prstů jako nástroje. To, že jsou součástí těla, podrobuje jejich používání anatomickým souvislostem. Při spontánním používání jsou tedy používány tak, jak je to nejpřirozenější, nejpohodlnější či nejergonomičtější. Při postupném načítání postupuje proto dítě od palce. Na levé ruce to znamená směr zleva doprava (jak je to obvyklé i na počítadle či při grafickém znázornění), avšak na pravé ruce pak načítání pokračuje ze stejného důvodu směrem opačným. Prsty tedy nevytvářejí už při pouhém načítání většího počtu jednoznačnou řadu. Vytvářejí spíše zvláštní zobrazovací systém. Ve chvíli, kdy se zaplní levá ruka, stává se pouhou značkou první pětky, značkou, která je však obsažena v samotném přechodu na pravou ruku, do druhé pětky této názorné pětkové soustavy. Samo použití pravé ruky (i bez přítomnosti prstů levé ruky) tedy určuje obor, v němž se momentálně pohybuje, a počet prstů pak číslo. Směry pohybu (ve smyslu doprava/doleva) při načítání v první a druhé pětce jsou tak na sobě nezávislé - resp. pohyb subjektivně nenese význam směru, nemá vektorový charakter. Subjektivně má jen význam přidávání, zvětšování počtu.

Ani počítání příkladů a jmenovitě odčítání nevytváří z prstového systému řadu. Oproti sčítání vyžaduje odčítání jen obrácené pořadí rukou: Pohyb (ubírání) je zahajován na té ruce, která v pětkové prstové soustavě indikuje počet jednotek. Avšak v rámci této ruky se nemusí pohyby realizující ubírání dít směrem opačným než by probíhalo přidávání, naopak spíše bude (jako skrčování vztyčených prstů) zahájeno znovu od anatomicky výhodnějšího palce, který navíc může přidržovat další ohýbané prsty (jejichž pohyb nemusí být ještě dostatečně diferencován). Počítání na prstech tedy vytváří zvláštní uspořádání pohybu, v němž inverzní směr sčítání a odčítání, který je charakteristický pro řadu, platí pouze pro přechod z jedné ruky na druhou. Naproti tomu směr přidávání a ubírání v rámci jedné ruky je naopak nejčastěji shodný.

Jakým způsobem se děje přechod mezi rukama? Dochází tu k rozkladu přidávaného či ubíraného počtu: výchozí počet → načítání přidávaného počtu po jedné až po dosažení plné levé ruky → dokončení načítaného přidávaného počtu na pravé ruce → "odezření" výsledku. Je patrné, že už tento způsob přináší zrychlení oproti spočítání předmětů, vyplývající z okamžitého postřehování počtu prstů. Snadnost tohoto postřehování vyplývá už ze zkráceného spočítání počtů přesahujících pětku. Jakékoli spočítání je navíc brzy zbytečné v důsledku diferenciace kinestetických vjemů, které doprovázejí pohyby prstů. Jejich prostřednictvím se zřejmě prstové figury vyvíjejí v jakési individuální prstové znaky, které mohou být čteny bez zrakového zprostředkování.

Plně rozvinuté načítání přidávaného/ubíraného počtu znamená při jmenování číselné řady od jedné zároveň po jednom vztyčovat/skrčovat prsty tak, aby bylo dosaženo plné/prázdné ruky. Poté se pokračuje v načítání na druhé ruce. Avšak první fáze se patrně velmi rychle zkracuje do podoby, kdy dítě umí dosáhnout pětky (tedy plné levé ruky při sčítání či prázdné pravé ruky při odčítání) naráz: snadnost toho je při sčítání dána dosavadní zběhlostí v počítání "do pěti", které navíc představuje pouze 4 varianty. Při odčítání zase samotný počet prstů na ruce, na níž se zahajuje ubírání, říká, kolik je třeba v prvním kroku ubrat. Dítě tak může začít načítat přidávaný/ubíraný počet rovnou od tohoto počtu-čísla: teprve od něj jmenovat po jedné číselnou řadu a zároveň už vztyčovat/ohýbat po jednom prsty na druhé ruce.

Tento zkrácený postup však skýtá možnosti chyb. První číslo, jímž zahajuje dítě načítání, není totiž ještě číslem z druhé ruky, jím je teprve dosažena hranice ruky první (plná/prázdná ruka). Pokud se zároveň se jmenováním příslušného čísla vztyčí/ohne už první prst na druhé ruce, dospívá dítě dalším načítáním k chybnému výsledku. Ten se zvenku jeví jako "chyba o jednu": výsledek je o jednu větší při sčítání a o jednu menší při odčítání. Mohli bychom to popsat jako prodloužení operátora o 1 krok, avšak s vědomím, že je to popis objektivistický, že totiž subjektivně o operátora ani jeho operační prekoncept právě dosud nejde - nanejvýš o jeho jakýsi prstový předobraz, který se v něj ovšem nemusí nijak nutně vyvinout.

Druhý typ chyb, ke kterému zde dochází, se ve své většině jeví na první pohled úplně stejně: jsou to také chyby "o jednu". Při bližším zkoumání zjišťujeme, že jsou jakýmsi opakem: Přidávání/ubírání jako by bylo o jednu zkráceno, takže výsledek je při sčítání o jednu menší a při odčítání o jednu větší než správný výsledek. Ve skutečnosti není logika takové chyby při počítání na prstech přímým opakem. Jde o to, že dítě zamění při prvním kroku počet, jímž se dostává na plnou/prázdnou ruku, za jeho "doplněk do pěti". Tam, kde je pak takto zaměněn počet 2 za počet 3, zkrátí se další načítání. (Naopak opačná záměna je pak ve svém výsledku nerozeznatelná od chyby prvního typu.) Ještě bizarněji by působila záměna počtu 1 za počet 4.[14]

Další vývoj prstového počítání vede patrně k tomu, že se i původně načítaný počet po přechodu na druhou ruku vyjadřuje okamžitě. Opakovaným řešením příkladů na prstech se pak, jak se domníváme, pohyby prstů postupně uvolňují od zrakové kontroly. V první fázi není už taková kontrola nutná, protože prsty a jejich pohyby jsou dostatečně diferencovány, aby byly správně "cítěny". V další fázi pak už není zraková kontrola vůbec možná - prstové figury a přechody mezi nimi se svinují do pouhých náznaků vztyčování a skrčování, jejichž struktura probíhá mimo vědomou kontrolu dítěte. Vyvíjí se jakési **specificky prstové** počítání.

27.4.95:

Počítání s Leonou: *Prsty nebo počítadlo je jedno, ale počítadlo je lepší.*[15] *Bez prstů jí to trvá déle - potřebuje prsty náznakově - i dneska prý vyhrála soutěž s počítáním na prstech, ale učitelka to nesměla vidět.*	*Leona prsty nenarovnává, jen je skrčené lehkým pohybem odliší. Dá se to klidně přehlédnout. Řekla mi, že když paní učitelka stojí u její lavice, schová ruce pod lavici. Bez prstů by jí to trvalo moc dlouho a oni musí rychle (hlavně při pětiminutovkách). Kdyby ji dnes paní učitelka viděla, že počítá při soutěži s prsty, tak by bonbón nedostala.*
Když se nedívá na prsty, neví, jak to dělá. Něco už zná zpaměti. (19-3 s rukama za zády spočítala dost rychle a prsty prý nepotřebovala.) *Na prstech umí i do 20, protože je to "hodně podobný".*	*"Zpaměti" je její výraz, vysvětlila tím právě to, jak spočítala 19-3 bez prstů. Ptal jsem se jí na příklady, které už zná zpaměti nebo které jsou pro ni lehčí, ale vzpomněla si jen na "sto plus sto" a "dvěstě plus dvěstě" (tady tvrdila, že je to třista).*

V nejvyvinutější podobě prstového počítání pak zřejmě každá velikost přidávaného/ubíraného počtu přesahující 5 vyvolá ve spojení s výchozím počtem - prostřednictvím reflexního pohybu prstů - korespondující prstové vyjádření na druhé ruce, které je dítětem "cítěno" jako výsledek. Při počítání v oboru do 10 se to týká těchto příkladů:

$\boxed{1+5}$ 2+4 3+3 4+2

[14] Poznamenejme, že zmenšení přidávaného/ubíraného počtu o jednu je chybou typickou spíše pro další fázi vývoje počítání, v níž však změna logiky příkladu přináší i změnu v používání prstů.

[15] Na otázku, proč je pro ni počítadlo lepší, tu nemáme odpověď. Je to proto, že ho preferuje učitelka, a tvrzení je tedy přihlášením k sociálně desirabilnějšímu způsobu počítání? Nebo proto, že počítadlo je lépe strukturováno a dává možnost lepší kontroly počtu, zvláště teď, kdy počítá také v oboru 11-20 a prstová vyjádření tak nabývají na nejednoznačnosti? Počítadlo samo přitom ještě nemusí znamenat přechod k počítání ve fixní řadě - může být chápáno jako zásobník kuliček uzpůsobený právě pro přidávání/ubírání.

1+6	2+5	3+4	4+3	6-2	7-3	8-4	9-5
1+7	2+6	3+5	4+4	6-3	7-4	8-5	9-6
1+8	2+7	3+6	4+5	6-4	7-5	8-6	9-7
1+9	2+8	3+7	4+6	6-5	7-6	8-7	9-8

Rychlé počítání do 10 by pak vyžadovalo 36 figur prstových rozkladů, z nichž ovšem 20 odpovídá příkladům do 5 (z nich pak 8 jsou figury rozkladů plné ruky, které se zdají mít chartakter "dobrého tvaru", jímž se vyznačují lehké příklady.) Snadné příklady jsou patrně rychle nahrazovány zapamatováním korespodující symbolické formy (příkladu jako "říkanky"), které činí použití prstů zbytečným.

V určitém období mohou děti se specificky prstovým počítáním patřit k nejrychlejším počtářům ve třídě. V čem je tedy problém?

Zrychlené vyjádření počtů příkladu prostřednictvím prstových vyjádření děti samozřejmě využívají i tehdy, když se prsty stávají zobrazením analogickým řadě. V tom případě však jednotlivé počty a přechod mezi nimi zůstávají kontrolovány a reflektovány právě prostřednictvím této analogie. Naproti tomu při zrychlování řešení příkladů prostřednictvím vývoje specificky prstového počítání dochází patrně k něčemu jinému. Jakkoli jsme zvnějšku mohli rozklady při přechodu mezi rukama popsat jako jakousi analogii přechodu přes desítku (který bude předmětem našeho zájmu později) a vyjádřit je případně i symbolickým zápisem, spočívá zásadní rozdíl patrně právě v tom, že pro děti tu se zrychlováním prstového počítání mizí zřetelný paralelismus dvou forem zobrazení, který by byl v každé své dílčí korespondenci exteriorizován a objektivizován ne-li sociálně kontrolovanou praxí symbolického zápisu, pak alespoň formou diskursu, řeči o tomto paralelismu. Chybí tu **řeč o tom, co vlastně prsty dělají**.

Pokud jsme tedy zkoumání způsobů počítání na prstech začali u otázky, zda je důraz učitelky na přechod od prstů k počítadlu opodstatněný, vystupuje zde jeden zásadní rozdíl. Znázornění na počítadle s jeho prestrukturací a pravidly použití má mnohem blíže ke grafickému znázornění. Předností grafického záznamu však patrně není jen sama možnost zrakové evidence struktury provedené operace. Předností toho, co podléhá zrakové evidenci, je právě skutečnost, že je to přístupné druhým, vytváří to společně sdílenou realitu a jako takové to vstupuje - prostřednictvím ukazování, zobrazování a označování - do komunikace s nimi. V této komunikaci se tedy nutně vytváří paralelní systém označování komunikované reality. Tento systém však není libovolný a individuální, nýbrž je vůči dítěti apriorní a kulturně závazný. V důsledku jeho používání je pak označování komunikované reality podrobeno pravidlům komunikace, která se jeví především jako pravidla používání jazyka - vypracovaných pojmů a způsobů jejich spojování - a tak se druhý prostřednictvím nástroje komunikace (především pak jazyka) stává součástí psychického aparátu, který pak stále kontroluje a koriguje pravidla použití nástroje.

Naproti tomu rychlé spočítání příkladu na prstech je jakýmsi behaviorálním výrazem matematické operace. Ten by se teoreticky mohl stát výrazem sociálně sdíleným a případně i kulturně závazným podobně jako je tomu u znakové řeči neslyšících. Avšak v normální škole by šlo o systém, který dubluje tradiční kulturní systémy zobrazování a proto se jeho kultivace, vypracování pravidel použití a pojmů k označování prstových číselných figur a pohybů jeví jako zbytečný. Protože je tedy některými dětmi vyvinut jako systém individuální, nemá závazná pravidla použití, je nejednoznačný, má komponenty nepodléhající zrakové evidenci a tedy ani kontrole druhého. Chybění prostředků sociálního diskursu činí při zrychleném počítání korespondenci jednotlivých kroků s příkladem a tedy i celkovou strukturu prstové operace nezřetelnou i pro dítě samo, kontrolovány jsou pouze výsledky - dobře/špatně.

Tak použití prstů posouvá počítání mimo vědomou kontrolu - a mimo vědomou kontrolu i kontrolu učitelky se zřejmě dostávají také strukturace, které tam probíhají.

Ale to samo by ještě nemuselo vadit, pokud by šlo o dočasnou, přechodnou fázi vývoje počítání. Problém však spočívá v tom, že se tak počítání dostává na cestu, která patrně velmi ztěžuje možnost využití kulturních nástrojů počítání, protože brání dalšímu vývoji chápání příkladu jako výrazu vztahů v symbolickém systému - systému čísel. Fixuje totiž nepříznakovost operací v imaginárním registru, a to v takové formě, která znemožňuje grafizaci.[16]

Souvislosti mezi příklady

Nyní budeme charakterizovat druhý způsob, jímž děti reagují na nárůst množství příkladů. Představuje do jisté míry další linii, jíž se děje vývoj počítání. Nejde přitom o linii alternativní, nýprž souběžnou s vývojem způsobů řešení jednotlivého příkladu. Mohli bychom ji označit jako vývoj chápání vztahů mezi různými příklady.

Jak vznikají a jak vypadají číselné struktury, vyjadřující vztahy mezi čísly, které se utvářejí v první třídě? Vraťme se znovu k oné typické úloze z učebnice. Do znázornění rohlíků obloučky byl zaveden rozdíl mezi původními a koupenými rohlíky, jejich rozlišení. To samo už zavádí strukturu. Celkový (výsledný) počet je strukturován jako sklad dvou částí, dílčích počtů.

Argumentovali jsme výše, že zatímco u sčítání je možné zavést vnitřní strukturaci celku (ale pro zjištění výsledku to není nutné), při odčítání je to nutné.

Ukázali jsme také, že pro danou chvíli funguje struktura znázornění jako paralela struktury numerického zápisu. Právě korespondence názorného vyjádření a symbolického zápisu, vytváří logiku **triadické struktury číselných symbolů**, které explicitně figurují už v příkladu jako říkance.

Děti se od počátku "učí příklady" jako jakési triády symbolů, které patří - za určitého předpokladu - k sobě. Tyto triády jsou zpočátku jakoby prázdné symbolické formy, které jsou naplňovány významem prostřednictvím korespondencí se zobrazeními v paralelních názorných vyjádřeních.

Každé nové číslo bylo, kromě definování prostřednictvím korespondence s názorným počtem, vyvozeno také jako součet jiných čísel. V učebnici je prezentováno jako součet všech možných dvojic čísel menších (paralelně s příslušným znázorněním odpovídajících skladů počtů). Každé číslo se tak stává možným skladem jiných dvou čísel. Všechna čísla se kromě toho stávají - v příkladech na odčítání - také účastníky rozkladů.

Ukázali jsme, jak původní logika symbolického počítání (počítání s číselnými symboly) je vlastně odkazem ke zrakové evidenci operací s názorně vyjádřeným množstvím a k výsledkům těchto operací. Korespondence symbolického a názorného zobrazení je zpočátku kontrolována v každém článku symbolického zápisu, takže jsme mohli pozorovat nejen procvičování korespondencí mezi jednotlivými počty a čísly, ale také procvičování korespondencí jednotlivých operací.

Ustavení prvotní logiky příkladů pak vede k tomu, že symbolicky zapsané či řečené příklady už nejsou pouhou říkankou či slepou manipulací s neznámými slovy, nýbrž jsou

[16] Pokud bychom tedy vyhrotili původní otázku do podoby, zda učitelka má počítání na prstech podporovat, tolerovat či zakazovat, odpověď by mohla znít: Je třeba ho podporovat, aby ho bylo možno poté zrušit. Učitelka by měla počítání na prstech zviditelnit, učinit ho předmětem diskursu, aby mohla kontrolovat přechod k důslednému používání prstů jako řady. Při použití prstů jako každé jiné řady zůstává cesta k číselné řadě otevřená; zrychlené, ale kontrolované manipulace prstů jsou možná dokonce výhodné.

chápány jako pohyb v systému zobrazení, který může být kdykoli převeden na reálné manipulace s předměty - dítě umí příklad vysvětlit = ukázat.

V logice příkladu jako "skladu či rozkladu" pak dvě menší čísla-počty skládají třetí, vcházejí do něj, tvoří jeho součást jako výsledku (pokud sčítáme) nebo lze toto číslo rozložit, jedno z něj ubrat - výsledkem je zbývající číslo struktury. Tak se v dalším vývoji postupně význam každého čísla vnitřně strukturuje jako průsečík všech možných triadických struktur skladů a rozkladů, jichž je potenciálním účastníkem.

Triáda je tušením či vědomím souvislosti čísel. Vztah dvou čísel vyjádřený třetím konstituuje triádu - tři čísla, která nějak patří dohromady. Pro děti tato souvislost vystupuje jako příklad. Zatímco první linie, kterou jsme zkoumali, představovala vývoj logiky konstrukce jednotlivé triády, je druhá linie vývojem chápání souvislostí příkladů - jejich podobností a odlišností. Vědomí podobnosti a odlišnosti příkladů se stejnými čísly postupně konstituuje číselnou triádu stále úplněji. Původně nesouvisející příklady se stávají dílčími případy téže obecnější struktury.

1. Komutativnost částí

Chápání logiky příkladu na sčítání jako skladu dvou počtů koresponduje s tím, že nezáleží na jejich pořadí v příkladu. Pro děti není komutativnost sčítanců objevem, je spíše logickým důsledkem počítání jako operací s názornými počty, kde pořadí částí při spočítání dohromady nehraje roli. Když se pak děti učí o komutativnosti sčítání, představuje pro ně tento fenomén něco tak samozřejmého, že spíše nechápou, proč je to postulováno jako učební obsah.

Objev tohoto stadia by se dal formulovat "na pořadí nezáleží" - pokud ovšem vůbec otázka pořadí při skladu vůbec vznikne.

Pochopení komutativnosti částí se však vztahuje i na rozklad. Argumentovali jsme, že je to právě grafické znázornění odčítání, které nutně vnáší do struktury rozlišení celku a částí. Zaměnitelnost částí však má u příkladů na odčítání jinou podobu než u příkladu na sčítání. Pouhé obrácení pořadí prvních dvou členů před rovnítkem tu není přípustné - při takové mechanické analogii se sčítáním, bez pochopení logiky částí a celku, dochází k chybě. Tato chyba má podobu odčítání většího čísla od menšího. Pokud tedy při sčítání jako skladu nedošlo k vývoji strukturace na "části - celek", pak odčítání si ji v podobě rozlišení menších a větších čísel vynucuje. Chyba upozorňuje na rozklad jako na něco odlišného, kde právě obrácení pořadí členů před rovnítkem by porušovalo logiku celku a částí: nemůžeme sníst víc rohlíků, než jich na počátku máme, než položíme na začátek příkladu. Chceme-li ubírat, musíme od většího čísla menší.

Nechce-li dítě stejnou chybu opakovat, musí tuto logiku respektovat: Musí triádu čísel rozčlenit na dvě menší a jedno větší, přičemž shodnost menších spočívá pak u rozkladu v tom, že kterékoli z nich může být odečteno od většího. Posun od komutativnosti skladu spočívá v přeskupení členů: zatímco při skladu je příklad dán tak, že "větší číslo" je výsledkem = konečným členem příkladu, při rozkladu je "větší číslo" na začátku. Objev této fáze, který by mohl znít "u odčítání na pořadí záleží", přesouvá akcent na pořadí čísel ve znění příkladů.

Komutativnost částí pak pro dítě vystupuje

- buď jako podobnost příkladů na sčítání: a+b=c <=> b+a = c (5+3=8<=>5+3=8)
- nebo jako podobnost příkladů na odčítání: c-a=b <=> c-b = a (8-5=3<=>8-3=5)

2. Nezaměnitelnost inverzních triád

Předchozí dvě ekvivalence vedou občas k chybě zdánlivé analogie. Když se totiž nový objev významu pořadí čísel uplatní nediferencovaně, pak analogické pořadí čísel v příkladu (vytvářející zdánlivě shodnou číselnou strukturu) jako kritérium podobnosti příkladů může vést k mylné extrapolaci, která sčítání a odčítání týchž dvou čísel zamění za shodné příklady: a + b (= c) <=> a - b (= c). Je- li shodné pořadí, jsou shodné i příklady. Třetí číslo je doplněním prvních dvou do téže triády bez ohledu na znaménko operace. Tak může být příklad 5-3 doplněn výsledkem 8 na základě analogie s příkladem 5+3=8. Ještě pravděpodobnější však je případ opačný: 5+3=2, protože 5-3=2. Bere-li dítě zadaná čísla - konzistentně s objevenou nutností odlišit takové pořadí čísel, které je z hlediska odčítání přípustné - jako čísla, která lze odčítat, pak odčitatelnost jako možnost může ztotožnit s odčítáním. To, co tu vypadá jako záměna inverzních operací sčítání a odčítání, je ve skutečnosti jejich zanedbáním.

V další fázi (souběžné s logikou příkladu jako prodlužování/zkracování řady) dochází k diferenciaci těchto zdánlivě podobných příkladů jako protikladných, které nesmějí být zaměňovány. Mohli bychom poukázat na vliv souběžné linie počítání jednotlivých příkladů a na to, jak právě chápání příkladu jako buď prodlužování či zkracování původní řady vede k diferenciaci sčítání a odčítání, k důrazu na znaménko. Chceme zde však ukázat relativní samostatnost vývoje chápání podobnosti příkladů, která může i předbíhat vývoj počítání. Dítě dospívá k objevu "příklady mohou být podobné, ale sčítání a odčítání nelze plést dohromady", protože výsledkem jsou zcela různá čísla. Poté už bude hledat řešení příkladů na sčítání pouze v analogii s příklady na sčítání a podobně tomu bude s odčítáním.

3. Podobnost sčítání a odčítání

Dalším stupněm vývoje analogií příkladů už předstihujeme ta stadia počítání, která jsme výše popsali. Pokusíme se zde nastínit, jak se vyvíjí chápání podobnosti příkladů, a korespondující stadia počítání popíšeme později.

Pokud tedy zůstaneme u snahy abstrahovat od vlivu logiky příkladu, je dalším stupněm sledované linie objev podobnosti příkladů na sčítání a odčítání: ty jsou strukturálně shodné, když obrátíme pořadí čísel: a + b = c <=> c - b = a (5+3=8 <=> 8-3=5) . Tato ekvivalence vytváří triádu ve formě dvou krajních čísel, která obě mohou být učiněna východiskem příkladu, aniž by se číslo mezi nimi změnilo. Matematická operace +/- pak souvisí s tím, je-li východiskem příkladu menší nebo větší z krajních čísel. Zdá se, že dvojice ekvivalentních příkladů tak nutně konstituuje matematickou operaci jako přechod mezi dvěma čísly a také směrovost této operace.

To je struktura odlišná od předchozích, kde záměna pořadí vycházela z rozlišení dvou menších čísel oproti většímu. Tady dochází k restrukturaci na "krajní čísla" a "číslo mezi", před kterým se konzistentně s pořadím krajních čísel mění znaménko. Uvidíme později, že to koresponduje s chápáním příkladu jako přechodu mezi dvěma adresami prostřednictvím operátora.

4. Úplná strukturace triády

Hypoteticky by chyba, vycházející z objevené podobnosti sčítání a odčítání, mohla mít podobu toho, že pod vlivem rozlišení na "čísla na kraji" a "číslo mezi" přestane být rozlišováno mezi větším číslem a čísly menšími. Zkušenost, že při záměně vzájemného obsazení menších čísel ekvivalence platí (a + b = c <=> c - a = b), by mohla vést k zanedbání podmínky, za níž lze v triádě týchž čísel zaměnit postavení čísla "mezi" a čísla krajního. Je-li do postavení čísla "mezi" obsazeno největší číslo triády, dochází k chybě. Největší číslo může být pouze na kraji příkladu.

Pokud chyby a-c=b, b-c=a vyloučíme jako málo pravděpodobné, protože by šlo o odčítání většího čísla od menšího, je jedinou pravděpodobnou chybou záměna a+c=b (za předpokladu a<b), kde příklad má podobu přechodu od menšího čísla k většímu prostřednictvím sčítání, a pouze velikost přičítaného čísla neodpovídá. Ve skutečnosti se ovšem ani tato chyba nezdá pravděpodobná.

Jedním z důvodů je to, že z hlediska úrovně, na níž se v tu chvíli dítě pohybuje, jsou vlastně ostatní záměny postavení "na kraji" a "mezi" stejnou chybou. Jestliže nová artikulace rozdílů mezi členy triády ("na kraji/mezi" a "menší krajní/větší krajní") překryla roli dřívějšího rozlišení na největší číslo triády a dvě menší, bude nejspíše analogie příkladů vycházející z komutativnosti částí dočasně zapomenuta, nebude používána. Bude používána jen jako mechanické pravidlo o možné záměně sčítanců, které bylo explicitně formulováno a procvičováno.

Teprve diferenciací případů, za jakých podmínek může dojít k záměně krajního a středního postavení, je vlastně uskutečněna syntéza obou předchozích forem podobnosti, integrace dřívějšího rozlišení největší/menší čísla do novějšího členění "na kraji/mezi". Největší číslo může být pouze na začátku nebo na konci, tedy na kraji, postavení ostatních čísel se může měnit. Dítěti se stává dostupnou podobnost příkladů a+b=c <=> c-a=b (5+3=8 <=> 8-5=3), která je zároveň přesně odlišena od všech zdánlivých podobností vedoucích k chybám. Triadická strukturace je tu dokončena jako totalita všech možných vztahů tří čísel, které korespondují se vztahy sčítání a odčítání.

DALŠÍ VÝVOJ POČÍTÁNÍ PŘÍKLADŮ

Od změn řady k pohybu ve fixní řadě

Opakované počítání jako hledání výsledku prodlužováním či zkracováním výchozího počtu uspořádaného v řadě prostřednictvím operátora vytváří anticipaci výsledku jako bodu, jehož je dosaženo prostřednictvím operátora. Tento bod začíná pro dítě existovat jako možnost ještě před jeho dosažením. Dítě prostě ví, že někde vpravo nebo vlevo od výchozího bodu najde bod, který bude výsledkem. Řada předmětů či názorných zobrazení, jichž se používá ke znázorňování počtů, se už nevytváří díky znázorňování, ale je tu přítomna už před ním. Věcným výrazem takové trvající, fixní řady používané ke znázorňování, je počítadlo. Vypočítání příkladu se stává nalezením bodu trvale existující řady.

Můžeme uvažovat o tom, nakolik je tento posun efektem užívaného nástroje. Jakmile se totiž manipulace s počty mění v jejich uspořádávání a přeskupování v řadě, vyžaduje opakované počítání stále znovu rovnat předměty do řady nebo kreslit stále znovu řadu. Je tedy výhodné mít k dispozici nástroj v podobné stálé pevné řady. Tímto nástrojem je pro děti počítadlo nebo prsty, používané však jako "rychlé počítadlo" - tedy jako trvalá fixní řada. Některé děti pak dokonce počítají s pomocí vztyčených nepohybujících se prstů, po kterých se pohybují pohledem nebo si ukazují nosem či bradou.

23.2.95:

Příklady na papíru: Sleduju Romanku - nejdřív ani náznak počítání na prstech, jen si říká části příkladů potichu. Ale pak přece jen prsty pracují: ale jen je natáhne a dívá se na ně, pohyby prstů jsou malé, nezřetelné. Počítá dost dlouho.	*Romanka dokončuje daleko až v druhé polovině dětí, spousta z nich už má opraveno od učitelky, když ona končí. Bohužel nevím, na kterém příkladu začala používat prsty.*

Mění se ovšem i chápání příkladu. Předchozí strukturaci měnící se řady (přidávání/ubírání) odpovídá jakoby struktura tří vektorů, z nichž první vzniká načtením výchozího počtu, druhý velikosti přidávaného/ubíraného počtu načítaného od konce prvního vektoru a třetí pak je výslednicí souhlasně (při sčítání) či opačně (při odčítání) složených vektorů.

Naproti tomu v nové strukturaci mají výchozí počet i výsledek podobu bodů - adres a přidávaný/ubíraný počet - operátor podobu pohybu, přechodu mezi nimi.

Přechod od počítání ve "vektorové soustavě" (přesněji: posloupnosti tří vektorů) je ovšem postupný. Už v rámci "přidávání/ubírání" se načtení výchozího počtu postupně stává jen předběžnou operací, která není samotným počítáním, nýbrž přípravným postupem. Podobně se později stává pomocný postup i z následného spočítání výsledného počtu.

Subjektivní těžiště počítání - reprezentace matematické operace samé - spočívá v načítání operátora.

Reprezentace matematické operace jako pohybu v názorné řadě má tedy dvě formy: přidávání a ubírání řady (kde se pohybuje, mění sama řada) a pohyb subjektu (ukazovatele) po pevné, v zásadě nekončící řadě (nebo končící na hranici oboru, v němž počítáme). Sama vývojová posloupnost těchto dvou způsobů není v celkovém pohybu přibližování názorných operací operacím v číselné řadě možná nijak nepodstatným momentem. Vezmeme-li totiž fixní řadu a přechody mezi jejími body jako reprezentaci příkladu rovnou (a nikoli jako negaci či překonání předchozího stadia), má operátor podobu "počtu mezi" východiskem a cílem. To ovšem vede k problémům uzavřenosti a otevřenosti onoho intervalu "mezi", k problémům se zahrnutím či nezahrnutím adres jako součásti intervalu.[17]

Tyto problémy sice reálně u dětí vznikají a vedou k chybám "o jednu", ale mají dočasný charakter - k diferenciaci dochází prostřednictvím chyb poměrně rychle a spontánně. Je z toho patrné, že tento problém nenabývá povahy trvalého problému rozdílného počtu bodů a intervalů mezi nimi, který by musel nastat, kdyby se nejasnosti zobrazení pohybu v řadě neřešily korespondencí s přidáváním a ubíráním. Takto se problém velikosti operátora řeší zcela spontánně jako velikost polootevřeného intervalu mezi počáteční a konečnou adresou (se zahrnutím výsledné adresy jako posledního kroku operátora), aniž vůbec nabyl té povahy, jakou má pro dospělé.

Pohyb v číselné řadě

Poslední formou počítání, v níž je operátor vyjádřen jako pohyb, je počítání v číselné řadě Přechod k němu dobře vyjadřuje změna ve způsobu používání prstů. Původní postup, vycházející ještě z přidávání/ubírání, je tento: Dítě nastaví výchozí počet, pak jmenuje verbálně číselnou řadu až po velikost operátora a současně přidává/ubírá po jednom prsty. Načítání velikosti operátora se tedy děje v číselné řadě, přičemž je jen oporou (kontrolou) pohybu na prstech (v názorné řadě). Při důsledném použití prstů jako pevné řady se tato forma změní jen v tom, že operace jako pohyb na prstech se děje posunem ukazovatele. Tedy při příkladu 3+4 verbálně: "jedna - dva - tři - čtyři", souběžně na prstech: "| | | | - | | | | | - | | | | | | - | | | | | | |".

Naproti tomu v pozdějším využití prstů zjišťujeme jinou distribuci. Na prstech je od jedné načítána velikost operátora a paralelně s tím se jmenuje úsek číselné řady od výchozí ke konečné adrese. Tedy při příkladu 3+4 verbálně: "čtyři - pět - šest - sedum", na prstech - "| - | | - | | | - | | | |".

Těžiště operace se přesouvá do pohybu v číselné řadě, kdežto prsty jsou jen pomocným nástrojem kontroly velikosti pohybu.

V číselné řadě pak mají všechny body, jimiž pohyb počítání prochází, okamžitě svou číselnou hodnotu - explicitní paralelismus imaginární a číselné řady (manipulace s počty a jejich označování) se omezuje na vyjádření operátora, i v něm se však mění těžiště.

Příklad, na kterém tu odlišný způsob počítání demonstrujeme, však není typický. Tlak na změnu počítání se totiž vytváří přechodem k počítání s vyššími čísly, v oboru 11-20. Výchozí i konečná adresa je už tak vysoká, že setrvávat při jejich reprezentaci prostřednictvím názorného počtu znamená i při zrychleném spočítání přílišnou ztrátu času a přílišné riziko chyb. Takový postup vyžaduje projít, byť třeba zrychleně, celou vzdálenost východiska

[17] Tento problém motá hlavu i dospělým, jak je patrné z některých experimentů, o nichž referuje Hejný (1990, s.62-65).

příkladu od počátku řady, a totéž pro výsledek. Má-li v tu chvíli dítě už představu (koncept) trvalé, fixní řady, pak je jen otázkou času a objevení technických prostředků, kdy začne považovat zdvojení názorné a číselné řady za zbytečné. Nedomníváme se přitom, že paralelismus zmizí. Zmizí jeho explicitní podoba a změní se modus operandi - dítě začíná operovat v symbolické řadě, a ta tím nabývá univerzálního významu obecné reprezentace jakékoli názorné řady předmětů určených k matematickým operacím.

Přechod od explicitního k implicitního paralelismu však v určitém smyslu zmizením názorné řady je - totiž ve smyslu technickém, jako technického prostředku. Se změnou logiky počítání příkladu koresponduje změna techniky, v níž názorné řadě postupně připadá stále okrajovější úloha. Změna techniky počítání však nepřichází sama od sebe. I když nejsou v tomto směru vyloučeny individuální objevy dětí, významnou roli v tom přisuzujeme používání řady tvořené kartičkami s čísly. Tak by přechod k počítání jako pohybu v číselné řadě mohl být zjednodušeně charakterizován jako přechod od počítání na počítadle k počítání v řadě kartiček.

Práce s řadou, kde místo kuliček jsou rozmístěny kartičky s čísly, s tímto "počítadlem z kartiček", je možná zásadním typem zobrazení. Dvojitost názorné a číselné řady se v ní převádí na řadu jedinou, v níž kartičky mají zároveň jak názornou povahu spočitatelných kusů tak symbolickou povahu čísel. Názorná spočitatelnost (jako možnost) kartiček zůstává, ale spočítání (jako nutnost operace v názorné řadě) mizí, protože jeho výsledek je vyjádřen rovnou symbolicky, bez nutnosti přiřazování spočítáním.

Každý příklad se zde zobrazuje jako operace s názorným počtem, ale každý počet a jeho změna je současně okamžitě a sám sebou zobrazen symbolicky. Korespondence symbolických a názorných operací nabývá touto okamžitostí charakteru evidence a jiné než symbolické zobrazení adres se stává zbytečným. Zároveň si taková řada vyžaduje tu techniku počítání, kterou jsme popsali výše: operátor je zobrazen jako názorný počet kartiček, ale zároveň všechny tyto kartičky referují okamžitě o číselné adrese okamžitého místa průchodu.[18]

Zároveň tu lze také uvažovat o odpovědi na otázku, proč podobnou roli nehraje práce s číselnou osou, při níž byly děti často zmateny. Klíčovým nedostatkem číselné osy je patrně její nediskrétnost - postrádá diskrétnost kartiček jako kusů a tím i jejich spočitatelnost. Zobrazení příkladu na číselné ose znesnadňuje a komplikuje přechody mezi číslem jako adresou a číslem jako počtem, samozřejmost jejich korespondence. Zavádí totiž nutně dvojakost bodů a intervalů.

Dítě si najde první sčítanec (menšenec) jako číselnou adresu - ale co dál? Operátora potřebuje v názorně načitatelné podobě - ale číselná osa to umožňuje jen za předpokladu, který je pro děti nepřirozený: místo s kusy se musí operovat s dílky jako jednotkami nediskrétního množství, které navíc jsou vůči číslům umístěny excentricky (jako intervaly mezi nimi), takže korespondence jejich načítání s pohybem v číselné řadě je nezřetelná. Dílky nemají charakter kusu - mohou tak sice být definovány, ale pak je to definice zavedená shora, která dětem věci komplikuje. Subjektivně dílky nemají povahu té jednotky, která je v této fázi vývoje pro děti samozřejmá, nepříznaková. Hranice počítaného objektu jsou tu definovány v rozporu s celou dosavadní zkušeností a samotná redefinice hranic představuje problém sui generis, který bude muset teprve být vysvětlen (a vyžádá si změnu chápání, restrukturaci pojmu množství). Nemůže tedy sám sloužit jako základ chápání dosud nesamozřejmých vztahů.

[18] To by také vysvětlovalo, proč nám jedna zkušená učitelka mohla vyprávět o tom, že se jí velmi osvědčilo, když ve třídě nad tabuli zavěsila řadu čísel do dvaceti na kartách.

Počítání jako doplňování symbolických triád

Vývoj strukturace příkladu můžeme popsat také jako postupný přechod jednotlivých kroků původní posloupné procedury, které se původně odehrávaly v explicitním paralelismu názorného a symbolického zobrazení, k čistě symbolickému vyjádření, v němž jsou však korespondujcí operace s názornými počty obsaženy implicitně, jako možnost - která může být vyjádřena buď jako ilustrace nebo jako opora, když se v symbolickém zobrazení dostává dítě do problémů, když se naruší jeho čerstvě nabytá samozřejmost.

Přechod mezi logikou adres a operátora a logikou triadické soustavy je místem, kde dochází k úplné symbolizaci počítání: jakmile se totiž struktura dvou adres a vzdálenosti mezi nimi stává okamžitou (tedy simultánní), získávají všechny členy okamžité číselné vyjádření - příklad se mění ve vyjádření vztahu tří čísel. Mohli bychom říci, že v tomto bodě se příklad vrací k původní formě příkladu-říkanky, nyní však již ve zkonstruované totalitě jejího významu.

Plné pochopení toho, že příklad je pouze jedním možným výrazem těchto vztahů, přichází ovšem až s pochopením vztahů mezi různými příklady s týmiž třemi čísly, jak jsme je popsali výše. Domníváme se ovšem, že to pro počítání v první třídě není typické. Běžné počítání, se kterým se děti (ale i dospělí) setkávají, nevytváří žádný tlak na plnou strukturaci, která je vlastně strukturou implicitních možností reformulace příkladu se záměnou - vyjádřeno v pojmech předchozí logiky - nižší adresy a operátora. Chápání struktury trojice čísel v příkladu jako dvou adres a operátora, který reprezentuje číselnou vzdálenost mezi nimi, je pro počítání dostačující.

Zdá se, že ve vyústění procesu, který jsme popsali, je nutno odlišit na jedné straně vytvoření triadické struktury konkrétní triády a na straně druhé obecnější představu o strukturaci příkladu bez konkrétního obsazení jeho členů. Koncept triadické strukturace pak umožňuje dítěti anticipovat a orientovat hledání řešení i u takových zadání, kde dítě neumí příklad zpaměti (a na druhé straně u příkladů "zpaměti" ovšem poskytuje vhled do jejich struktury a souvislostí).

Úloha příkladů naučených zpaměti tedy nemizí - mění se však jejich role. Naučené příklady představují znalost konkrétních triád, s jejichž pomocí je strukturován číselný prostor.

Strukturace číselného prostoru se neděje naráz "na celé frontě", nýbrž nejdříve prostřednictvím těch příkladů, které se snáze pamatují. Přitom znalost jednotlivých triád, jejichž prostřednictvím pak může dítě operovat pouze v symbolické rovině, je zprvu jen dočasná a musí být opakovaně nastolována. Při pozorování ve třídě můžeme např. vidět, jak dítě, které jednu chvíli počítá velmi rychle bez jakýchkoli pomocných prostředků a s největší pravděpodobností operuje v symbolické rovině, se v jiné fázi hodiny uchyluje např. k náznakovému použití prstů. Obecně je příčinou tohoto rozdílu ve způsobu počítání vždy nějaké "rušení" - ruch ve třídě, únava, obava z chyby apod. V této situaci se dítě, které za optimálních podmínek už je schopno počítat jen symbolicky, uchyluje k opoře názorného zobrazení - buď jen pro dodatečnou kontrolu nebo plně.

Zapamatovatelnost různých triadických obsazení příkladu je zjevně nestejná. Děti jednoznačně považují některé příklady za lehké a jsou-li na konci první či na začátku druhé zadány, smějí se jim. Obecně se k nejlehčím řadí příklady s nulou a příklady s jedničkou, dále pak příklady s desítkou. Později se k nim přidávají příklady se symetrickými sčítanci (8+8, 7+7 apod.). Kromě toho mají některé děti individuálně oblíbené příklady či jednotlivá čísla v příkladech.

Na postupnost triadické strukturace číselného prostoru je možno usuzovat mj. i ze zdánlivě paradoxních potíží, které mají děti s vymýšlením příkladů ještě na začátku druhé třídy:

8.11.95

L. příklady s nulou, K. 8+8, 7+7, 20-10, 5-5. Mají potíž něco vymyslet. L. dává řadu příliš lehkých příkladů jako např. 1-1, K. snad vymyslel nejsložitější 11+4?

Zdá se tu, že prostor "příkladů do 20" je strukturován jakoby na úrovni pasivního rozpoznání: když je zadán příklad nebo úloha, pak v jejím kontextu jsou triadické struktury správně rozpoznány. Ale mají-li děti samy vytvářet celý kontext, vybavují si několik dominantních triadických figur a ostatní jakoby zůstávaly neaktivovány. Jaký je rozdíl mezi situací, kdy kontext je zadán, dodán zvenku, a mezi situací, kdy kontext musí být vytvořen?

Je-li zadán příklad, který se má vypočítat, znamená to doplnit prostřednictvím nějakého postupu ve struktuře, reprezentující příklad (a vytvářející jeho logiku, tedy i logiku postupu) zbývající člen - tedy jeden element struktury.

Má-li se příklad vymýšlet, je třeba dosadit naráz, simultánně, celou strukturu příkladu. I když z dospělého hlediska můžeme o nutnosti toho vznést pochybnosti, je z pozorování zjevné, že děti to tak dělají: zadávají takové příklady, u kterých v momentě zadání znají řešení a nekonstruují tedy příklad posloupnými kroky. Srovnáme-li pak příklady, které zadávají lepší a horší žáci, je tu jasný rozdíl v obtížnosti a pochopitelně i v rozmanitosti zadávaných příkladů.

Důvod, proč tomu tak je, je podle našeho názoru spojen se situací toho, kdo zadává příklad, s jejím sociálním významem. V určitém smyslu přebírá v tu chvíli roli učitele. Děti o to velmi stojí a velmi usilují o to, aby byly vybrány. Ten kdo zkouší, musí pak sám znát to, na co se ptá ostatních. Nesmí prokázat neznalost nebo se zesměšní. Zesměšnit se může tím - a to se občas stává - že zadá nesmyslný příklad. Obecně by se dalo říci, že se musí s výsledkem příkladu vejít do oboru, ve kterém počítají - jinak je napomenut, že "to nejde" (pokud by výsledek byl záporný) nebo "to ještě neumíme" (pokud přesahuje např. obor "do 20"). Posměch dětí je indikátorem selhání v roli, o kterou dítě usilovalo, ztrátou bodů v etnosociometrii, která ve třídě permanentně probíhá[19]. Proto děti zadávají takové příklady, které samy bezpečně umějí, u nichž tedy v okamžiku zadání znají celou strukturu. Platí to i o případech překročení oboru: mohu zadat úmyslně příklad, který jsme se ještě neučili, ale musím ho sám znát Někdy děti právě takovým příkladem chtějí dát najevo, že už ho umějí. Otázka učitelky "a ty to umíš?" pak není hrozbou, ale příležitostí zabodovat.

Potíže s vymýšlením příkladů poukazují na to, že děti se zpočátku nepohybují v celém číselném oboru stejně bezpečně. Zadávané příklady pak indikují, které triadické konfigurace už ovládly dostatečně bezpečně.

Tak také rozklad při přechodu přes desítku, který budeme analyzovat později, je mj. rozkladem na takové triády, které jsou co možná plně simultaneizovány. Jsou to triády s dobrým tvarem (do desítky a přes desítku). Didaktický tlak na takový rozklad vychází možná ze zkušenosti, že následné vybavení dvou simultánních "malých" triád je rychlejší než posloupné načítání "velkého" operátora. Ale zároveň "technika přechodu" vytváří jednak tlak na případné dokončení přechodu k logice adres a operátora, jednak na simultaneizaci triád s desítkou.

[19] Tento termín používá Kučera (1994).

Schéma vývojových fází počítání

O schematické shrnutí vývoje fází počítání, jak vyplývají z dosavadního výkladu, se pokoušíme v následující tabulce:

Mentální reprezentace příkladu	**Zadání (výchozí elementy)**	**Operace (forma pohybu)**	**Výsledek (výsledné elementy)**	**Grafické vyjádření provedené operace**
Sklad	Neuspořádané počty předmětů: 2 hromádky	Dát dohromady	Neuspořádaný počet: 1 hromádka	Neuspořádaný počet: 1 hromádka
Sklad a rozklad	Neuspořádané počty předmětů: 1 nebo 2 hromádky	Dát dohromady nebo dát na stranu, pryč	Neuspořádaný počet: celek nebo zbytek	Neuspořádaný počet: 2 části celku
Přidávání/ubírání	Uspořádané počty předmětů: 2 řady	Přidání/ubrání jako prodloužení/zkrácení první řady druhou	Uspořádaný počet: kratší nebo delší řada	Uspořadaný počet: 2 části řady
Fixní řada	Výchozí bod (předmět) v řadě, počet a směr kroků	Přechod k jinému bodu řady	Výsledný bod (předmět) v řadě	2 body v řadě v určité vzdálenosti (adresy a operátor)
Číselná řada	Výchozí číslo, počet a směr kroků	Přechod k jinému číslu	Výsledné číslo	2 čísla v řadě v určité vzdálenosti (adresy a operátor
Triáda	Dva členy triády	Doplnění triády	Třetí člen triády	Trojice čísel - triáda

Další tabulka pak zachycuje předpokládanou korespondenci chápání jednotlivého příkladu a chápání podobností mezi příklady:

Logika jednotlivého příkladu	**Analogie příkladů**
Sklad počtů	Izolované příklady
Sklad a rozklad počtů	Komutativnost částí -> podobnost příkladů: 1. na sčítání: a+b=c <=> b+a= c 2. na odčítání: c-a=b <=> c-b=a
Prodlužování/zkracování názorné řady	"Vnější" inverze (protikladnost inverzních triád) jako nezaměnitelnost sčítání a odčítání: a+b=c <≠> a-b=d
Pohyb ve fixní názorné řadě (načítání operátora od názorné adresy)	Vnitřní inverze (inverze pohybu v téže triádě) jako podobnost sčítání a odčítání: a+b=c <=> c-b=a
Pohyb v číselné řadě (načítání operátora od číselné adresy)	
Doplňování číselné triády	podobnost inverzních příkladů s komutativní záměnou: a+b=c <=> c-a=b

KRITICKÁ MÍSTA POČÍTÁNÍ

Umí-li dítě hladce doplnit zadání příkladu výsledkem, nemusí ještě být zřejmé v jakém typu korespondence říkanka reprodukovaná zpaměti vystupuje. Povaha této korespondence se objevuje při komplikacích, když se říkanka nevybavuje a dítě počítá, tzn. zjišťuje výsledek operačně. Ve výuce matematiky v naší třídě však bylo možno nalézt i jiná zadání, než jsou obvyklé příklady, která vytvářela komplikace možností použití příkladů jako říkanek reprodukovaných zpaměti.

Příklady typu "doplňování" a "myslím si číslo"

Typovou podobu toho, co je počítání příkladu, je zadání dvou členů příkladu před rovnítkem a hledání členu za rovnítkem. S takovou formou se děti ve škole setkávají nejčastěji a také nejdříve. Jsou většinou označovány jako "obyčejné příklady".

Příklady na "doplňování" najdeme v učebnici používané v naší třídě poprvé při "sčítání v oboru čísel 0-6" (Matematika 1, s.29). Mají-li obyčejné příklady obecnou podobu x+/-y=( ), pak příklady na doplňování mají podobu x+/-( )=z, např. 2+_=6.

Příklady "myslím si číslo" jsou při ústním zadání uváděny právě touto formulí: "Myslím si číslo, když k němu přidám (přičtu) pět, dostanu číslo devět. Jaké je to číslo?" Písemně zapsány mají podobu ( )+/-y=z. Jde tedy také o doplnění, avšak prvního členu příkladu. Jde však o doplnění, které je pro děti mnohem obtížnější. Je to patrné z potíží, které jsme při příkladech tohoto typu mohli registrovat a které poukazují na nutnost tyto dva typy příkladů odlišit.

22.6.1995:

<table>
<tr><td colspan="2">Doplňovat do tabulky:
↙| 20 | 10| | 8 | 12 | | |
-4 -|-----|----|----|---|-----|---|----|
↘| | | 0 | | | 7 | 9 |</td></tr>
<tr><td>Tonda: 0-4=4</td><td>Jde o šestý příklad v tabulce, kde výsledek po odečtení 4 má být 0. Tonda dosazuje známou sukcesivní strukturu. V tomto případě musí nejen jít proti šipce, ale také popřít znaménko mínus, aby mu to nakonec dalo smysl, jinak by se dostal do záporných čísel, která nezná.</td></tr>
<tr><td>I Olda plete příklad:
7-4=3
Romanka ho opravuje:
10-4=7</td><td>Olda dělá totéž, co Tonda, ale v jeho verzi příkladu se odečíst 4 dá, takže nemusí popírat znaménko. Romanka pochopila, jakou chybu udělal Olda. Ale zdá se, že v soustředění na strukturu dosazuje do ní chybný element.</td></tr>
<tr><td>Leona opravuje Romanku:
10-4=6</td><td>Má pravdu, ale učitelka čeká jinou opravu.</td></tr>
<tr><td>"Jediný Přemek..." - učitelka ho opakovaně chválí.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">(Mohlo by se zdát, že "-4" je dáno jako operátor, ve kterém jsou element i jeho funkce ve struktuře dány naráz. Ale u Tondy se ukazuje, že to naráz dáno není, že je možné splést operaci a daný element zachovat.)</td></tr>
</table>

Ze záznamu můžeme vidět, že ještě na konci školního roku dělají příklady typu "myslím si číslo" některým dětem potíže. Je pravda, že tu mají situaci komplikovanou nestandardní podobou příkladů.

Ale naproti tomu už záznam z února ukazuje zvládnutí "doplňování" většinou dětí.

23.2.95 :

Soutěž v počítání: Na tabuli 3 vláčky s vagóny, dopočítává se v nich do výsledku, který je na lokomotivě.	
Prostřední oddělení se zaseklo na Slávce - učitelka jí vysvětluje u počítadla. Doplnit do příkladu sčítance (a ještě do vláčku (?)) - na to Slávka nezabírá. Ostatní děti bez pomoci bezchybně.	*Učitelka. nechává družstvo se Slávkou prohrát - poté, co zkontrolovali doplnění a všechno bylo správně, nebylo prostě zbytí.*

(Slávka byla holčička, u níž bylo na konci školního roku rozhodnuto o opakování první třídy.)

Začátkem června většina dětí úspěšně doplňuje i v příkladech s přechodem přes desítku:

Doplňují "kytičky": 7+..., 9+..., 5+..., 8+... (=13). Všichni dobře (Blanka, Olda, Lojzík), až Jiřina: 8+..... 14 (=16). Požádána o opravu dlouho mlčí.	*Jedna kytička má ve středu "13", druhá "16", na okvětních lístcích jsou pak první sčítance a znaménko + (? - myslím, že všechny byly na sčítání).*
Jiřina: 5+... (=16) - osum. Nepřišla na to, dlouho přemýšlí. Správné doplnění řekla až Marta: 5+11=16.	

Čemu tedy odpovídá schopnost řešit příklady typu "doplňování" a "myslím si číslo"?

"Doplňování"

Pokud by dítě chtělo dojít k řešení prostřednictvím sukcesivních postupů jako v obyčejných příkladech, musí zadání nejprve restrukturovat: Řešením zadání 4+( )=7 je výsledek příkladu 7-4=( ), řešením zadání 7-( )=4 je výsledek příkladu 7-4=( ). Odvození těchto příkladů však už indikuje vědomí jejich souvislosti, která - jak jsme dokazovali výše - je produktem daleko pozdějším než odpovídá prvním příkladům na doplňování. Děti také neřeší tato zadání odvozením a výpočtem pomocného příkladu, ale intuitivním dosazováním do zadané struktury příkladu. Když jim je položena otázka "jakým příkladem to vypočítáme", je to pro ně dodatečný úkol, který řeší navíc, až po doplnění původního zadání.

Zpočátku je doplňování zřejmě dostupné pouze jako doplnění říkanky. Při doplňování příkladu, kde se říkanka nevybavuje, pak nanejvýš jako odhad vedený figurou říkanky, která vyžaduje prostě doplnit do příkladu nějaké třetí číslo. Přestože dítě ví, že správně je jenom jedno znění příkladu, správnost odhadu musí potvrdit až učitelka. Zkouška by tímto postupem jednak byla dost pracná, ale hlavně při této zdlouhavosti doplnění příkladu do známé figury nejspíš potlačí původní zadání (žádaný výsledek se nedrží simultánně, při zkoušce se ztratí).

Chybné postupy mohou vycházet také z analogie s "obyčejnými příklady", tedy z počáteční logiky příkladu jako posloupnosti manipulací s dvěma počty. Chyby, které děti zpočátku při doplňování dělají, spočívají v provedení naznačené operace s těmi dvěma čísly, která jsou k dispozici: 2+( )=6 je řešeno jako 2+8=6. Zkouška tu pak ještě nemusí vést k diferenciaci struktury "příkladu na doplňování" od "obyčejného příkladu" tím spíše, že stejně mechanický postup je u odčítání úspěšný: 8-( )=6. Při dodržení pravidla, že větší číslo nelze od menšího odečíst, dojde dítě mechanickým postupem ke správnému řešení, aniž by chápalo jeho logiku.

Tato původní doplnění bychom patrně považovali za mechanické pokusy, které neberou v úvahu logické vztahy, jichž je příklad výrazem. První úrovní strukturace, která umožňuje pochopit logiku doplňování, je **logika celku a částí**, jak je vyjádřena grafickým znázorněním odčítání. Doplnění je doplněním chybějící části tak, aby bylo dosaženo celku. Tato logika postačuje k řešení odhadem, který lze ověřit následnou zkouškou - výpočtem doplněného příkladu jako skladu. Odhad tu samozřejmě může stejně jako předtím využívat říkanku příkladu, ale říkanka sama i její doplnění nabývá jiného (logického) významu.

Ani přesné spočítání hledaného členu příkladu se neděje odvozením inverzního příkladu, nýbrž doplněním, kdy spočítání (dopočítání) hledané části se nutně děje jako pohyb řady. Působí tedy na vývoj počítání podobně jako odčítání - nutí chápat příklad jako přidávání/ubírání řady. Ve znázornění příkladu 4+( )=7 jako //// XXX je podobně jako při odčítání vyjádřen nepřítomný počet - tentokrát ovšem nikoli už nepřítomný (zmizelý), nýbrž ještě nepřítomný (=doplňovaný). Strukturace na úrovni pohyblivé řady je tedy postačující k řešení příkladu na doplňování bez nutné zkoušky.

Struktura "doplňování" ovšem už svou formou - jakmile jde o chápání příkladu jako operace v řadě - předstihuje logiku zkracování/prodlužování řady a předznamenává strukturu přechodu mezi dvěma adresami fixní řady. V příkladu na doplňování je totiž cíl, k němuž směřuje načítání operátora, dán dříve, než k němu pohyb operátora dospěje. Struktura příkladu na doplňování se tedy při pohybu v řadě stává strukturou dvou krajních čísel a čísla hledaného, které vyjadřuje postupně počet předmětů, pak počet kroků a nakonec číslo mezi nimi.

Při strukturaci příkladu na "doplňování" jako zjištění vzdálenosti dvou bodů v řadě pak může být vzdálenost stanovena pohybem, resp. počtem kroků mezi počáteční a konečnou adresou. Dítě to provádí tak, že k počátečnímu počtu opakovaně přidává po jedné, dokud nedosáhne počtu odpovídajícího hledanému výsledku. Obtížnost spočívá v tom, že musí sledovat rostoucí velikost operátora a zároveň po každém kroku porovnávat dosažený počet se zadaným výsledkem. Toto dvojité spočítání, které by bylo dosti těžkopádné a bylo patrně zdrojem mnoha chyb, se ovšem zjednodušuje na prstech prostřednictvím okamžitého přiřazení počtu a čísla.

Pohyb na prstech tedy počítání příkladu na doplňování zrychluje, protože přiřazuje adresám číselná označení bezprostředně, bez nutnosti spočítání. Prsty tak fungují téměř jako řada kartiček, kde každému počtu okamžitě odpovídá číslo. Stejně jako u řady kartiček s čísly stačí pak evidovat počet kroků, jimiž se dostaneme z jednoho prstového výrazu na druhý.

Na druhé straně svinutý pohyb při specificky prstovém počítání, vytvářející při počítání obyčejných příkladů na prstech jakousi slitinu adresy a operátora, může zabránit přesné reflexi operátora jako pohybu mezi adresami. Pokud tyto prstové zkratky znemožňují chápání prstů jako řady, protože v nich jde už jen o reflexní přechody mezi dvěma prstovými vyjádřeními, prstovými číselnými znaky, mohlo by platit, že čím rychleji počítá dítě na prstech obyčejné příklady, tím nedostupnější je mu doplňování. A naopak: doplňování nutí ke kontrole a uvědomění pohybu mezi dvěma prstovými vyjádřeními, nutí pracovat s prsty jako s řadou.[20]

"Myslím si číslo"

Struktura celku a částí neumožňuje zadání tohoto typu pochopit, není dostačující, respektive je dostačující jen při sčítání. Doplnění chybějícího členu příkladu na odčítání nekoresponduje s názornou (imaginární) operací doplnění celku chybějícím, zbývajícím

---

[20] Právě Jiřina a Leona jsou holčičky, u nichž bylo počítání na prstech výrazné i na konci školního roku. Obě používaly prsty bez kontroly zrakem.

počtem. Příklad jako ( )-4=3 není doplněním celku o chybějící část.[21] Je doplněním chybějícího elementu struktury, která už musí svým uspořádáním korespondovat s číselnou řadou.

Je chybějící element představitelný pro dítě na úrovni strukturace "zkracování/prodlužování" řady? Domníváme se, že ne. Při "doplňování" je chybějící operátor dán - na rozdíl od obyčejného příkladu, kde je vzdáleností se směrem (vektorem) - rovnou jako koncový bod postupu operace (načítání operátora). Tak může být jeho směr zanedbán, nemusí být brán v úvahu, protože je obsažen automaticky v zadání. Nároky na simultánní strukturaci, na počet prvků, které musí být vzaty v úvahu naráz, se nemění, jen se posouvají: hledaný člen je tu vyjádřen dvěma prvky.

Naproti tomu při zadání "myslím si číslo" je hledaný člen determinován 3 prvky, které musí být vzaty v úvahu naráz (pokud má být příklad řešen jedním krokem): východiskem, velikostí operátora i jeho směrem.

Tuto strukturu umožňuje jako simultánní reflektovat strukturace 2 adres a operátora, v níž směřování operátora rozlišuje adresu známou (k níž směřuje operátor) a hledanou (která je pomyslným východiskem).

Na nižší úrovni (zkracování/prodlužování řady) se zdá příklad řešitelný jen jako odhad, který vychází ze zkusmého načtení velikosti operátora k zadané adrese, a následná zkouška doplněním zjištěné adresy do příkladu.

Příklad tedy vyžaduje vzít všechny členy struktury v jejich dvojakosti, tedy tak, jak mohou vystupovat v inverzním příkladu: operátora v obou možných směrech, východisko příkladu jako cíl a cíl jako východisko. Příklad vytváří tuto dvojakost tím, že je opakem toho, jako se "tváří": ( )-3=4 je vlastně 4+3=( ). Jen dosáhne-li strukturace příkladu podoby, v níž je implicitně přítomen inverzní příklad, vytváří její logika možnost chápání příkladu typu "myslím si číslo".

Rozšíření oboru počítání: "do dvaceti"

Postup při rozšíření oboru počítání do 20, ke kterému došlo kolem poloviny února, byl v něčem shodný s postupy uplatňovanými už dříve (opakované rozmanité znázorňování korespondujících počtů s pomocí nejrůznějších zobrazení jak reálných předmětů tak "modelů"), ale přinášel také řadu odlišností.

Už na první pohled šlo o rozšíření odlišné svým rozsahem. Dosud se obor počítání rozšiřoval vždy jen o jedno číslo, nyní byla naráz zavedena celá řada 11až 20. To bylo možné patrně proto, že byla jasně nastolena a udržována analogie s počítáním v první desítce. V první fázi se představila čísla 11 až 20 jako řada analogická řadě 1 až 10, která se liší názorně o 10 (v učebnici se systematicky opakovala desítková strukturace názorných zobrazení) a symbolicky o jedničku psanou před čísly, která koresponduje s příponou "-náct" v orálním vyjádření.

Podobně se pak pracovalo také s analogií příkladů. To umožňovalo dětem úspěšně počítat vlastně stejným způsobem jako do 10, tedy každému na předtím dosažené úrovni chápání příkladu. Dlouhou dobu se pak držely vlastně dva paralelní, avšak oddělené číselné obory.

Počítání v oboru 11 až 20 přinášelo jeden nový problém. Při vší jednoduchosti pravidla "začne-li příklad číslem 11 až 20, musím k výsledku doplnit jedničku nebo -náct" znamená

[21] Jako části by dítě pochopilo zadaná čísla v reformulaci příkladu na 3+4=( ), ale taková reformulace je možná až později při pochopení sčítání a odčítání jako inverzních operací.

takové pravidlo jeden krok navíc, který prodlužuje dosavadní posloupnost operace. Registrovali jsme řadu chyb spočívajících v opomenutí tohoto kroku.

Z našeho hlediska jde o zvýšený nárok na kapacitu pozornosti, kterou speciální krok odčerpává. Teprve při počítání jako pohybu v číselné řadě je okamžité místo operace bezprostředně vyjadřováno jako číselné označení dosažené adresy. Už o stupeň níže dítě, které "počítá jako do deseti" v logice pohybu v názorné řadě, musí v okamžiku dosažení výsledku zjistit jeho číselnou hodnotu. Dosud používané způsoby zrychleného spočítání, k nimž patří prstová vyjádření počtů, které byly do značné míry integrovány s odpovídajícím číselným vyjádřením a nevyžadovaly už speciální pozornost, vedou často k chybě "o 10". Převod prstových výrazů na čísla se znovu prodlužuje nutností zvážit doplnění **desítkového šiftu**. O tentýž krok se však prodlužuje počítání i při uplatnění příkladů "do deseti" naučených zpaměti.

V záznamu z 27.4.95 konstatujeme, že děti se v průběhu hodiny často pletou, zejména při soutěži, kdy jde o rychlost. Registrujeme zejména 2 typy chyb - 1. šiftové "o 10", 2. záměnu sčítání a odčítání. Také dívka (Blanka), vedle které ten den autor sedí, má v předchozích diktátech "*semtam jednu chybu, které jsou buď zmýlenou o 10 nebo záměnou sčítání a odčítání*" (citace záznamu).

Můžeme tedy uvažovat o tom - a bylo by to konzistentní s naším chápáním vývoje počítání - že nutnost zahrnutí šiftu do postupu počítání nemusí vést jen k "šiftovým chybám". Zvýšená frekvence záměn sčítání a odčítání by mohla svědčit o tom, že může také narušovat předchozí diferenciaci sčítání a odčítání.[22]

Šiftový krok se integruje do struktury operace nejprve dočasně. Např. 11.5. se (podle učitelky) "nechali napálit", když po sérii příkladů v oboru 11 až 20 zadala příklad 6-3 a řada z nich ukázala výsledek "13". Chyby se šiftem však pokračují i později v rámci rozkladu při přechodu přes desítku.

27.4.95 však při příkladu 18-10 generují chyby, které se těmto dvěma typům zdánlivě vymykají: zachytili jsme např. výsledky 12, 10, 0. Jak jsou tyto výsledky interpretovatelné? Na nulu se děti dostanou v příkladě 8-10 proto, že nepracují se zápornými čísly - prostě už nezbyde "nic". Výsledek "10" je pak "0" s přidaným šiftem.

Nejsložitější je výsledek "12". Je patrně intuitivním doplněním triády 8-10-2. Připomíná vlastně pozdější chyby při přechodu přes desítku: zbytek rozkladu operátora je k desítce přičten namísto odečten. S desítkou na místě operátora by se v tom případě zacházelo jako s operátorem namísto jako se šiftem. Ale reálně šlo nejspíše o mnohem intuitivnější podobu procesu, než jsou pozdější chyby při přechodu přes desítku. (Ten začnou probírat až o tři týdny později.) Zůstává se tu v desítkovém oboru a v něm se doplňuje triáda - počítá se "jako do deseti" a proto vlastně nelze doplnit triádu jinak. Pak se k nalezenému výsledku přidává šift.

Z chyb v tomto příkladu je patrné **nejednoznačné postavení desítky**. Desítka při počítání v oboru 11 až 20 "jako do deseti" vystupuje ve trojí možné roli: jako konec první řady (0 až 10), jako začátek druhé řady (10 až 20), kdy je číslem analogickým nule, a jako šift, který se přidává k výsledku. V uvedeném případě se desítka ocitla v pozici operátora a zmatek, který to

[22] Předpokládáme, že pravděpodobnější je takové narušení u dítěte, které ještě nedosáhlo úrovně logiky pohybu v pevné řadě. Jsou pro to dva důvody: 1. Zkracování/prodlužování řady vytváří při řešení jednotlivého příkladu pouze první stupeň integrace dílčích kroků v posloupnosti příkladu. Přidání šiftu tak znamená plné vytížení kapacity pozornosti, která se snadno naruší při jakémkoli rušení. ("Rušením" ovšem může být i předchozí příklad.) 2. Právě na této úrovni je diferenciace sčítání a odčítání jako operace integrované s přidávaným/ubíraným počtem v operátora "čerstvým výdobytkem" vývoje.

Je však možné, že i v logice dvou adres a operátora, chápané jako přechod mezi dvěma body fixní řady, je rozšíření oboru čísel přiřazovaných adresám natolik náročné, že narušuje diferenciaci pohybu sčítání a odčítání.

vyvolalo, poukazuje na rozdíl mezi šiftem a operátorem. Kdyby děti vzaly desítku jako šift, který dělá z čísla 18 číslo 8, nebylo by pro ně řešení problémem. Problém vznikl nejspíš proto, že příklad opravdu počítaly - jak o tom svědčí chybné výsledky. Ale to také znamená, že použití šiftu má jiný režim než počítání. Příklady se šiftem jsou zvláštní příklady, které se nepočítají - v tom smyslu, že na ně děti zřejmě nevztahují logiku běžného příkladu. Proto také prvním "přechodem přes desítku" pak bylo právě použití tohoto šiftu jako kvazioperátora - odečíst či přičíst deset znamená přejít k homologickému členu v paralelní symbolické řadě. Použití desítky jako reálného operátora, jehož přičtení/odečtení koresponduje s přidáním/ubráním deseti, přitom v té chvíli většina dětí ještě neovládá.

Šiftem je v tomto smyslu také nula: podobně jako desítka znamená, že před výsledek je třeba dopsat jedničku a přečíst ho s příponou "-náct", nula znamená, že výsledek se nezmění vůbec.

Počáteční počítání do dvaceti jako operace ve dvou analogických, avšak oddělených oborech navozuje otázku, zda takovou prezentaci číselné řady chápaly děti od počátku jako strukturu **jediné** číselné řady, v níž je desítka pouze označena jako významný bod, nebo právě jako řady **dvě**, které jsou desítkou odděleny, jsou diskontinuitní. Tato otázka nezní tak nesmyslně, když si uvědomíme, že druhá desítka byla také systematicky zobrazována jako oddělená od první: při znázorňování v učebnici jako dva oddělené počty předmětů, ať už jsou nebo nejsou uspořádány v řadách; na počítadle jako dvě řady pod sebou; podobně i na "mřížce" (pomůcce, o které se blíže zmíníme později); ale dokonce i na kartičkách s čísly, protože se do jedné řady na lavici nevejdou.

Takové chápání by mohlo způsobit, že dítě považuje dosavadní logiku, kterou se řídilo při počítání příkladů (a která je už od stadia "zkracování/prodlužování" pohybem téže řady) za něco jiného, než přichází nyní při operacích, v nichž se přechází přes desítku a operuje se tak se dvěma - byť analogickými - řadami. Počáteční problémy, které pak vyvstávají právě jako nepochopení logiky přechodu přes desítku, mohou mít tuto příčinu. Když se např. koncem dubna bavíme s některými dětmi o tom, jak počítají, Blanka, která jinak patří k nejlepším počtářům ve třídě, při zadání příkladu 12-4, který se ještě neučili, jen chvíli přemýšlí a pak prohlašuje "to nevím", aniž by se pokoušela nějak na to přijít, nějak to odvodit pomocí dosud známých postupů. Nepřispívá k tomu i to, že oddělené počítání v oborech první a druhé desítky vytvořilo mezi nimi hranici, pro jejíž překročení se dosavadní způsob počítání příkladů nezdá Blance možný?[23]

Později (začátkem června) nám učitelka referovala o tom, jak se podle ní Blanka "motá v rozkladu", znázorňovaném na mřížce, nerozumí tomu a jako by se jí tím počítání zkomplikovalo - přitom dřív ho uměla.

Podobně si takovou otázku můžeme klást u Oldy. Učitelka nám o něm (tentýž den začátkem června) říká, že teprve asi před dvěma dny zjistila, že on celou dobu neví, proč při sčítání přes desítku rozkládají tak, aby se nejdříve dostali na desítku. Když to s ním probírala, ukázalo se, že sice dočítá na desítku, ale vůbec neví, co dál. [Jak si to představit? Udělal první krok rozkladu - když to učitelka požaduje - ale nevěděl vlastně, že dělá rozklad? Pak místo druhého kroku opustil tenhle postup, jehož smysl nechápal, a vrátil se ke "svému" počítání, ev. se snažil zjistit výsledek odhadem či vybavením příkladu zpaměti?] Když mu to pak "*za minutu*" o přestávce vysvětlila, bylo mu to už jasné.

---

[23] Můžeme samozřejmě také poukazovat na to, že Blanku nijak nepálí, že to neví: ještě se to neučili, ale budou se to učit. Jako by jí tu chyběla touha objevovat, snaha nalézt sama řešení, která se dětem často připisuje. Jenže podobný přístup - "to jsme se ještě neučili", které jako by zároveň znamenalo "až se to budeme učit, naučím se to" - je podle našich zkušeností spíše typický než výjimečný.

Potíže Blanky a Oldy by mohly představovat dvě strany téhož problému - totiž postavení desítky v číselné řadě. V počátečním řešení tohoto problému pak bychom mohli rozlišit děti, které - jako Olda - nechápou zvláštnost postavení desítky, totiž že desítka **dělí** pohyb v číselné řadě na dvě části, na dva kroky. Opačnou polohu problému pak představují děti jako Blanka, které nechápou obory 0 až 10 a 10 až 20 jako části jedné číselné řady, tzn. rozklad při přechodu přes desítku jako dva kroky **téhož** pohybu.

Řetězy

Kromě již zmíněných "obyčejných příkladů", "doplňování" a příkladů typu "myslím si číslo" počítají děti často "řetězy" či "hady". Jde o opakované sčítání a odčítání v rámci "jednoho příkladu".

Popíšeme-li řetěz jako posloupnou konstrukci série triád, pak hledaný člen (výsledek) první triády je zároveň prvním členem (východiskem) triády následující a tvoří přechod k ní. Při řešení řetězového zadání je tak každý mezivýsledek nutně prezentován jako člen dvou různých triád. Jeho nalezení je dílčím krokem celkového pohybu zadaného řetězem.

Ve skutečnosti ovšem děti zpočátku řetěz berou jako sérii jednotlivých příkladů. Problém řetězů spočívá v nutnosti střídavě počítat a sestavovat příklady. Znamená to paralelně s počítáním jednotlivých příkladů udržovat přehled, na kterém místě řetězu právě jsem, který příklad mám počítat. Každý další příklad (kromě prvního) je přitom v zadaném řetězu vyjádřen vždy neúplně, jen jako zadání dalšího operátora.

Počítají-li děti spolehlivě jednotlivé příklady, nastanou potíže se řetězem tehdy, když učitelka dětem nepomáhá sestavovat jednotlivé dílčí příklady, tzn. nekontroluje přechod od mezisoučtu k dalšímu příkladu. Je-li např. řetěz zadáván jen ústně, zadá učitelka první příklad a čeká, až děti zjistí výsledek. Pak zadá dalšího operátora[24] a zase počká, až děti příklad vypočítají. Pokud tedy dítě fixuje výsledek prvního příkladu např. v podobě šeptaného "sedum", doplňuje vlastně učitelka dalším zadáním rovnou formulaci dalšího příkladu.

Je-li řetěz zapsán na tabuli a učitelka sice nečte jednotlivé kroky nahlas, ale ukazuje postupně, se kterým dalším členem řetězu je třeba vytvořit další příklad, jde o tutéž situaci.

S touto pomocí lze řetězy počítat už na úrovni logiky skladu. Celý problém se tak pro dítě redukuje na dostatečně rychlé počítání. Hlásí-li děti, že "se ztratily", znamená to, že nedokázaly držet tempo kroků, které učitelka nasadila.

Jiná je situace při pouze písemném zadání. Okolnost, že dítě si může ukazovat samo, podobně jako mu předtím ukazovala učitelka (a navíc si přizpůsobuje rychlost krokování), vede ke stejné situaci jen zdánlivě. Nutnost kontrolovat pohyb po řetězu vlastními prostředky činí takovou situaci o jeden vývojový stupeň obtížnější

Domníváme se, že teprve na úrovni chápání příkladu jako zkracování/prodlužování řady bude řetěz řešitelný bez pomoci učitelky. Připomeňme, že na této úrovni je v okamžiku zadání příklad chápán jen jako operace přidání/ubrání, avšak bez anticipace výsledku (bez jeho integrace do předem dané simultánní strukturace). Tomu odpovídající postup počítání, při němž jediné, co nevyžadujeje speciální pozornost, je směr operace, uvolňuje pro sledování postupu v řetězu právě tak minimální nutnou kapacitu. V důsledku toho se ovšem nedrží pohyb jako celek, počítá se vždy jen stávající krok, který při přechodu k dalšímu článku řetězu mizí. Při tomto postupu můžeme předpokládat, že když se objeví jako následující členy řetězu +7 a -7, dítě počítá dva příklady nezávisle na sobě.

Teprve na úrovni chápání příkladu jako pohybu mezi dvěma body fixní názorné řady předpokládáme možnost chápat dva po sobě následující příklady jako dva kroky téhož pohybu, jako kroky, které se skládají v témže směru či se naopak částečně (případně zcela) kompenzují díky směru opačnému. Anticipace konečné adresy příkladu umožňuje v ní anticipovat východisko a strukturu následujícího příkladu.

Spolehlivě funguje tato logika při počítání řetězu patrně jen tehdy, je-li jen východiskem chápání celkového pohybu, zatímco jednotlivé mezikroky jsou řešeny prostřednictvím naučených příkladů. Musí-li však být jednotlivé mezisoučty skutečně počítány, pak opakovaný

[24] Pojem operátor zde užíváme bez souvislosti s vývojem chápání příkladu dítětem, pouze jako obecný neutrální výraz nahrazující pojmy sčítanec, menšitel, přidávaný/ubíraný počet či přičítané/odčítané číslo apod.

přechod od číselného zadání operátora k jeho vyjádření pohybem v názorné řadě neponechává zřejmě dostatek kapacity k pochopení možnosti nahradit dva dílčí kroky jedním, v němž "velký" operátor je součtem dvou "malých". Taková možnost přichází až s přechodem k chápání příkladu jako pohybu v číselné řadě. Operování v názorné řadě při něm nabývá statutu pouhého pomocného prostředku, adresy i pohyb mezi nimi mají bezprostřední číselné vyjádření. To umožňuje vzít dva následující příklady jako simultánní strukturu nejen v apriorní obecné stukturaci, nýbrž v konkrétním číselném vyjádření, při němž je patrné skládání kroků řetězu jako dílčích triadických figur.

Když tedy dítě pracuje se řetězy na této úrovni, dospívá podle našeho názoru k **možnosti** skládání triadických struktur jako patrně nejjednodušší formy ekvivalence triád. Avšak tato možnost neznamená nijak automaticky její realizaci. Podle našich zkušeností se zdá typickým spíše takový postup vývoje, kdy možnosti strukturace obsažené v osvojených operačních postupech jsou realizovány až pod tlakem nových postupů, které původní možnost vyžadují jako nutnost. Tak **nutnost** ustavení ekvivalence dílčích triadických struktur s triádou vznikající při součtu jejich operátorů přichází s přechodem přes desítku, při němž je závazně prováděn rozklad operátora.

Přechod přes desítku

Vlastní přechod přes desítku byl prováděn pomocí "řetězů", které představují restrukturaci zadaného příkladu. Explicitním, zjevným účelem je tu rozdělit neznámý "velký" krok na dva "malé", které děti už ovládají.

Řekněme, že dítě má sečíst 9+5.[25] Příklad 9+5 se dá rozložit na dva: 9+1 a 10+4, z nichž oba už v tuto chvíli děti ovládají. Díky tomu, že se vytvořila ona oddělenost oborů 1 až 10 a 11 až 20, byl tento přechod nejen jakýmsi postupem výše, do vyššího oboru. Byl spíše přechodem přes hranici, způsobem, jak spojit pohyby ve dvou dílčích oborech v jeden celek. Šlo vlastně o "průchod skrz" desítku.

Když je učitelka tímto postupem vede, není pro děti problémem dosazovat dílčí výpočty. Je-li však ze dvou dílčích příkladů složen jeden řetěz 9+1+4, mohou nastat první problémy. V řetězu totiž není explicitně vyznačena desítka jako hranice vyššího oboru. Ke dvěma krokům řetězu, tedy k přechodu mezi dvěma triadickými strukturami, se přidává další: přechod do druhé struktury je zároveň přechodem do druhé desítky (vyššího oboru) a je proto třeba přepnout symbolický šift - připsat před výsledek jedničku a změnit příslušným způsobem jeho jméno.

Ale hlavní problémy se koncentrují jinde: je opravdu znalost dvou malých kroků dostatečná k udělání onoho velkého? Mohli jsme konstatovat, že nikoli. Zvládá-li dítě řetěz 9+1+4, neznamená to ještě, že zvládlo 9+5. K tomu totiž musí umět nejen "vypočítat řetěz", nýbrž musí zvládnout postup, jak řetěz sestavit. Jako pomůcka k tomu sloužila "mřížka".

Názorná restrukturace: mřížka

Mřížka je barevný papírový obdélník (např. zelený) velikosti zhruba 8x25 cm s dvěma řadami bílých kruhů po deseti. K ní patří sada barevných koleček vystřižených z papíru - 10 červených a 10 modrých. Velikostí odpovídají kolečka bílým kruhům na "mřížce", tak aby se

[25] K tomu je možno poznamenat, že přechod přes desítku startoval opravdu z devítky a první krok tak byl maximálně zjednodušen - neexistuje "lehčí příklad" než 9+1 (tedy triadická struktura kryjící se s iterativním principem výstavby číselné řady).

na ně dala umisťovat. Je to vlastně počítadlo, kde se kuličky-kolečka nepřesouvají, nýbrž umisťují na mřížku.

Při sčítání znázorňují první sčítanec kolečka modrá, druhý pak červená. (Může to být i obráceně, ale všichni to musí mít stejně, protože jinak by vysvětlování učitelky platilo jen pro část třídy.)

Účelem použití mřížky je - slovy učitelky - "vidět ten řetěz". Ten má být vidět v tom, kolik červených koleček si musí půjčit na doplnění první řady (=desítky) a kolik je jich pak ve druhé řadě. Většinou pak už také vidí výsledek, protože příklady "10 + něco" jim nečiní problémy.

"Součástí" mřížky jsou i pravidla pro použití. Jsou součástí techniky práce s mřížkou, která musí být zvlášť vysvětlena a nacvičována. Kolečka znázorňující výchozí číselný údaj příkladu (první sčítanec nebo menšitel) musí být na mřížku umístěna tak, že se mřížka plní zleva doprava a shora dolů. Při sčítání se pak druhý sčítanec přidává ve stejném směru.

Při odčítání se výchozí počet umístí na mřížku rubem (bílou stranou koleček) nahoru. Odečtení se pak znázorní tak, že se "odzadu", to znamená zprava doleva a od druhé řady k první (zdola nahoru), obrátí počet koleček odpovídajících menšiteli. Celá struktura tak zůstává zachována stejně jako při sčítání.

Podobného efektu lze dosáhnout také při znázornění kreslením, ale je to obtížnější, protože desítka není předem obsažena v pevné konstrukci pomůcky:

2.6.95:

11 růží ve váze: 11 žlutých koleček (kreslí do sešitu), 4 zvadlé růže - škrtni a začni škrtat od dveří.

Co jsme zapomněli? Vyznačit desítku - odkud?

Olda: Od dveří.[26]

Učitelka: Právě že ne, proto jsme to měli vyznačit, ještě než jsme škrtali.

[Kvůli jednoznačnosti zobrazení se tu zavádí pro postup či nárůst v číselné řadě směr zleva doprava a pro odčítání směr opačný.]

Kolik jsi škrtl mimo desítku?

Jednu.

Stačilo to?

Ne.

Kolik jsi škrtl v desítce?

Tři.

Kolik jsi škrtl celkem?

[Každá otázka a odpověď přenáší pozornost na jeden moment zobrazení operace odčítání přes desítku. Je tu vidět, na kolik momentů se rozpitvává.]

V záznamu už nejsou zbylé kroky, ale jsou jasné. Kdybychom tedy podobným způsobem rozložili celý postup řešení příkladu "9+5" na mřížce, který má vysvětlit paralelní symbolický zápis "řetězu", vznikla by následující posloupnost:

1. Vzít do ruky 9 modrých koleček.
2. Správně (podle pravidel) je umístit na mřížku.
3. Vzít do ruky 5 červených koleček.
4. Správně je umístit - tzn. rozlišit postup pro sčítání od postupu pro odčítání.

[26] Všimněme si, že Oldova reakce je v souladu s naším předpokladem výše, že totiž necítí desítku jako pevný strukturující bod fixní číselné řady. Platí to ovšem za předpokladu, že odpověď byla myšlena tak, jak ji učitelka pochopila. Pokud ovšem měla znamenat, že desítku zjistíme nejsnáze odpočítáním jedné růže zprava, svědčila by pro to, že pochopení desítkové strukturace číselné řady (poté, co mu to učitelka "za minutu vysvětlila") mělo už trvalý efekt.

5. Kolik jsme přidali červených do desítky? - 1
6. Kolik jich musíme přidat celkem? - 5
7. Kolik je zbytek červených? - 4
8. Kde ho máme rozmístěn - před desítkou (v první řadě) nebo za desítkou (v druhé řadě)? - Za desítkou (v druhé).
9. Kolik je tedy výsledek? - 14

Kroky 1 - 4 představují rozmístění na mřížce, vlastně manipulaci s počty podle daných pravidel. Zbylé kroky pak představují návrat, rekonstrukci toho, co jsme udělali, rozpoznání posloupnosti kroků v simultánní struktuře, která jimi vznikla. Rozpoznání je možné jen díky semisymbolické prestrukturaci, dané konstrukcí mřížky a pravidly použití.

Celá posloupnost kroků není explicitně opakována vždy, ale jakmile se v některé části operace vyskytnou problémy, je takto rozložena na nejmenší myslitelné kroky. "Mřížka" tedy jakoby vytahuje na povrch všechny kroky, které je třeba při restrukturaci původního příkladu na "řetěz" udělat. Vytváří předpoklady pro znázornění logiky restrukturací počtu a vytvoření korespondujících restrukturací symbolických.

Ve skutečnosti se však nezdálo, že by tyto předpoklady byly příliš využity. Účinek použití mřížky je totiž různý pro děti na různém stupni vývoje počítání. Tak by bylo možno vyčlenit tři skupiny dětí.

1. Děti, kterým mřížka nepomáhá: Pro některé děti nebyla mřížka prostředkem znázornění, jehož pohyby mají význam zrakové evidence logiky restrukturace, která zdůvodňuje restrukturace provedené v symbolické řadě. Byla něčím navíc, co musely vsunout mezi zažité postupy názorného zobrazování (počítání na prstech) a symbolický zápis.

Chápání příkladu bylo v rámci té logiky, v níž se pohybovaly, patrně natolik vzdáleno od zobrazení na mřížce, že se tu neustavila jakákoli korespondence. Na druhou stranu byla mřížka závazně používána zřejmě po příliš krátkou dobu (přibližně druhou polovinu května) - na to, o jak velký posun by patrně u nich šlo -, než aby mohlo být jejím používáním chápání příkladu ovlivněno.

2. Děti, které mřížka mate: Několik dětí zvládalo počítání přes desítku formou "obyčejných příkladů" v symbolické podobě, ale nechápaly postup na mřížce. S tím se pojily potíže s převedením těchto příkladů na "řetězy", ty však nebyly tak výrazné.

Mřížka přitom vyjadřuje příklad přesně ve formě přidávání/ubírání v řadě a její logika by měla být dostupná pro naprostou většinu dětí, snad vyjma dětí se specificky prstovým počítáním. Svou konstrukcí a způsobem práce by pak měla vést k chápání počítání jako pohybu v pevné řadě. Kdyby byla nad prázdnými kroužky mřížky (na něž se pak vkládala papírová kolečka) nadepsána čísla, byl by to nástroj podobající se svou strukturou řadě kartiček, zmiňované výše.

V čem tedy spočívá ono matení? Domníváme se, že právě v nárocích manipulace s nátrojem. Každá manipulace, která vyžaduje speciální akty pozornosti, interferuje s počítáním příkladu, a může znemožnit jeho řešení, jestliže to se pohybuje v logice pracující na hranici kapacity pozornosti či blízko ní.[27] Aby byla mřížka jako nástroj efektivní, musela by být dlouhodoběji nacvičována korespondence příkladů a operací na ní. Nepodstatná při tom není ani snadnost či nesnadnost manipulace: pro děti s neobratnou jemnou motorikou je

[27] Ještě na začátku druhé třídy jsme měli příležitost registrovat v hodině matematiky tuto epizodu: Učitelka řekla příklad a místo vyvolání hodila někomu míč. Ten ho chytil a odpověděl. Bylo zjevné, jak chytání a počítání následují po sobě, jak je pro děti nemožné chytat a počítat zároveň tak, aby např. řekly výsledek okamžitě po chycení míče.

v tomto provedení mřížky manipulace s papírovými kolečky dost obtížná. Pozornost je pak věnována technické stránce manipulace namísto logice operace.

3. Děti, které mřížku nepotřebují: Řada dětí znázornění na mřížce zvládá velmi brzy a brzy mřížku odkládá ve prospěch symbolických restrukturací. Odpovídá to domněnce, že pro ty, kteří se už předtím pohybují v logice adres a operátora a pochopili už desítku jako pouhý strukturující bod číselné řady, je znázornění na mřížce znázorněním logiky restrukturací, jejich pohybu a přechodů, které však lze dále provádět úsporněji a rychleji v režimu restrukturací symbolických.

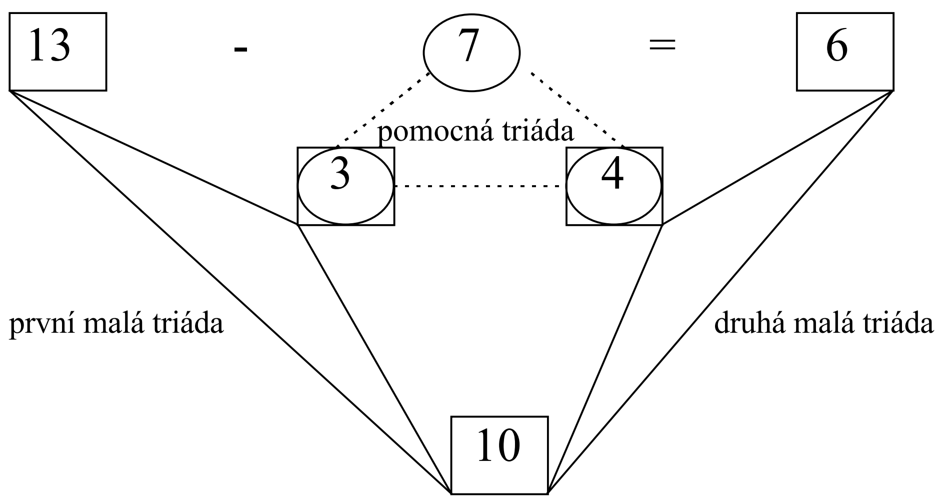
Symbolická restrukturace

Vraťme se k sestavení řetězu, který je výrazem symbolické restrukturace, v níž se na první pohled dělí neznámý velký krok na dva známé malé kroky. Jakou podobu (ze všech možných) mají dva malé roky mít, je dáno apriorním vyznačením desítky. Desítka tu nabývá významu závazného místa přechodu, dotyku dvou dílčích triadických struktur, místa, vůči němuž je výchozí "velká" triáda rozkládána na dvě malé. Právě to se děti při "přechodu přes desítku" učí.

Podle učitelky metodika předpokládala, že po provedeném prvním kroku, jímž se dostanou na desítku, děti už druhý krok "vidí samy". Ve skutečnosti tomu tak ovšem nebylo. Přestože "dojít na desítku" nepředstavovalo téměř pro nikoho problém, objevovala se v celém postupu řada chyb.

Jaká může být jejich logika? Předpokládáme-li zvládnutí jednotlivých příkladů v rámci oborů 0 až 10 a 10 až 20 jako doplňování simultánních triadických struktur, avšak postup přechodu mezi dílčími triádami při sestavování "řetězu" jako sukcesivní proceduru, pak celý postup přechodu přes desítku se rozpadá tři triadické restrukturace ve dvou liniích. Hlavní linie sleduje směr operace, pomocná je rozkladem operátora, vytvořením "struktury, která strukturuje" kroky v hlavní linii.

Posloupnost kroků tedy můžeme rozčlenit do tří fází, které u příkladu 13-7=6 vypadají takto:



Restrukturaci by bylo možno popsat také takto:

HLAVNÍ LINIE: **POMOCNÁ LINIE** :

I. První "malá triáda":

1. "dojít na desítku"

(vyřazení znaménka)

II. Pomocná triáda:

2. vzít trojku jako část velikosti operátora
3. pomocí trojky rozdělit sedmičku
4. doplnit čtyřku jako "zbytek" sedmičky

(přiřazení znaménka)

III. Druhá "malá triáda":

5. vrátit se na desítku
6. vzít "zbytek" jako zbytek velikosti operátora, tedy s původním znaménkem
7. vytvořit triádu desítky se "zbytkem" ve směru původního zadání operace.

V první fázi se utváří první malá triáda ve směru operace. Při závaznosti kroku "dojít na desítku" je ovšem první malá triáda řešena jako příklad na doplňování, v němž je směr operace dán jako vzájemné postavení východiska příkladu a desítky. Tak je fakticky znaménko vyřazeno už před začátkem restrukturace.

Druhá fáze je přechodem k pomocné triádě, která je vždy rozkladem operátora nezávisle na směru operace. Místem tohoto přechodu je číslo doplňující do desítky první triádu. V momentu přechodu mění svůj status: musí být identifikováno jako ta část rozkladu operátora, která ve vztahu k jeho velikosti určuje "zbytek".

Třetí fáze znamená vrátit se se "zbytkem" do hlavní linie operace. "Zbytek" je dalším místem, které má v proceduře dvojitý status: návratem k hlavní linii příkladu přestává být "číslem bez znaménka", ale nabývá opět původního směřování operátora. Tato "zbytková velikost", která v pomocné triádě ztratila nejen směr, ale také východisko, zakotvení, pak musí být při návratu do toku hlavní operace umístěna na místo, kde byla hlavní linie opuštěna, tedy na desítku. Spojení desítky, velikosti a směru "zbytku" pak umožňuje správně doplnit druhou malou triádu.

Z hlediska takto strukturované procedury je patrné, že dítě může dílčími chybami dospívat k nejrůznějším výsledkům, které se zvenku jeví jako zcela nesmyslné, jako naprosté tápání a hádání, které však přitom mají jistou vnitřní logiku. Zároveň je však obtížné proniknout do jeho postupů. Některé chyby ve výsledku neindikují chybný krok jednoznačně - tentýž výsledek může být výsledkem různých chybných kroků nebo jejich kombinací. Při snaze verbalizovat s dítětem jednotlivé kroky však se stejná chyba nemusí objevovat: právě explicitní rozložení na jednotlivé kroky a jejich verbální kontrola vytvářejí oporu, při níž se dítě stejné chyby nedopustí.

Při počítání příkladů v období přechodu přes desítku jsme u dětí registrovali množství chyb, které se ve většině případů zdají odpovídat opomenutí či záměně v jednotlivých krocích procedury:

[V hranaté závorce uvádíme typové výsledky při jednotlivých typech chyb.]

- Ukončení procedury na desítce: Dosažení desítky je považováno za výsledek celého příkladu. [13-7=10]
- Odečtení celého operátora od desítky: Po dosažení desítky není dokončen rozklad operátora, ale od desítky je odečten celý operátor. [13-7=3]
- (Nezaznamenali jsme další myslitelnou chybu: přičtení/odečtení celé výchozí adresy (namísto operátora) k desítce (nebo od desítky). Ale při přechodu k rozkladu v pomocné triádě byla někdy rozkládána výchozí adresa namísto operátora: "zbytek" byl odvozen z prvního čísla příkladu. (Je to samozřejmě možné jen tehdy, je-li toto číslo jednociferné, tedy při sčítání.) [8+7=16, 7+9=14]

Od desítky je odečtena první část operátora: Po dosažení desítky se odečte znovu první část operátora namísto zbytku. [13-7=7] (Zde je však otázkou, zda vůbec byl nějaký rozklad prováděn, neboli ve které ze dvou možných rolí tu dané číslo funguje. Je pouze vzdáleností mezi výchozím číslem a desítkou nebo už se změnilo v první část operátora?)

- Zbytek operátora jako výsledek: Výsledek rozkladu pomocné triády je považován za výsledek celého příkladu. [13-7=4]
- (Přičtení zbytku operátora k výchozí adrese - namísto k desítce - jsme nezaznamenali. Snad proto, že při rozkladu operátora je zbytek držen jako ta část, která přesahuje přes desítku. Desítka je v celé operaci výrazně přítomna. Návrat k ní byl nanejvýš opomenut, nikoli však zaměněn s návratem k jinému číslu.)
- Inverze v pomocné triádě: "Zbytek" je vytvořen doplněním inverzní triády - první část rozkladu je k operátoru "přičtena" namísto "odečtena". Takový zbytek může pak být považován přímo za výsledek [13-7=10] nebo použit ve druhé malé triádě. [11-7=2]
- Inverze v druhé malé triádě: "Zbytek" je k desítce přičten namísto odečtení nebo naopak [13-7=14].
- "Reflexní triáda" při rozkladu v pomocné triádě: Při některých chybách se zdá, jako by se instinktivní restrukturace při rozkladu operátora nezastavila jen u jedné triády (případně její inverzi), ale jako by generovala další inverzní triádu a teprve její doplnění je zahrnuto do triády s desítkou.

Toto vysvětlení je možná trochu spekulativní, ale umožňovalo by interpretovat některé chyby, jako např. 7+7=11 nebo 7+7=12. Zdá se, že takové falešné triadické reflexe by mohly pramenit z intuitivních triád s jedničkou a z triády pocházejících z prstových záměn v rámci jedné ruky ("fulhandová triáda" 3-2-5). Např. v příkladech s triádou 2-5-7 je v důsledku toho latentně přítomno číslo "3".

- Šiftové chyby: Dosažený výsledek zaznamenává změny jen na místě jednotek: [13-7=16]
- Mohli jsme také registrovat zdánlivé či falešné přechody přes desítku. Kontext počítání přes desítku patrně někdy vede k intuitivním triadickým restrukturacím i u příkladů, kde jsou neadekvátní. Tak v příkladu 19-6=7 můžeme uvažovat o tom, že výchozí číslo bylo doplněno do triády s nejbližší desítkou (20 je analogická 10, jak jsme to zmiňovali výše). Potom jednička vytváří pomocnou triádu a dochází se k doplnění "7", které je vzato jako výsledek příkladu. Není také vyloučeno, že 19 a 6 byly doplněny do triády trojkou a ta pak odečtena od desítky.

Jednotlivé dosud popsané typy chyb se pochopitelně mohou kombinovat. V důsledku nároků složitého postupu počítání přes desítku se také oživují některé staré chyby - např. ty, které pramení z načítání operátora na prstech. Při použití prstů vznikají nové potíže s orientací a častěji se objevují chyby "o 5". Přechod mezi levou a pravou rukou tu totiž není ekvivalentem pouze pro přechod mezi první a druhou pětkou, ale také mezi třetí a čtvrtou (11 až 15 a 16 až

20). Může se dokonce stát přechodem, na němž je zobrazován přechod přes desítku, a označovat tedy hranici mezi druhou a třetí pětkou.

Pro většinu chyb však platí, že chyba nemůže být spolehlivě pochopena, je-li analyzována jako izolovaný případ. Jen analýza situačního kontextu může např. ukázat, jak chybu ovlivnilo počítání předchozích příkladů. Navíc jednotlivá chyba není významově jednoznačná, chybný výsledek v daném případě může být dosažen různými postupy. Spolehlivější základ interpretace pak dává analýza opakovaných chyb, která indikuje shodnou logiku. [28]

Problém přechodu přes desítku spočívá právě v logice restrukturace původního příkladu. V popisu této restrukturace jako posloupnosti se jako klíčová jeví ona místa přechodu, jež v proceduře znamenají přechod mezi hlavní a pomocnou linií a jejich odlišnými režimy práce se znaménkem. Z tohoto hlediska se velká pozornost, která byla ve třídě věnována rozkladu operátora, jeví jako snaha ukázat logiku dílčí operace prováděné v pomocné triádě. Zápis tu má formu klasických "vidliček" jako pomocného kroku při vytváření řetězu:

```
9 + 5 = 9 + 1 + 4
   / \
  1   4
```

Zdálo by se, že sestavení řetězu už samo logikou svého postupu dává zpětně smysl provedené proceduře jako celku. Přesto jsme mohli pozorovat i opak:

8.6.95:

Leona zvládá řetěz, ale výsledek pak počítá na prstech pod lavicí špatně: *12-6=12-2-4=4 (?)*	*Prsty pod lavicí vidím. Chybný výpočet vypadá, že od desítky odečetla znovu šestku?*
Sáša: 12-7=12-2-5=3	*Stejná chyba jako předtím u Leony.*

V obou případech byl sice sestaven řetěz, ale obě dívky ho následně při počítání výsledku nechaly nevyužit, počítaly příklad po svém. Obě chyby přitom naznačují úlohu desítky v jejich postupu, přesto však řetěz není využit jako opora, ale jako speciální procedura navíc, prováděná na žádost učitelky.

Zdá se, že ani speciální nácvik rozkladu a sestavení řetězu, zamýšleného jako mezikrok odpovídající posloupnosti dvou malých triád, není zárukou toho, že děti pochopí celkovou logiku přechodu přes desítku a že tento přechod pro ně nabude smyslu, dokud chápání příkladu nedospělo k určité úrovni.

Vývoj logiky příkladu a desítková restrukturace

Vývoj každého dalšího složitějšího či pokročilejšího - ale do jisté míry každého nového - způsobu počítání se dá popsat ve 3 krocích.

[28] Hezkou ukázku přináší záznam z 8.6.95:

4 příklady. Tonda pracuje "manufakturně" - u všech nejdříve doplňuje jedničky, pak dvojky (na "12"), pak -2 (postup na desítku), pak teprve počítá:

12-3=12-2-7=

12-8=12-2-2=

12-5=12-2-5=

12-4=12-2-6=

Ve všech příkladech jde o stejnou kombinovanou chybu: namísto "zbytku" operátora je do řetězu zapsán výsledek, který je ale výsledkem odečtení celého operátora od desítky. Takto komplikovaná chyba je patrně možná právě jen při zápisu řetězu - bez něj by Tonda nejspíše proceduru zakončil už po odečtení operátora od desítky, takže výsledky by byly 7, 2, 5, 6.

1) Osvojení vnějšího, zvenku zadaného předpisu, receptu, který popisuje proceduru jako posloupnost kroků operace. Může se vztahovat jak k operacím v symbolické, tak v názorné rovině, může i kombinovat obojí, tzn. jako speciální krok formulovat znázornění (např. když se děti ve 3. třídě při sčítání pod sebe s přechodem přes desítku učí "držet si tu jedničku na palečku").

2) Ve druhé fázi je pochopena korespondence procedur - tedy většinou korespondence symbolických procedur s názornými. Ale není to vždy takto jednoduché. Např. učí-li se děti používat mřížku, musí nejdříve pochopit proceduru rozmisťování koleček na mřížce jako počítání příkladu - jdou tedy opačnou cestou. V podstatě jde o korespondenci známých, nepříznakových postupů, jejichž logika se už předtím ustavila, s postupy nově učenými, příznakovými.[29]

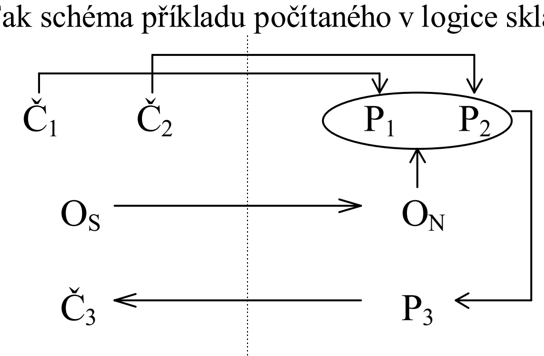
Korespondencí procedur se ustavuje logika nové (nově učené, příznakové) operace jako sukcesivní procedury. Mizí tím potřeba receptu jako něčeho, čemu musí být věnovna speciální pozornost, recept se mění v implicitní logiku procedury, na kterou se nemusí myslet. Ale tato logika vytváří teprve sukcesivní strukturaci, ve které může operace probíhat pouze jako jednosměrná posloupnost, jako pořadí kroků, které umožňuje operaci zopakovat, nebo ji přerušit a dokončit, ale neumožňuje provést ji jinak.

3) Přeměna sukcesivních kroků v simultánní struktury. To vytváří takovou strukturaci procedury, v níž je operace s elementy výrazem jejich vztahů v simultánní struktuře. Logika této simultánní struktury umožňuje okliky, variantní postupy i návraty, protože je strukturou obecnější než každá jednotlivá posloupnost.

Přechod k simultánní strukturaci se ovšem neděje pro celou proceduru naráz, nýbrž probíhá jako integrace částí sukcesivní procedury do dílčích struktur, které zůstávají částí celkové posloupnosti. Celková poslupnost se tím jednak zkracuje, jednak umožňuje uvnitř těchto integrovaných částí variovat postup.

Dítě se tedy původně učí příklad jako předepsané pořadí kroků přiřazování počtů (spočítání) operací (dát dohromady/dát pryč). Po pochopení logiky příkladu jako korepondence symbolické procedury s procedurou v názorném zobrazení se ustavuje logika tohoto předpisu a jeho nutnost mizí. Příklad však zůstává posloupností řady kroků. V procesu vývoje chápání příkladu jsme popsali jednotlivé stupně přeměny příkladu z rozvinuté posloupnosti kroků v úplnou simultánní strukturu symbolické triády. Vývoj mentální reprezentace příkladu spočívá mj. v tom, nakolik je příklad posloupností dílčích operací (kroků) a nakolik jsou tyto operace vyjádřeny jako vztahy v simultánní struktuře.

Tak schéma příkladu počítaného v logice skladu by bylo možno vyjádřit takto:



$Č_1$, $Č_2$, $Č_3$ - čísla v symbolické podobě příkladu; P_1, P_2, P_3 - odpovídající názorné počty; O_S - symbolická podoba operace, O_N - názorná podoba operace. Šipky označují jednotlivé

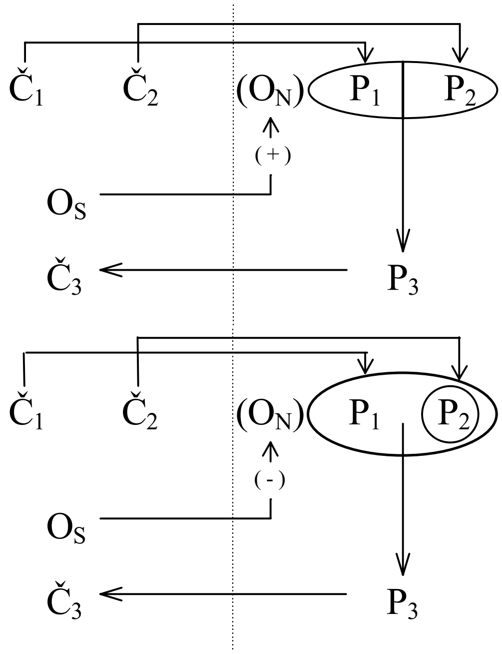
[29] Vypovídá to také o tom, že nemůžeme děti učit od začátku učit příklady na mřížce, tedy přiřazovat dvě neznámé, příznakové procedury. To možná také byl problém vyučování počáteční matematiky prostřednictvím množin.

kroky, přičemž šipky směřující z levé (symbolické) poloviny obrázku na pravou (názornou) odpovídají přiřazení jednak korespondujících čísel a počtů, jednak korespondujících operací.

Už brzy na počátku počítání však dochází ke zpřesnění původního předpisu. Předpis pro sčítání, který vede k pochopení logiky skladu dvou počtů, musí být u odčítání doplněn novým předpisem. Nový recept spočívá v zavedení nového kroku: "pozor na pořadí čísel". Zatímco logika skladu provádí operaci s dvěma počty bez ohledu na jejich velikost, je odčítání naproti tomu možné jen jako "od většího čísla menší". Logika "skladu a rozkladu" či "dvou částí a celku" vede k odlišení sčítání a odčítání jako různých operací.

Logika celku a částí je ovšem logikou malých počtů, tedy postupů, v nichž pozornost věnovaná spočítání nezastíní logiku operace s počty. Operace je zde integrována s podobou výsledku jako vztahu dvou početních Gestaltů, je vyjádřena jako vztah dvou názorných počtů: buď jejich sklad v nový Gestalt celku nebo jako zbytek původního Gestaltu. Mizí tu činnostní charakter početní operace a tím i její shoda se spočítáním jako pohybem v řadě.

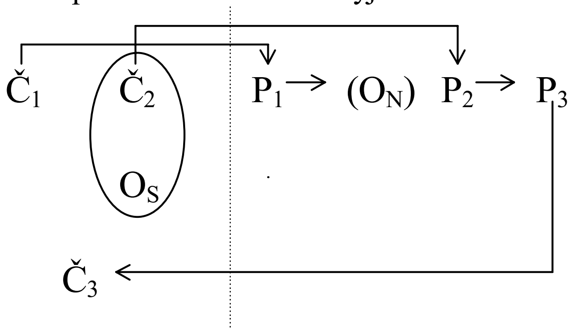
Schéma logiky celku a částí má dvě různé podoby v závislosti na tom, jde-li o sklad či rozklad:



Díky integraci operace a výsledku zde dítě anticipuje výsledek, ale dělá chyby ve směru jeho hledání. Je-li příklad zadán jako doplňování a operace se zdá vyjádřena znaménkem, je např. příklad 3+( )=7 doplněn jako 3+(10)=7. Dítě identifikuje podle znaménka operaci jako sklad a provede operaci odpovídající otázce "kolik dohromady", v níž je integrována operace a anticipace výsledku. Zajímavé je, že při znaménku "-" dojde dítě stejným postupem ke správnému doplnění. Otázka bude znít "kolik zbyde" a odečtením dvou zadaných čísel dostane dítě doplnění 7-(4)=3.

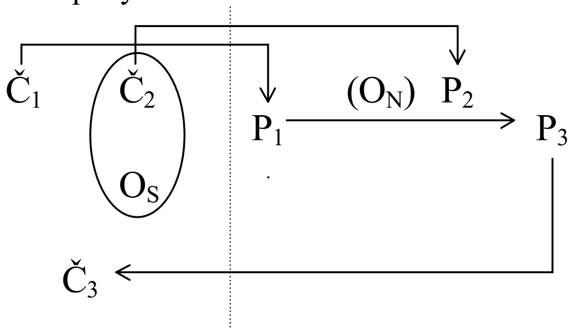
Naopak nutnost ordinálního spočítání při počítání s většími čísly akcentuje směrovost.[30] Počítání se mění v přidávání či ubírání. Integruje operaci s přidávaným či ubíraným počtem v jeden celek, ať už ho označíme jako "přidávání/ubírání počtu" nebo jako "přidávaný/ubíraný počet". Mohli bychom ho popsat také jako operátora, který tu má především vektorový charakter.

Schéma přidávání/ubírání lze vyjádřit takto:

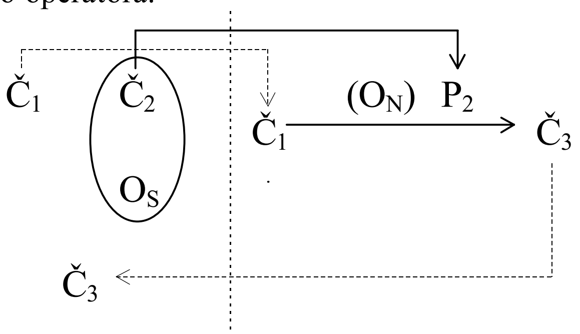


Na dalším stupni vývoje chápání příkladu je integrována posloupnost počítání do struktury výchozích adres a operátora. Posloupnost počítání se dále zkracuje, resp. jako posloupnost je udržována především nutností znázorňování a přiřazování čísel-počtů spočítáním.

Schéma pohybu ve fixní řadě:



Na dalším stupni se příklad chápe jako pohyb v číselné řadě a nutnost spočítání přetrvává jen pro operátora.



Co se tedy děje při přechodu přes desítku s počítáním dětí na různé úrovni vývoje chápání příkladu? A při jaké úrovni je vůbec tato restrukturace dostupná?

Je možno - alespoň hypoteticky - sestavit předpis, který by vycházel z postupů, jež jsou dostupné už na nejnižších úrovních? Pokusíme-li se o to, zjistíme, že je to prakticky nemožné. Už první krok - "doplnit na desítku" - představuje první problémy. Necháváme stranou, že neexistuje-li ještě představa fixní řady (paralelní s řadou číselnou), nekoresponduje tato

[30] To může patrně zpočátku zastínit pořadí čísel v příkladu a dítě je pak ochotno pustit se do příkladu, v němž se větší číslo odčítá od menšího. Již jsme se zmiňovali, že logickým řešením takového příkladu je pro něj nula.

závaznost s ničím reálným. Desítka tu nemůže být pochopena jako bod v řadě, jemuž je nyní přidělován zvláštní status.

Dojít na desítku znamená sestavit příklad na doplňování. Avšak ještě na úrovni chápání příkladu jako přidávání/ubírání se tu projevuje nemožnost variovat kroky posloupnosti, které nejsou integrovány do simultánní struktury. Dítě je schopno poté, co vezme jedno zadané číslo jako východisko příkladu, druhé číslo přičíst nebo odečíst, nikoli však vynechat ho, přejít k dalšímu kroku a dosadit ho až tam. Nemůže přejít k dalšímu kroku sukcesivní struktury posloupnosti, dokud neudělá krok předcházející. Volně se pohybovat (různě přeskupovat pořadí elementů) může jen v rámci struktury simultánně integrované. Může řešit odhadem příklad na doplňování, když mu ho zadá či pomůže sestavit učitelka, ale aby mohlo takový příklad sestavit samo, musí se volně pohybovat ve struktuře zahrnující vztah všech členů příkladu - ve struktuře adres a operátora.

Už převést logiku potřebnou k sestavení příkladu na doplňování na mechaniku předepsané posloupnosti kroků by tedy vedlo k dosti komplikovanému předpisu. V další fázi k tomu přistupují další problémy. Číslo, doplněné do desítky, nemá v tomto doplnění status cíle, ale prostředku. Na rozdíl od počítání řetězů, kde cíl jednoho kroku se stává východiskem dalšího, musí zde být východiskem dalšího postupu učiněn "prostředek" předchozího příkladu. Složitosti tohoto rozlišení odpovídá možná složitost rozlišení otázky "kterým číslem jsi doplnil" od otázky "na které číslo jsi doplnil".

Není-li k dispozici implicitní logika restrukturace, dítě k ní teprve má dospět opakováním postupu, pak v pomocné triádě je třeba předpisem zajistit také nakládání s dvojí informací, kterou operátor nese: o směru pohybu a o vzdálenosti (velikosti) tohoto pohybu. Tyto dvě informace procházejí v restrukturaci odlišným procesem a znaménko (směr) se musí držet odděleně od restrukturace velikosti. Znaménko musí být ponecháno jakoby před závorkou.

Ve chvíli, kdy se rozkládá operátor, musí ho děti vzít "bez znaménka", jako velikost. Kdyby to neudělaly, musely by v případě odčítání, např. 12-5, počítat se zápornými čísly: -5 = -2-3. V řetězu, který děti vytvoří, to tak na první pohled vypadá: 12-5=12-2-3. Ale ve skutečnosti to tak není, počítání se zápornými čísly je pro ně zatím nedostupné. Znaménko je drženo zvlášť a prostě se jen opisuje:

12-5 = 12-( )-( )
 /\
2 3

Operátor je tedy v procesu rozkladu pomyslně uzávorkován, oddělen od směru operace, brán ve své absolutní hodnotě. Postup restrukturace je tedy až sem nezávislý na znaménku v zadaném příkladu. (Připomeňme, že ani při doplňování na desítku nemusí být bráno v úvahu.) Přitom u většiny příkladů, které děti dosud počítaly, bylo znaménko klíčové pro určení postupu počítání. Celý předpis až sem jde proti jejich dosavadní zkušenosti s příklady.

Znaménko se zapojuje až v poslední fázi. Prostředek předchozího doplnění "zbytku" operátora je tentokrát použit opravdu jako prostředek, východiskem je desítka.

Řada chyb, kterých se děti dopouštějí a které se jeví jako záměny sčítání a odčítání či jako inverzní doplnění triád, je zřejmě způsobena právě interferencí směru operace v hlavní a pomocné linii.

I kdybychom nalezli pojmy, jak pro děti označit jednotlivá čísla s jejich proměnlivou pozicí v jednotlivých krocích restrukturace, byl by mechanický předpis natolik složitý a dlouhý, že by byl patrně prakticky nenaučitelný.

Ve skutečnosti nácvik přechodu přes desítku, jakkoli nutí přijímat některé kroky jako předepsané, jejichž smysl se stane zřejmým později, pracuje s předpokladem, že logika většiny dílčích kroků postupu je dětem zjevná a že opakováním řady příkladů pod kontrolou učitelky, která koriguje konkrétní chybný krok či opomenutí přinejmenším tím, že na ně poukáže otázkou, se stane zjevnou i logika celkového postupu.

Domníváme se, že základ pro to, aby byl tento přepoklad naplněn, vytváří teprve logika adres a operátora, objevující se nejdříve při chápání příkladu jako pohybu ve fixní řadě. Ta umožňuje chápat restrukturaci při přechodu přes desítku jako rozdělení celkového pohybu operátora na dva pohyby dílčí.

Při plně rozvinuté sukcesivnosti kroků odpovídajících této logice je ovšem restrukturace velmi dlouhou posloupností. Když ji budeme předpokládat jako posloupnost tří příkladů, z nichž každý je řešen 4 dílčími kroky (viz výše uvedené schéma), půjde o 12 kroků. Nejspíše se ovšem velmi rychle zkracuje tím, že desítka má v používaných názorných zobrazeních už okamžité vyjádření. Už tím se posloupnost zkracuje na 10 kroků. Další zkracování se děje zkracováním postupu v malých triádách (v hlavní linii). Opakováné dočítání do 10 se zkracuje nejprve na dva kroky tím, že po expozici výchozí adresy je následně rovnou "odezřen" počet zbývající do 10 nebo přesahující 10. Posléze se "doplnění na 10" řeší jako jediný krok - doplnění symbolické triády.

Podobně se zkracuje přičítání/odčítání zbytku operátora v druhé malé triádě. Zejména při sčítání je tento výpočet brzy řešen prostřednictvím desítkového šiftu - k číselnému vyjádření "zbytku" se připíše jednička na pozici desítek nebo se přidá přípona "-náct".

Jako přechodnou fázi vývoje desítkové restrukturace, který vyšel od úrovně příkladu jako pohybu ve fixní řadě, můžeme postulovat takový postup, při němž jsou kroky v hlavní linii (v malých triádách) řešeny jedním krokem jako doplnění symbolických triád, kdežto pomocná triáda se řeší posloupností odpovídající pohybu ve fixní názorné řadě. V tuto chvíli je rozklad posloupností šesti kroků. Problematickým místem tu zůstává sestavení pomocné triády. Právě na této úrovni by měly děti těžit ze zápisu rozkladu operátora jako řetězu.

Naproti tomu při logice přidávání/ubírání (o 1 stupeň nižší) zůstává řetěz mimo logiku chápání příkladu. Buď je dítě zaměřeno na celek operace a uniká mu způsob, jak desítka dělí operátora - řetěz je sestaven chybně. Nebo je dítě zaměřeno na rozklad středního členu, ale uniká mu souvislost s celkem operace. Rozklad, který je rozkladem operátora objektivně, "o sobě", není rozkladem operátora pro dítě, v jeho subjektivní logice.

Nácvik rozkladu operátora - "vidličky" - je jakoby zaměřen právě na nejobtížnější místo celé restrukturace. Avšak jeho obtížnost nespočívá v samotném rozkladu čísla, resp. v doplnění druhého sčítance, je-li dán jeden sčítanec a součet. Ukázali jsme, že to je pro děti dostupné už v logice "celku a částí" - a nácvik rozkladu může pro ně aktivovat právě tuto logiku, která je postačující právě pro chápání toho, jak je každé číslo možno zapsat jako součty různých dvojic čísel menších než ono samo. Obtížným momentem je právě integrace rozkladu do procedury přechodu přes desítku - tzn. pochopení jeho logiky nikoli jako izolovaného příkladu, ale v rámci souvislostí restrukturace. To předpokládá pochopení rozkladu nikoli jako jakéhokoli rozkladu neuspořádaného množství, ale jako rozkladu pohybu v řadě.

Pro děti na různém stupni vývoje tak nabývají "vidličky" různého smyslu. Pro děti, které nedosáhly úrovně chápání příkladu jako pohybu ve fixní názorné řadě, pak není rozklad rozkladem pohybu operace na dvě části a v tom smyslu integrální součástí operace, nýbrž arbitrárním požadavkem učitelky, kterému vyhovují bez pochopení jeho souvislosti s přechodem přes desítku.

Jsou restrukturace nutné?

Počítání do dvaceti je možné učit i jinak než jako přechod přes desítku a tedy s nutností pohybu mezi různými triadickými strukturami. Hypoteticky je možný postup (a z ústního podání jsme zaznamenali jeho existenci), kdy se prostě učí jednotlivé triadické struktury - "příklady" - až do 20. Tímto způsobem se zvládají rovnou "velké triády" zahrnující přechod přes desítku jaksi skrytě, aniž by se desítka vyznačovala jako něco zvláštního. Možné zdůvodnění tohoto postupu by mohlo odkazovat k tomu, že všechny triády v tomto oboru lze prezentovat na příkladech, v nichž operátor nepřekročí 10, a bez rozkladu "jednotkového operátora" se lze při dalším počítání v desítkové soustavě obejít. Ale i při vyznačení desítky může toto vyznačení být bráno jako pomocné a přechod mezi triádami jen jako dočasná opora.

Sami jsme pozorovali případy v naší třídě, kdy obtíže při přechodu přes desítku měly děti jen tehdy, byl-li vyžadován rozklad, tedy desítková restrukturace. Stejným dětem v téže době však nečinilo problémy zjistit správné výsledky příkladů přes desítku a tedy v tomto smyslu správně počítat do dvaceti.

8.6.95 - sedím vedle Tondy:

Příklady: 5+7=	*Příklady mají z tabule opsat do sešitu a vypočítat. Sleduju při tom Tondu.*
Hlášení ředitele, Tonda přestává počítat(?) - zdá se, že výsledek opsal od Sáši.	
Teď se už rozjíždí - 6+5, 7+8, 5+8 (Blanka se hlásí, že je hotova), 9+9, 7+7, 9+4, 8+6. *Počítá pomalu, ale dobře - lehce se mu pohybují rty a také prsty na levé ruce. (Ale ty vypadají, že jen tak lehounce "nervózně" hrají, ne že počítají.)*	*Tonda vypadá hrozně pomalý - když byl v půlce, Blanka byla hotová. Je to ale jakoby jiný druh pomalosti než u Leony - ta pořád jela, pomalu, ale soustředěně. Tonda snadno odbočuje, nechává práce, lelkuje. Tady to ještě nebylo tak patrné, ale později, ve třetí hodině je to markantní. Navíc si ulehčí, kde může.*

O chvíli později:

Otevřít "pracovní sešit na s.18" *Dole máme příklady. (Tonda: "panebože!"):* *4-2-...=0, 6-2-...=0, 9-2-8=0 (Romanka) - mají si spočítat a ukázat na prstech.*
5-2-3=0 *Tonda: "To je lehký." (Přišel asi na to, že vlastně počítá výsledek prvních dvou členů.)*

Později:

"Sloupek 61": *12-7: Umíme to takhle zpaměti? - někteří ano, ostatní si musí pomoci. Jak? - Řetězem. (Leona)*
Tonda má ukázat výsledek. Ukazuje 4 prsty a říká 5. Učitelka poukazuje na rozpor a Tonda přizpůsobuje výsledek prstům.

O něco dále:

4 příklady. Tonda pracuje "manufakturně" - u všech nejdříve doplňuje jedničky, pak dvojky (na "12"), pak -2 (postup na desítku), pak teprve počítá: *12-3=12-2-7=* *12-8=12-2-2=* *12-5=12-2-5=* *12-4=12-2-6=* *Je úplně mimo.*	*Ale postup je týž u všech příkladů! V prvním kroku dočetl do desítky první člen příkladu, v druhém kroku dočítá do desítky druhý člen a výsledek také odčítá. To je zvláštní figura: Poprvé se z dvanáctky dostává na desítku a při tom odčítá, což je v souladu se zadáním příkladu. Ale v druhém kroku musí k menšiteli, aby se dostal na desítku, přičítat - a to je rozpor. Tondovi to ale vůbec nedělá potíž, a to co musí do desítky přičíst, vzápětí zapisuje jako menšitel.*

Ještě dále:

Tonda bez problémů potichu poslední sloupek (bez řetězů mu to jde!? - jen nad 11-7 váhal).	*Potvrzuje to zase problém s desítkou, která je při postupu přes řetěz příliš vytažena a její dominance ve struktuře postupu vede k chybám? Tahle úvaha ovšem nevysvětluje, jak počítá Tonda tady. Měl jsem se ho zeptat. Doufám, že neopisoval, jak jsem si toho všiml jinde. Tady bych to snad poznal.*

Tondovo počítání ukazuje, že počítat správně do dvaceti obyčejné příklady lze v rámci logiky přidávání a ubírání, zatímco restrukturace při této logice přináší problémy. To nás nutně staví před otázku, zda je desítková restrukturace jen pomocným postupem. Je tomu opravdu tak, že když děti plynule zvládnou - jakýmkoli způsobem - příklady do dvaceti bez opory "řetězu", může být restrukturace zapomenuta jako něco nepodstatného? Že někteří ji už od začátku nepotřebují, jen je zdržuje a mate? Pak by ovšem u nich "bezpečné" počítání do příkladů do dvaceti nebylo nutně podmíněno ovládnutím přechodů mezi strukturami. Je možno počítání s restrukturací označit za "mechanické" - v tom smyslu, že tu jde jen o ovládnutí jednoho předpisu navíc, který je ovšem zbytečný a arbitrární a vývoj dětského počítání by se bez něj obešel?

Domníváme se, že lze poukázat na některé klíčové momenty, které svědčí o tom, že desítková restrukturace - ať je didakticky deklarována jakkoli - zásadně přesahuje význam pouhého dočasného pomocného postupu.

- Jedním z nich je vytváření konceptu desítkové soustavy. Desítky v ní budou nutně vyznačeny jako něco podstatného. Jestliže při přechodu přes první desítku jako by ještě desítkové členění nebylo nutné, pak v oboru "do 100" by už bez něj chyběly potřebné orientační body. Děti tu budou nuceny při řešení příkladů čísla rozkládat přinejmenším stále znovu na desítky a jednotky a zpět: příklad 86-27 nutně rozkládá "27" na "20 a 7", 66-7 je pak zvládnutelné jako analogie restrukturace při přechodu přes desítku. Přechod přes desítku se tu stává přechodem přes jakoukoli desítku a později i přechodem v dalších řádech. Logika sčítání a dělení víceciferných čísel pod sebe je bez konceptu desítkové soustavy nedostupná. Bez desítkové restrukturace zůstává možná desítková soustava chápána jen ve svém nejpovrchnějším významu: jako skládačka, která umožňuje konstruovat řadu čísel až do nekonečna.

Ti, kteří si desítku dosud nevyznačili a nezpracovali přechod přes ní jako restrukturaci, budou patrně mít dvě možnosti. Buď si jí v příkladech do dvaceti dodatečně vyznačit a učinit z nich pravidla přechodu z jakékoli vyšší desítky do nižší (a naopak) nebo se učit další množství izolovaných příkladů a 66-7 považovat za zcela jiný případ než 56-7. Druhá možnost je slepou uličkou a je možno se ptát, zda děti, pro něž nebyla desítka vyznačena jako místo, vůči němuž se rozkládá "jednotkový operátor", nebudou mít více potíží s nalezením východiska z ní.

- Dalším momentem je vývoj chápání toho, co je příklad, vývoj jeho logiky. Opakované rekonstrukce smyslu posloupnosti dílčích kroků prostřednictvím návratu k zápisu původního příkladu a k jeho rozložení do řetězu jsou primárně způsobem dosažení správného výsledku, způsobem zajištění kontroly. Avšak sekundárně jsou způsobem, jakým se počítání posouvá k vyšším úrovním mentální reprezentace příkladu: zrychlování a posléze automatismus malých triád už znamená přechod k pohybu nejprve v číselné řadě. Např. v první malé triádě je úkolem dítěte - bez ohledu na jeho individuální vývoj a individuální postupy - dostat se na desítku a řešit vlastně úlohu na doplňování, jejíž zadání vnucuje strukturu "vzdálenosti mezi dvěma body", kterou převádí na vzdálenost mezi dvěma čísly.

Požadavek složitější strukturace postupu vede ke složitější strukturaci chápání příkladu, k takové strukturaci "myšlení příkladu", která postupně integruje sukcesivní postupy do simultánních struktur. To zkracuje posloupnosti operací a uvolňuje kapacitu pro jejich začlenění do dalších souvislostí - do příkladů, v nichž se bude kombinovat sčítání/odčítání s násobením, nebo do slovních úloh, v nichž bude třeba identifikovat nové, neznámé, dosud nesamozřejmé korespondence dějů ve slovních zadáních na jedné straně a matematických operací na straně druhé.

Problémy korespondence slovního zadání a matematických operací, které anticipujeme jako jedno ze silných témat dalšího vývoje počítání, byly v první třídě předznamenány v problémech s úlohami typu **"o několik více/méně"**.

20.4.95:

Slovní úloha 5/26 - jen Klárka špatně, ostatní šeptali správný výsledek (Járovi je 14 roků, Heleně o 3 méně). Učitelka chodí po třídě a nechává si šeptat výsledek.
(Marta mi říkala před vyučováním, že tyhle příklady "o dvě méně a tak" jí moc nejdou.)
Marta nepočítá čtvrtý příklad sama, baví se o něčem se Sášou, zapisuje příklad dodatečně. *Ani při následující slovní úloze nesleduje text, vypadá roztěkaně. Plní pokyny jakoby o krok pozadu. (Nechápe?)*

11.5.95:

Do levé ruky číslo 13, do pravé "o 5 větší". (Pletou levou ruku.) V pravé ruce má Jiřina 20, Olda 19.	*Pletou si levou a pravou, protože se soustřeďují na čísla? Jiřinka bere první číslo do levé, ale když hledá výsledek (opravdu jen <u>hledá</u>, protože ho "opsala"!), přehazuje původní číslo do pravé a výsledek zvedá levou, takže to má opačně. Ale popletlo to víc dětí.*
Jiřina šmíruje kolem, opisuje. *Do levé 15, do pravé o 5 menší - Jiřina bloudí rukou někde kolem 5, pak opisuje od ostatních.*	*Jiřina evidentně není schopna tímhle způsobem počítat. Víceméně to ani nezkouší, hledá výsledek v okolních lavicích.*

Normálně čtené příklady Jiřina zvládá. Jasně jí přitom běhají prsty. (Ale u 19-4 snad bez prstů.)	*U normálně čtených příkladů ukazují také výsledky na kartičkách. Tady je Jiřina rychlá. Teď mě napadá, že rozdíl mezi těmito dvěma situacemi je také v prezentaci příkladu:* *V prvním případě se chce "o pět větší", "o tři menší", kdežto ve druhém je to už rovnou klasická aritmetická figura.*

V čem je problém zadání "o několik více/méně"? Bylo by to možno vyjádřit tak, že v určité fázi vývoje svého matematického myšlení umí už dítě sčítat a odčítat, ale ještě to nechápe jako výraz vztahů "o několik více/méně". Nejde přitom o to znát u slov "více/méně" jakýsi význam vůbec. Dítě např. jasně ví, co je "více" a co "méně" a běžně tato slova používá. Problém spočívá v tom, že je chápe ve významu vnitřně nediferencovaného, početně nestrukturovaného rozdílu. K jejich chápání ve významu strukturovaného rozdílu (jenž nevyjadřuje pouze "více či méně", ale právě "o tolik a tolik více nebo méně") dojde v korespondenci s příklady na sčítání a odčítání. K té však nedochází automaticky.[31]

Když učitelka vysvětluje, jak takový příklad vypočítat, musí převést zadaný konkrétní vztah na operaci, na to, co je v dané úloze třeba s čísly udělat. Stačilo by tedy více procvičovat podobné příklady a ustavit korespondenci mezi operacemi a vztahy? Tedy podobně jako "dát dohromady" znamená "budeš sčítat" zavést pravidlo korespondence "více než" znamená, že "budeš sčítat"? Ale takové pravidlo by bohužel platilo jen někdy: má-li Honza o dvě kuličky více než Pavel, není ještě jasné, zda budeme sčítat. Víme-li, kolik má Honza, a chceme vědět, kolik má Pavel, budeme naopak odčítat.

Je zjevné, že zadání, při němž porovnání dvou počtů má stanovit strukturovaný rozdíl mezi nimi, je jazykově složitější než zadání typu "dát dohromady/ dát pryč". Zadán je totiž vztah mezi dvěma čísly, nikoli operace. Situace porovnávání ve všech svých variantách a jejich synonymických ekvivalentech však nebyla systematicky probrána ani v samotné rovině jazykového popisu reality. Tím spíše nemohla být probrána korespondence s jednotlivými formami příkladu jako jejich matematickými výrazy.

Aby pak dítě pochopilo tuto úlohu bez speciální výuky, spontánně, musí zřejmě dospět k určité integraci posloupnosti procedury příkladu do vztahové struktury mezi čísly. Představa příkladu jako simultánního vztahu mezi dvěma čísly vzdálenými o třetí číslo je poprvé obsažena ve struktuře adres a operátora. Naproti tomu logika přidávání/ubírání je pro řešení takového zadání postačující tehdy, je-li jasně definována operace, kterou je třeba provést.[32]

Tyto úlohy byly probírány ve druhé polovině dubna. V souladu s postupem v učebnici byly situovány ještě před přechod přes desítku. Domníváme se, že zvládnutí přechodu přes desítku, které by podle naší interpretace mělo u většiny dětí vést k posunu logiky počítání, vytvořilo lepší předpoklady i pro pochopení těchto příkladů. Mělo by to platit např. o Martě, která si stěžovala, že jí tyhle příklady nejdou (20. dubna). 2. června nám totiž učitelka sděluje, že Marta, která byla vždycky v počítání pomalá, si přišla na to, jak to s rozkladem je, a bez problémů ho zvládla.[33]

---

[31] Přinejmenším se zdá, že ke spontánnímu objevu tohoto významu (v jeho úplnosti) v naší první třídě nedošlo. Navíc jsme mohli pozorovat velké problémy s takovým zadáním ještě ve druhé třídě na zcela jiné škole.

[32] Pro rozdíl zadání, který tu rozebíráme, užívá zřejmě didaktika matematiky koncept "polarity mezi konceptuálním (deklarativním) a procesuálním myšlením" - viz Hejný, 1995, s.391.

[33] Citací záznamů bychom mohli to, co interpretujeme jako posun logiky počítání příkladu, dále doložit. Kazuistiky dětí by totiž byly nejlepší verifikací námi předpokládaného postupu vývoje. Rozsah této statě by tím však neúměrně vzrostl.

ZÁVĚR

Povinnost shrnout v závěru hlavní teze statě jsme si do jisté míry ušetřili prezentací schémat vývoje, jak jsou uvedena v kapitole "Schéma vývojových fází počítání". Na tomto místě by snad bylo možno schéma doplnit či zpřesnit. Ukázali jsme, že přechod k vyšší logice znamená také posun simultaneity: přechod k vyšší strukturaci příkladu znamená, že to, co v předchozím stadiu bylo dvěma postupnými kroky, na které se postupně přenášela pozornost, je nyní integrováno do simultánní struktury, která je zřena naráz, v jednom kroku, v jednom aktu pozornosti. Tato integrace zahrnuje postupně stále větší část posloupnosti a počet sukcesivních kroků se tim snižuje.

Logika příkladu	**Zadání (výchozí elementy)**	**Operace (forma pohybu)**	**Výsledek (výsledné elementy)**	**Názorné vyjádření počtů spočítáním**	**Počet kroků v posloup-nosti**
Sklad počtů	Neuspořádané počty předmětů: 2 hromádky	Dát dohromady	Neuspořádaný počet: 1 hromádka	3 počty	6
Sklad a rozklad počtů	Neuspořádané počty předmětů: 1 nebo 2 hromádky	Zjistit celek: spočítat dohromady nebo zjistit zbytek: dát pryč a spočítat, co zbylo		3 počty	5
Prodlužování/ zkracování názorné řady	Od prvního uspořádaného počtu (řady) přidat nebo ubrat druhý (prodloužení/zkrácení první řady druhou)		Uspořádaný počet: kratší nebo delší řada	3 počty	5
Pohyb ve fixní názorné řadě (načítání operátora od názorné adresy)	Přechod od zadaného bodu (předmětu) řady k jinému bodu řady ležícímu v zadaném směru a vzdálenému o zadaný počet bodů (předmětů).			3 počty	4
Pohyb v číselné řadě (načítání operátora od číselné adresy)	Přechod od zadaného čísla k jinému číslu ležícímu v zadaném směru a vzdálenému o zadaný počet čísel.			1 počet	2
Doplňování číselné triády	Doplnění dvou zadaných členů triády třetím, odpovídajícím zadané operaci.			žádné	1

Logika příkladu	**Integrace do simultánní struktury**	**Analogie příkladů**
Sklad počtů	žádná	Izolované příklady
Sklad a rozklad počtů	operace a výsledek	Komutativnost částí → podobnost příkladů: 1. na sčítání: a+b=c <=> b+a= c 2. na odčítání: c-a=b <=> c-b=a
Prodlužování/ zkracování názorné řady	operace a přidávaný/ubíraný počet ("vektorový operátor")	Vnější inverze (protikladnost inverzních triád) jako nezaměnitelnost sčítání a odčítání: a+b=c <≠> a-b=d
Pohyb ve fixní názorné řadě (načítání operátora od názorné adresy)	2 adresy a operátor	Vnitřní inverze (inverze pohybu v téže triádě) jako podobnost sčítání a odčítání: a+b=c <=> c-b=a --- podobnost inverzních příkladů s komutativní záměnou:
Pohyb v číselné řadě (načítání operátora od číselné adresy)	2 adresy a operátor	
Doplňování číselné triády	triáda	

		a+b=c <=> c-a=b

Druhé schéma ukazuje, jak postup integrace do simultánní struktury umožňuje chápání různých posloupností jako variant pohybu v téže struktuře. To koresponduje s chápáním podobnosti příkladů.

Snažili jsme se ukázat, jak dětské počítání v první třídě směřuje k počítání v plně symbolických triádách. To vlastně už svým způsobem počítáním není - operace se mění ve vztah. Ačkoli se na první pohled zdá, že takové počítání je totožné s naučením příkladu zpaměti jako říkanky, jehož jsou děti schopny už na počátku první třídy, logika, která stojí za touto vnější podobností, je naprosto rozdílná.

Děti sice většinou nedospějí k plné triadizaci všech příkladů - zmiňovali jsme např. rozdíl mezi lehkými či oblíbenými příklady a příklady těžkými. Přesto dospívají k triadické strukturaci příkladu v tom smyslu, že příklad se pro ně stává samozřejmou podobou vyjádření vztahů tří čísel. Aniž bychom chtěli příliš předbíhat analýzu, která nás čeká u materiálu nasbíraného ve druhé třídě při násobení a dělení, zdá se, že struktura příkladu, jak vznikla na základě sčítání a odčítání, je nezbytným předpokladem osvojení násobilky. Při té se totiž ukazuje znázorňování jako poněkud problematické a zdá se, jako by s ním děti nepracovaly nebo ho nevyužívaly. Logika struktury příkladu jako by už do jisté míry zdůvodnění v korespondenci s názornými procedurami nepotřebovala - děti si osvojují násobení a dělení v mnohem větší míře "shora", jako symbolickou strukturu, jejíž logiku odvozují ze struktury příkladů na sčítání a odčítání.
Simultánní povaha triád však není ukončením vývoje - naopak, přinese patrně nové problémy. Následující záznam je z posledního čtvrtletí 2. třídy. (Nejde však o třídu, kterou jsme sledovali v prvním roce školní docházky.)

22.5.96

Cv. 4/48: Pepík odhadl šířku lavice na 50 cm. Pak naměřil 45. O kolik se lišil jeho odhad od naměřené délky?	
Slávek k tabuli - jak to spočítá?: 50-5 (!) - učitelka: Těch pět přece nevíš. *[Korespondence se slovním zadáním vyžaduje vyznačit v simultánní struktuře sukcesivnost!]*	*Slávek samozřejmě ví, protože triáda okamžitě naskakuje.*

Tady se možná dostáváme k tomu, co znamená intuitivní užití triád: je to struktura zřená naráz, bez rozlišení různosti sukcesivních linií jednotlivých možných příkladů. Samozřejmě, má výraz pouze v příkladu - ale je úplně jedno, který z možných příkladů to je - je to ten první, který mě napadne.

Problém se přesouvá někam jinam, než byl původně. Nalezení chybějícího členu triády je tak okamžité, že se okamžitě včleňuje do struktury a mizí jeho rozlišení jako členu, který byl původně neznámý, který byl hledán. Tím ovšem mizí korespondence se zadáním úlohy. Na první pohled se to jeví jako to, že dítě "zapomene", na co se úloha ptala - je to učitel, kdo musí držet, připomínat či formulovat otázku.

Podstata tohoto fenoménu spočívá v odlišném způsobu strukturace jazykových a číselných vztahů. Slovní zadání je vždy (a tím spíše pro děti s jejich pomalým čtením) sukcesivní struktura. V matematice tomu odpovídá procedura, příklad. Mezitím se však už děti dostaly k vytvoření simultánních triadických struktur. Zatímco na počátku vytváření korespondence operací či procedur (sestavování příkladů) byly na obou stranách sukcesivní struktury - matematická procedura byla budována člen po členu a nalezení výsledku se krylo s nalezením odpovědi, nyní má řeč zadání sukcesivní podobu, kdežto v matematice (resp. v aktuální dětské strukturaci číselného prostoru) jí odpovídá struktura simultánní.[34]

Další vývoj tedy musí zrušit tuto intuitivní simultánnnost triád a musí je rekonstruovat jako obecný výraz všech možných příkladů, jejichž struktura odpovídá všem možným typům zadání slovních úloh s danou triádou čísel. Zpočátku ovšem tato suma možných příkladů (a zadání) nebude uvědomována zcela zřetelně ve své totalitě, nýbrž vždy jen v nalezení konkrétní korespondence mezi zadáním a příkladem. (Možná ani v rozvinuté podobě neexistuje ve vědomí tato totalita jako totální zřetelná přítomnost všech možností, ale jen jako zřetelná možnost jejího kombinatorického zkonstruování, daná jako pochopení totality vztahů v triádě.) V zadání je pak otázka tím, co určuje výběr z možných příkladů a odpověď tím, co prověřuje správnost výběru.

Tak se každý další krok vývoje subjektivní logiky počítání, vývoj formy či struktury, v níž je myšlen příklad, děje v rámci počítání jako činnosti a jako jeho důsledek. Nejde ovšem o jakékoli počítání. Vývoj se děje jako důsledek posloupností a strukturací nástrojů kulturní výzvy, kterou představuje svými nabídkami a požadavky učitelka jako reprezentant kulturní instituce školy.

[34] To ovšem děláme jeden velmi zjednodušující předpoklad: že totiž posloupnost textu odpovídá posloupnosti dějů, které text popisuje. Ve skutečnost tomu ovšem zdaleka tak být nemusí. Obtížnost slovních zadání se pak bude nejspíše zvyšovat mj. i tehdy, bude-li mezi posloupností textu a posloupností dějů rozpor. Zlomyslná slovní úloha např. sdělí v jakoby nepodstatné poznámce na konci textu něco, co zcela mění smysl údajů uvedených předtím.

LITERATURA

V textu je jen málo přímých odkazů, neboť je především zmapováním souvislostí materiálu, které si teprve vyžádá důkladnější komparaci s literárními prameny. Přesto je řada užívaných pojmů a prezentovaných idejí pochopitelně sycena různými zdroji. Uvádíme proto také některé tituly, které jejich formulování nesporně ovlivnily, ač tento vliv nebyl zmíněn explicitně.

Kromě literatury pak je nutno vyzdvihnout také ovlivnění diskusemi uvnitř výzkumného týmu Pražské skupiny školní etnografie. Přestože specifikace tohoto vlivu by byla příliš obtížná, není tím jeho význam ve srovnání s literárními prameny rozhodně menší.

Boothby, R.: Death and desire. Psychoanalytic theory in Lacan's return to Freud. Routledge, New York and London 1991.

Hejný, M.: Zmocňování se slovní úlohy. Pedagogika, 1995, 4, s. 386-399.

Hejný, M. a kol.: Teória vyučovania matematiky 2. SPN, Bratislava 1990.

Hruša, K., Dlouhý, Z., Rohlíček, J.: Úvod do studia matematiky. Univerzita Karlova - Karolinum, Praha 1991.

Jakobson, R.: Dialogy. Český spisovatel, Praha 1993.

Kegan, R.: The evolving Self. Problem and process in human development. Harvard University Press, Cambridge (Mass.), London 1982.

Kučera, M.: Láska v jedenácti a dvanácti. Pedagogika, 1994, 1, s. 68-79.

Piaget, J: Psychologie inteligence. SPN, Praha 1970.

Piaget, J., Inhelderová, B.: Psychologie dítěte. SPN, Praha 1970.

Pražská skupina školní etnografie: První třída. Průběžná grantová zpráva pro GA ČR (grant č. 406/94/1417).

Vygotskij, L.S.: Myšlení a řeč. SPN, Praha 1976.

Vygotskij, L.S.: Vývoj vyšších psychických funkcí. SPN, Praha 1976.

Wadsworth, B.J.: Piaget's theory of cognitive and affective development. Longman Inc., New York 1989.