NÁSOBENÍ V DRUHÉ TŘÍDĚ

Miroslav Rendl

OBSAH

ÚVOD

Tento text navazuje na stať "Vývoj počítání v první třídě", která je součástí publikace Pražské skupiny školní etnografie "První třída". Charakter prováděného výzkumu a metodologické postupy jsou popsány již tam a není nutno je opakovat. Je však třeba dvou upozornění.

1. Třída, kterou zde popisujeme, je zcela jinou třídou z jiné školy, než byla ta, kterou jsme navštěvovali po dobu první třídy. Bylo to způsobeno rozdělením oné první třídy do dvou dalších, v nichž z žádné z nich nám pro zásadní nesouhlas učitelek nebylo umožněno pokračovat ve výzkumu ve druhé třídě.

2. Předkládaný text je textem předběžným, který navíc tematicky pokrývá jen část problematiky spojené s počítáním a učením (se) matematiky ve 2. třídě. Kromě násobení by bylo třeba (a empirický materiál k tomu existuje) analyzovat postupy na počátku druhé třídy, kdy bylo opakováno učivo z prvního ročníku. To nám do jisté míry umožní zpětně ověřit obecnější platnost našich závěrů z první třídy.

K dalším tématům bezesporu patří rozšíření oboru sčítání a odčítání do 100, které se odehrálo v prvním pololetí druhé třídy. Samostatným tématem pak bude geometrie.

Ještě před pokusem o předběžnou analýzu, jak se děti učí násobení a dělení, můžeme konstatovat jeho nesamozřejmost pro děti, která dospělého na první pohled překvapí.

11.1.96:

Učebnice s.38 (Slávek počítá židličky na s.39). *Počítá je po jedné, ačkoli jsou v pravidelném rastru. Ještě neznají násobilku.*

Když se nám v první třídě zdálo po několika prvních pobytech ve třídě (3.11.94), že některé děti už umějí dokonce násobit, vycházeli jsme z tohoto případu:

Na obrázku v učebnici je pět koček. Učitelka klade otázku:

Kočičky - hlaviček je pět - ale oušek? - a řada(?) dětí ví, že 10.	*Některé děti tedy umí i násobit? Učitelka tvrdila, že to byli Vítek a Lojzík, kdo věděli odpověď.*

Z hlediska následujících předběžných úvah o násobení ve 2. třídě se však tato příhoda jeví v jiném světle: násobení dvěma, jak dále naznačíme, není ještě vlastním násobením. Je to speciální případ, kdy formální struktura násobení je nejsnadněji převoditelná na sčítání, a to dokonce na "lehký příklad" se dvěma stejnými sčítanci.

Blíže reálnému popisu výchozího bodu je spíše Alex 24.11.95:

Ptám se ho na počítání do stovky, jestli je to těžký, tvrdí že ne. Umí už i sčítat a odčítat (myslím, že jsem jeden příklad otestoval - nebo až později?). Násobilku prý někdy uhodne, ale nechápe ji.

Co znamená jeho formulace? Míří ke zkusmému doplnění některých příkladů (symbolických forem) jako správného znění říkanky. Děti samozřejmě chápou, že v říkance jde o doplnění číselné triády podobně jako při sčítání/odčítání. Logiku doplnění triády na násobení však na rozdíl od sčítání nechápou.

Porovnáme-li zpětně naše záznamy o průběhu hodin matematiky s učebnicí, je patrné, že učení násobení začíná právě vysvětlováním logiky operace násobení - v učebnici se tomu říká "zavedení operace násobení". Mezi postupy, které byly v naší třídě používány k vysvětlení toho, co je násobení, můžeme rozlišit 2 cesty.

PLURALITA MODELŮ - DVĚ (NEZŘETELNÉ) CESTY K LOGICE NÁSOBENÍ

První cestu představuje paralelismus s názornými operacemi a strukturami. Jako by opakoval cestu, jíž se děti učily sčítat a odčítat. Pochopitelně tu odpadá akcent na korespondenci čísel a počtů, na dovednost spočítání - ta je samozřejmým východiskem.

Přestože se při názorném zobrazování na obrázcích používá jak zobrazení reálných předmětů, tak znázorňování prostřednictvím grafických značek (teček, oválů, čtverečků, čárek apod.), rozdíl mezi nimi tu není podstatný. Právě v důsledku samozřejmé korespondence počtu a čísla tu znázornění ztrácí kvalitu speciálního mezistupně převádějícího předměty na pouhé kusy. I obrázky reálných předmětů tak zde mají povahu znázornění.

Platí to tím spíše, že i reálné předměty na obrázcích většinou vystupují rozčleněny buď v malých, naráz postřehnutelných počtech nebo jsou uspořádány v útvarech odpovídajících buď "síti" nebo několika skupinám, aby byly dobře spočitatelné.

Znázornění násobení se provádí 2 možnými způsoby:

- uspořádání předmětů či značek po skupinách (stejným uspořádáním je akcentována stejnost počtů ve skupinách);
- uspořádání v (kvazi)čtvercové síti, případně sama čtvercová síť.

Můžeme najít i kombinované varianty, kdy např. uspořádání skupin předmětů tvoří zřetelné řady a sloupce nikoli, ale přesto je naráz postřehnutelný počet v řadách-skupinách shodný. V políčkách čtvercové sítě mohou být umístěny značky či dokonce obrázky reálných předmětů nebo mohou být počitatelnými objekty sama políčka sítě.

V zásadě jsou tři typy úloh pracujících se znázorněním:

1) K dispozici je jak znázornění, tak příklad. Úkolem je zjistit, "kolik je to celkem", odpovědět a doplnit výsledek příkladu.

2) K dispozici je znázornění. Úkolem je "sestavit příklad" na násobení a "vypočítat".

3) K dispozici je příklad. Úkolem je ho "znázornit" a "vypočítat".

Za jakési semisymbolické uspořádání můžeme považovat znázornění násobení jako "skoků" na číselné ose. Toto znázornění ovšem už představuje spíše druhou cestu k logice násobení: násobení jako opakované sčítání. Už při počátečním znázorňování je možnost zjištění celkového počtu zapisována také jako příklad na sčítání stejných počtů ve skupinách (řádcích, sloupcích), jako opakované přičítání stejného počtu-čísla.

Do této doby tedy jako by šlo především o logiku násobení - o prezentování jeho korespondence jednak se znázorněním rytmicky strukturovaných počtů, jednak se sčítáním - i když se už koketuje s tím, zda si děti probírané a znázorňované příklady pamatují v symbolické formě triády (s. 10: "vypočítej" a "dokážeš násobit bez chyb?").

Na jedné straně tedy množství způsobů znázorňování, z nichž žádný se nevyvinul či nebyl stanoven jako závazný, na druhé straně počítání zpaměti, přičemž se nechává na dětech, zda při selhání paměti prostě rezignují nebo zda a jakým způsobem výsledek odvodí. Jednoznačnost počítadla jako modelu ("když nevíš, spočítej si to na počítadle") tu chybí, chybí i pravidlo pro způsob odvozování. Byly sice prezentovány různé postupy pro jednorázovou demonstraci logické korespondence, ale žádný z nich se nepřetvořil se v předpis postupu, v techniku počítání a není tak opakovně používána a tím reprodukována jeho logika. Nebo přesněji: dítěti je jakoby ponecháno na výběr, které znázornění použije pro počítání tam, kde selže pamětné vybavení triády.

Pluralitu modelů dále zvyšuje dělení, které se zavádí ještě před násobilkou dvou a které jako by mělo završit budování logiky před tím, než začne být vytvářena násobilka jako systém násobkových řad. Při zavádění každé další násobilky se v učebnici předvádí pluralita modelů na násobení/dělení (viz s.24: 32 židlí ke stolům po čtyřech, každý počítal jinak: čárky v řadě kroužkované po čtyřech, síť, opakované odčítání). Avšak v pracovním sešitě se systematicky procvičuje násobení jako doplňování triád, jako počítání zpaměti.

Konstatujme předběžně naši domněnku, která vychází z analýzy počítání v první třídě: trvalou, upevněnou logikou se stává logika používaného nástroje, tedy strukturací, jež jsou dány nástrojem a způsobem jeho používání. Logika (jako nepříznakovost, samozřejmost těchto strukturací) se interiorizuje opakovaným dlouhodobým používáním nástroje - jinak může její pochopení být jednorázovým, ale dočasným aktem "aha".

Může pak nezávaznost prezentovaných modelů násobení jako techniky výpočtu - spolu s relativní snadností pamětního osvojení násobilky - vést k tomu, že dítě si neosvojí žádnou techniku výpočtu a spolehne se na paměťovou reprodukci příkladů jako "číselných říkanek"? Pokusíme se dále ukázat jednak na momenty, které ukazují, že i při takovém postupu k posunu chápání logiky násobení docházelo, ale také na problematická místa, na něž děti narážely.

Operace násobení jako strukturace malých názorných počtů byla na samém počátku pro děti velmi zajímavá. Byla to zřejmě právě její logika, korespondující s novou symbolickou formou (příkladem na násobení), která pro ně činila počátky násobení přitažlivými.

Nové strukturaci počtů tu odpovídá nejen korespondující symbolický zápis, ale také nové slovní obraty v zadáních příkladu: členění "po nějakém počtu", tentýž počet "několikrát", "každé" osobě či "v každé" skupině. V porovnání s první třídou se ovšem už tady zdála nápadná jedna skutečnost. Při zavádění počítání v první třídě byla věnována velká pozornost korespondenci matematických operací sčítání/odčítání se symboly +/- (graficky) a "plus/mínus" (orálně) na jedné straně a na druhé straně s reálnými, názornými postupy, procedurami a synonymickými výrazy pro ně (dát dohromady, přidat, ještě koupit, sníst, ubrat, zmizet, škrtnout). Naproti tomu se v druhé třídě pracovalo s výrazy popisujícími strukturace a procedury, které korespondují s násobením/dělením, mnohem méně explicitně, jako se samozřejmými výrazy, jejichž význam děti musí znát. Předběžně uvažujeme o několika možných souvislostech:

- Tichý, neuvědomovaný předpoklad učitelky, že rozhodující průlom do světa čísel a operací s nimi mají děti za sebou. Ten se odehrál v první třídě, tam bylo nutno se piplat s korespondencí výrazů "dát dohromady" (= přidat = získat ještě) a sčítání. Stejně samozřejmě se přepokládá jakési základní porozumění jazyku. Neporozumění se předpokládá u "nových, neznámých slov", nikoli však u nových spojení, nových syntagmat. Avšak např. předložka "po" jistě není nové slovo, ale její význam v korespondenci se strukturou násobení může být velmi nový.

- Jazyková nevýraznost výrazů pro operaci násobení - "třikrát", "kolikrát". Ty při své blízkosti či shodnosti s výrazy běžného jazyka nejsou brány (na rozdíl od "plus" a "mínus") jako speciálně matematické výrazy, které by musely být vysvětlovány.
- Syntaktická a sémantická nejednoznačnost příkladů a znázornění násobení, jimž odpovídá různé možné čtení (3*5 mohou být jak tři skupiny po pěti tak pět skupin po třech, pět dětí v každé ze tří skupin nebo tři děti v každé, komplikováno dělením pak 15 dětí rozděleno do tří skupin, což je totéž jako rozděleno po pěti, nebo také rozděleno do pěti), různá struktura reálných zadání. (Budeme o tom mluvit dále.)

Nicméně postupy zahájené na počátku probírání násobilky lze považovat za implicitní a patrně i poměrně účinný způsob vytváření souvislostí a korespondencí prostě opakovaným používáním a korekcí různých formulací v souvislosti s různými typy strukturace znázornění, opakovaného sčítání/odčítání a příkladů na násobení/dělení.

Následující postup učení však zřejmě naráží na tato problematická místa:

- Probírání speciálních případů násobení/dělení jedničkou a násobení nulou vzápětí po prezentaci logiky násobení.
- Speciálnost násobení/dělení dvěma, jež navázalo na násobení nulou a jedničkou.
- Odtržení či nepropojení logiky ani struktury znázorňování, ani struktury násobkové řady s technikou výpočtu. Zjišťování výsledku tak zůstává - pokud si dítě příslušnou techniku nevypracuje samo - záležitostí paměťové reprodukce formy, jejíž logika není zjevná a kontrolovatelná.
- Zavedení dělení jako inverzní operace, jejíž logika je odvozena od násobení. Nemůžeme samozřejmě tvrdit, jak by se situace vyvíjela, kdyby bylo dělení zavedeno později, např. až po zvládnutí všech násobkových řad a jejich logiky. Při postupu, který zde popisujeme, se však dělení stávalo vlastně součástí násobilky a veškerá jeho nejednoznačnost, počínající nejednoznačností korespondence způsobů znázorňování příkladu až po nejednoznačnost gramatické a sémantické korespondence výrazů používaných ve slovních zadáních úloh komplikovala i logiku násobení. Vytvářelo to místy obraz, jako by děti mohly pochopit dělení jen prostřednictvím násobení, ale to jim komplikovanost dělení znemožňuje či ztěžuje.

NÁSOBENÍ NULOU A JEDNIČKOU

Násobení nulou a jedničkou bylo prezentováno už spolu s úvodními příklady, při nichž je exponována logika násobení.

27.2.96:

<table>
<tr><td colspan="4">Podíváme se na násobení - na tabuli, co bylo za DÚ:</td></tr>
<tr><td>2 . 4 = 8
4 . 2 = 8</td><td>3 . 1 = 3
1 . 3 = 3</td><td>4 . 3 = 12
3 . 4 = 12</td><td>Tomuhle říkají "síť" Je to čtvercová síť, tady ji mám jen naznačenu nespojenými obdélníčky.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Povídání o ptáčcích v zimě - jako přechod k počítání ptáků v budkách nakreslených na tabuli.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Vzít papírky: 3 krmítka po 2 ptáčcích - napsat oba příklady - na tabuli Alex - správně.</td></tr>
</table>

Pak tři krmítka po jednom - Marcel zapisuje příklady.	
Pak 3 krmítka po 0 - Darina příklady, trochu váhá nad obráceným 0 . 3.	
Už umíme násobit nulou - když násobíme nulou, vždycky nám vyjde nula.	
0 . 6 - někdo řekl 6. - Smích.	*Učitelka zadala několik příkladů, které ještě ověří, jak pravidlo zvládli. Někdo se sekl a byl stižen posměchem.*
A ještě pravidlo pro násobení číslem 1: Když násobíme číslem 1, číslo se nezmění.	
Na tabuli: *3 . 1 = 1 . 3 =* *4 . 1 = 1 . 4 =* *7 . 1 = 1 . 7 =*	

Dále:

3 řady po 4; 4 + 4 + 4 = ( ), 3 . 4 = ( ) *Pak 3 řady po 1 - a prázdný tác jako "3 řady po 0". Příklady napsat sami - zahučí údivem jakoby nad obtížností úkolu*	*Jde o chlebíčky na tácu v několika řadách.*
[Vůbec opakují tyhle primitivní příklady se snahou a zájmem. Berou to jako těžké? Rozbíjí to triády?]	

Co tady děti fascinuje, nejsou počty. U většiny příkladů také není pro ně problémem postihnout naráz nebo rychlým spočítáním výsledek. Přitažlivá je pro ně právě nová symbolická forma a její strukturální korespondence.

Právě tu však příklady s nulou a jedničkou možná zpochybňují, protože znějí v reálném zadání nesmyslně. Násobení se při nich nejeví jako racionalizace, zrychlený postup sčítání, ale jako nesmyslná, arbitrární komplikace prostého spočítání (při "násobení" či "dělení" jednou) nebo jako forma, které nic neodpovídá - jako při násobení nulou nic neodpovídá: "vzít několikrát" je možno "něco", ale činit totéž s "nic" je nesmysl.

To ovšem neznamená, že děti nepřijímají tyto příklady jako symbolickou formu. Její doplnění se však neřídí ani logikou ani pamětným vybavením triády, nýbrž přiřazením k jednomu ze dvou "šiftových pravidel". Podobně jako přičítání a odčítání nuly není reálným počítáním, ale matematickým žertem, počítáním "jako", protože nic nepřidáváme a nic neubíráme, tak i tady se jedná o násobení "jako", nikoli o reálné počítání. Pokud dále budeme ukazovat, že řešení příkladů na násobení/dělení v daleko větší míře než u sčítání/odčítání stojí na naučených říkankách násobilky, pak toto není ještě ten případ.

5.3.96:

*Rozcvička na násobení: 5*1, 0*6, 0*8, 0*0, 1*2, 3*1, 0*10, 0*0, 1*1, 7*1, 1*4, 5*1, 0*11, 3*0, 9*0, 1*9 (rychle).*

V dalším průběhu pololetí už neuvidíme, že by pamětně zvládli v tak krátké době dvě násobkové řady bez větších problémů. Tady se to daří patrně jen proto, že se děti rozhodují mezi dvěma jednoduchými pravidly doplnění triády: v příkladu s nulou opakovat nulu, v příkladu s jedničkou opakovat činitele tvořícího zadání spolu s jedničkou.

12.3.96

Soutěž v násobení nulou a jedničkou. Za jednotlivé řady: Fanda - Aleš - Dori	

*90*1 - Fanda: 1, Aleš - 91.*	*Z rychlosti dělají chyby, které jako by plynuly ze svodů zvukové podoby příkladů, z interference (či ustanovky) předchozích.*
Další kolo: Vanda - Míťa - Gita	
*Zase: 2*1=1 [Spíš tu interferují rýmy: 5*0=0, vs. 5*1=5 - ale svádí to k opakování analogického rýmu s 2. členem příkladu: pětkrát nula - nula, pětkrát jedna - jedna.]*	

Tyto případy naznačují, že jednoduchost logiky násobení nulou a jedničkou tu navíc možná svádí k nahrazení šiftových pravidel říkankou.

Dále:

7 bonbónů dělila babička po 1 - kolik vnoučat měla? (Zaslechl jsem také "nula".)

Může výsledek "nula" být důsledkem kladení násobení jedničkou a nulou vedle sebe - vytváří to pro ně jakýsi binarismus říkanek v důsledku současného zavedení dvojice pravidel, který se může jevit jako falešná dvojice kvaziinverzních triád: 7*1 je buď nula nebo sedum?

Tady je to ovšem navíc smícháno s reálným binarismem inverzních operací násobení a dělení. A v něm reálným problémem násobení jedničkou je, že při něm nelze ukázat dělení jako operaci inverzní k násobení: 7*1=7 a 7:1= taky 7. (Tím spíše to platí u nuly, jíž se dělit nesmí.) Nastává tu problém s identitou opakujících se čísel. Ten u sčítání nastával jen u zvláštních příkladů s nulou, protože jinak dvě stejná čísla označovala dvě neidentické skupiny předmětů. Nula pak označovala jejich nepřítomnost. Ale násobení jedničkou a nulou nic reálně neodpovídá (je to až formální završení soustavy symbolických operací), resp. odpovídá jí nepřítomnost procedury či struktury, se kterou má vlastně příklad korespondovat.

12.3.96:

Jak to můžeme znázornit? - Lada: 7:1=7 - Učitelka: To je příklad, ano. - A jak bychom to mohli nakreslit.	*A tady jsem bohužel ještě nevětřil důležitost právě tohohle zadání a nepoznamenal jsem si, jak to nakreslili. Myslím, že od každého ze sedmi bonbónů, které byly nakresleny na tabuli, vedli jednu čárku?*

Ale to by bylo opravdu iluzorní znázornění: sedum jednotlivých čárek nemůže po svém sečtení zdůvodnit výsledek "sedum". I kdyby babička dělila osum bonbónů po dvou, povede od každého bonbónu jedna čárka (protože každý musí být rozdělen, přidělen, nově přiřazen) - a jejich sečtením nedostáváme výsledek!

Jaké by muselo být znázornění? Nemohlo by zahrnovat jen rozčlenění bonbónů, ale muselo by bonbóny přiřazovat dětem - např. postavičkám na druhém konci čárek. Pak by znázornění mělo logickou strukturu 7 bonbónů - 7 dětí. Ale to je pro děti archaická figura přiřazení elementů dvou řad, která je východiskem dovednosti spočítání a těžko zdůvodní novou operaci násobení. Příklad je tu nejspíš prázdnou formou navíc.

Týž den:

5 kostek cukru - do každého čaje 1 kostka → dělíme po jedné. *Martin: 5:5=1 - ale mělo být 5:1=5*

Zdá se proto, že násobení/dělení jedničkou a nulou logiku, která se předtím vytvářela (a dosud vytváří) prostřednictvím výše popsaných korespondencí s názorným zobrazením a opakovaným sčítáním, nereprodukuje, neposiluje, nýbrž spíše suspenduje.

NÁSOBENÍ A DĚLENÍ DVĚMA

Násobilka dvěma uvedla postup, který se potom opakoval u každého dalšího čísla, který můžeme charakterizovat jako postup vycházející z násobkové řady.

21.3.96:

Násobky dvou - Bill jede řadu.	*Bill je vychrlil dost rychle, ale u některých dalších je pak vidět, že vlastně řadu násobků konstruují prostřednictvím opakovaného přičítání téhož operátora.*
Zapomněli jedno číslo - 0!	*Aby měl úvod násobení s nulou a jedničkou jakous takous spojitost s klasickou řadou násobků, musela by se za počátek řady násobků vzít nula. Tady se tahle logika drží, ale kousek dál uvidíme, jak je to nepřirozené - a důkaz nepřirozenosti podává svou argumentací studentka!*
Luděk prý neříkal - teď pomalu jmenuje (stačil přitom postupně přičítat dvojku?)	*Luděk podle studentky neříkal řadu násobků s ostatními nahlas a má ji teď vyjmenovat sám. Luděk je dost pomalý a řekl bych, že se v řadě pohyboval právě za pomoci přičítání. [Ostatně níže je to zcela evidentní.] Studentka ale tenhle rozdíl neregistruje či nechává být a říká něco jako „já myslela, že to neumíš, a ty to přitom umíš“.*

Násobková řada tu vystupuje ve dvou podobách - jako naučená říkanka a jako série výsledků načítání čísla 2. Že souvislost obou není pro děti samozřejmá a že právě teprve ona vytváří prvotní logiku násobkové řady (ve vztahu k základní číselné řadě) uvidíme později, při dalších násobilkách. Násobilka dvou totiž přináší některé fenomény, které jsou specifické a ve svém důsledku možná zatemňují či překrývají její logiku jakožto logiku násobení.

Už při procvičování se projevuje určitá specifičnost násobilky dvou. Ukažme to na dalším průběhu hodiny.

5 párů ponožek - kolik to je ponožek?	*Teď začíná procvičování korespondence číselných operací s reálnými situacemi. Násobky dvou korespondují s „páry“.*
Karla: 10 - a příklad? - 5+5=10!	*Ošidnost násobení dvěma: je to vlastně sčítání se symetrickými sčítanci. Struktura (gramatika či syntaxe) příkladu sice neodpovídá syntaxi zadání situace, ale je ekvivalentní ve výsledku.*

Dále:

*Aleš jinak: 5*2=10*
Čeho je ještě pár: boty, párky, rukavice.

Úlohy na páry: *Karla: Anička měla 1 čepici a Pepíček jí přinesl devět.*	*Otázku nemám zaznamenanou a možná ji ani učitelka nenechala zaznít, ale je jasné, že Karla se pohybuje ve sčítání. Jenže znamená to, že nepochopila násobení jako matematickou operaci? Nebo tu vidíme ukázku toho, jak ho nezvládá (ani) jazykově, když má pracovat s páry a mluví o čepicích?*

A dále:

Počítání holčiček - po jedné. Šlo by to rychleji? - Míťa počítá znovu po jedné - rychleji.	*Studentka z nich chtěla dostat počítání po dvou.*
Mikuláš - správně.	*Ale teď už nevím, zda je přímo vyzvala k počítání po dvou nebo zda jim jenom nějak napověděla. Mikuláš ale počítal po dvou dobře.*
Karla: Vynechal nulu! - a rozpaky studentky.	*Zdá se opravdu, že Karla má v poslední době snahu se učitelce - tady studentce - zavděčit. Studentka sama přece upozornila, že by řada násobků měla začínat nulou - a tu Mikuláš vynechal.* *Studentka na to reagovala tím, že přece počítáme holčičky, tak přece nebudeme říkat nulu. Ale ze stejného důvodu je nula pro děti nesmyslná v řadě násobků.*

Ale vlastně ještě z jednoho: I když půjde už jen o pohyb v symbolických řadách jako nepříznakových (tzn. bez korespondence s imaginárními objekty), je nula nevhodná proto, že stojí na počátku všech řad. Zatímco první násobek řadu pojmenovává a odlišuje ji od ostatních, nula tuto diferenciaci odlišných násobkových řad přinejmenším neposkytuje a možná spíš brzdí. Ovšem děti ji zřejmě stejně neberou v úvahu, resp. berou ji jen jako formální přívěsek.

Dále:

Luděk rychleji: 2 plus 2 se rovná 4 plus 2 šest... osum (holčiček s dlouhými vlásky).	*Luďkova verze rychlejšího počítání po dvou. Lepší důkaz, že novou řadu nejmenuje, ale na místě počítá, asi neexistuje.* *Počítal holky ve třídě s dlouhými vlasy, které se pro tu příležitost v lavicích postavily.*

Vidíme, že specifika násobilky dvou spočívá mj. v existenci specifického fenoménu v realitě a v jazyce: párů. Jeho znalost z běžného života vytváří pro pochopení násobků jinou situaci, než je tomu u "trojic", "čtveřic", "pětic" atd. Pojem páru je pro dítě samozřejmý (přinejmenším jako forma, v níž existují části lidského těla a oblečení) už před násobením, zatímco pojem trojic se možná zavádí často až v souvislosti s násobením. U párů a dvojic jde tedy o vyčlenění pojmu z běžného jazyka jako pojmu matematického. Naproti tomu u jiných jazykových zadání spojených se strukturou násobení se jejich význam ustavuje až prostřednictvím násobení.

Ale u Karly (která patří ke slabším žákům třídy) vidíme, že pojem páru buď vůbec nezná nebo pro ni jeho význam nijak nenese samozřejmost početní strukturace "po dvou" a bude si ho muset osvojit stejně jako ostatní děti "pětice".

Další specifickou strukturací "po dvou", která se vyskytuje v každodenním životě, je "zrychlené spočítání". Náš záznam ale ukazuje, že některé děti se ho zde teprve učí. Je při tom patrné, jak se musí plynule naučit násobkovou řadu 2, aby šlo skutečně o počítání zrychlené. Bez násobkové řady jako říkanky je takové spočítání pomalejší než po jedné. Luděk pak pod hlavičkou "zrychleného spočítání" postupuje zcela opačně: namísto použití násobkové řady ke spočítání ji teprve konstruuje jako mezičlánky "řetězu" na opakované přičítání 2. On holčičky nepočítá spočítáním (jak by to dělal po jedné), nýbrž sčítáním, konstrukcí příkladů na sčítání souběžně s přidáváním názorného počtu.

Uvažovali jsme o tom, že už samozřejmost strukturací "po dvou" v běžném životě dělá z násobilky dvou něco speciálního, co ji činí něčím odlišným od násobilky vyšších čísel. Tento druh specifičnosti by však nemusel být podstatný, mohl by snad naopak prostřednictvím analogie s pochopenou násobilkou dvou otevřít cestu k chápání násobilky vyšších čísel. Daleko podstatnější specifikou, která se takové analogii zdá bránit, je však chápání násobilky dvou jako sčítání. Už výše jsme viděli, jak Karla počítá zadání "5 párů" příkladem 5+5=10. To se pak opakuje při počítání, kolik je dětí v 5 lavicích (stále tentýž den):

Jak to spočítali?: *5+5* *2, 4, 6, 8, 10* *2*5 (Gita)*	*Nevím jestli příklad na sčítání zase neřekla Karla. Je to analogie s páry ponožek - viz výše.* *Druhý příklad je opravdu „spočítáním“ - v nové variantě číselné řady.* *Gita vypadá nejvyspěleji, ale také mohla těžit z předchozích dvou pokusů.*

Pokud šlo opět o Karlu, můžeme to považovat za problém jejího indivduálního chápání? Mohlo by to totiž být i jinak: To, že Gita konstruuje příklad na násobení v adekvátní korespondenci se strukturací názorných předmětů (tak jak byla zadána členěním po lavicích) tu zřetelně následuje až po zjištění celkového počtu. Sama korespondence je tu výsledkem, nikoli však prostředkem počítání. Neříká nic o tom, jak děti, je-li zadán příklad 5*2, reálně počítají.

Ale to samo o sobě nijak nevadí. Specifičnost násobení dvěma nespočívá v samotném faktu, že ho děti převádějí na sčítání a že tenhle postup jim zakrývá speciálnost násobení (a totéž u dělení jako půlení). Specifičnost je v tom, že tady jsou tohoto postupu - převést násobení na sčítání - intuitivně schopny, zatímco v dalších násobilkách vyšších čísel už nikoli. Problém je tedy v tom, že násobilka dvou, díky svým korespondencím se strukturacemi v každodenní realitě na jedné straně a se sčítáním, tak jak už ho znají, na straně druhé, vytváří - terminologií Hejného - separátní model násobení, jehož logiku děti chápou a který jim umožňuje intuitivní uchopení strukturací odpovídajících násobilce dvou. Avšak v další násobilce logika tohoto modelu selhává či nedostačuje. Po ruce nejsou ani osvojené pojmy běžného jazyka a jim odpovídající strukturace v každodenním životě, ani zvládnuté formy příkladů na sčítání. Pokud se při násobilce dvou zdá, že dítě už pochopilo logiku násobení vůbec, neodpovídá to nejspíš skutečnosti.

Už při dělení dvěma mají děti potíže. Dostupná je jim přestava půlení, rozdělení na dvě stejné části, avšak tam, kde uspořádání názorného počtu dělení napůl neodpovídá, dostávají se do problémů.

Tentýž den (21.3.96):

<table>
<tr><td>Cv. 4: Rozděl květiny do dvou váz. - Kdo to nechápe? Máte je přiřadit do do váz (chybí jí jazyk).</td><td>Rozdílů mezi učitelkou a studentkou je několik. Učitelka by je nechala předvést na tabuli, jak to budou dělat. Neptala by se „kdo to neumí“, ale „kdo by to uměl udělat na tabuli“. Celé vysvětlování by se neodehrávalo jen ve verbální rovině, ale s ukazováním na grafickém znázornění. Pak i tehdy, kdyby použila slovo „přiřadit“, bylo by to označení jasné činnosti, která by byla demonstrována na tabuli. Pojem „přiřadit“ by byl použit paralelně s činností, jejíž strukturu označuje.</td></tr>
<tr><td>Nina:
O O O O O O O O
\ | | /   \ | | /
V   V
(Vychází z triády!)</td><td>Je vidět, jak vychází z hotového řešení, jinak by musela přiřazovat střídavě.</td></tr>
<tr><td>Další příklad Niny:</td><td>Nina dává kytky ve dvou řadách nad sebou do kroužků po dvojicích, pak k tomu píše příklad 12:2=6 a pak ho škrtá.
Jde pořád o úlohu rozdělit daný počet nakreslených kytek do dvou váz.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Další halda kytek je neuspořádaná: náznakově si je scvakává do dvojic pohybem palce a ukazováku - ale raději čeká na studentku.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Teď gumuje i předchozí řešení!</td></tr>
<tr><td colspan="2">Studentka: Vždyť jsi to měla dobře! - prohlašuje o druhém příkladu, a také nakreslené prý to měla dobře.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Nina to obnovuje, ale ještě dlouho na to kouká.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Nina: Třetí halda kytek taky do dvojic, příklad 16:2=8 a odpověď: V každé váze bude <u>8</u> květin.</td></tr>
<tr><td>Mikuláš neví, jak přišel na to, že v každé vážičce na tabuli bude 5 kytiček.</td><td>Jde o znázornění na tabuli, kde je ve dvou řadách po 5 kytkách, které se mají zase rozdělit do dvou váz. Mikuláš ví správné řešení, ale neumí říci, jak k němu došel.</td></tr>
<tr><td>Karla: Hořejší kytičky do jedné, dolní do druhé, protože ví, že je jich stejně. (Řešení na úrovni imaginárního zobrazení.)</td><td>Řešení svědčí o tom, že je odvozeno z názorného zobrazení.</td></tr>
<tr><td>Bill: / / / / /
|O| |O| |O| |O| |O|
|O| |O| |O| |O| |O|
\ \ \ \ \</td><td>A tady mám poznamenané Billovo znázornění, které kombinuje zakroužkování dvojic a přiřazení každého člena dvojice do jedné skupiny.</td></tr>
</table>

Holky navrhují příklady: 10:2=5	*Už nevím, co jsem tou poznámkou přesně myslel - možná mi v tu chvíli nepřipadalo, že příklad není vyvozen z Billova znázornění?* *Darina pak ještě něco vysvětlovala studentce - ukazovala jí, že je to nějak jedno, že tak či onak dostaneme vždycky 5. Nepamatuju si to dobře, nechal jsem si to sice od ní zopakovat, ale její vysvětlování mi připadalo banální. Nechytla tu Darina něco z toho, co tady teď objevuju? Že je jedno, jestli to zakroužkujeme "po dvou" nebo střídavě přiřadíme "do dvou"?*

Už při dělení dvěma narážejí děti na problém nejednoznačnosti korespondujících příkladů, a znázornění s jazykovým zadáním, které se pokusíme rozebrat později.

SKUTEČNÁ NÁSOBILKA ZAČÍNÁ OD TŘÍ

Postup při dalším osvojování násobení a dělení, které postupuje jako osvojování systému násobkových řad, je dobře ilustrován tímto záznamem.

2.4.96:

Vráťa: 30:3 ... patnáct, pak opravuje na 5.	*Rozdělit třicet = rozdělit 30 napůl (tzn. 15+15). Tohle je pro ně dělení. Když měli v testu rozdělit čtverec na 9 stejných částí, začali ho snad všichni úhlopříčně půlit, pak zase půlit atd. Když měli "rozměnit" dvoukorunu, dokázala to naprostá většina zase jen půlením. (někteří doplnili chybějící členy triád s dvacetníky a desetníky).* *Ale jak přišel pak na 5? Je to doplnění triády 15-3 (děleno třemi!) - ?.*
Studentka: "Kolikrát 3 je třicet, Vráťo?" (Myslím, že řekl 10 - neslyšely ho? Nebo to napověděl Martin - jako později u Vandy?)	*Ano, myslím, že řekla "já jsem tě dobře slyšela, Martine" - a toho později při napovídání Vandě označila za "napovídálka".*

Vráťa má odříkat násobilku: *0*3 přemýšlí* *1*3 přemýšlí* *2*3 přemýšlí* *Až u 3*3=9 se chytá na řadu násobků.* *Následuje otázka: a 10*3? - Vráťa: 12 (!)*	*Studentka se diví jeho přemýšlení - "vždyť to umíš?" - má na mysli násobkovou řadu. Ale násobková řada je jen nová varianta číselné řady, kde operátor násobení je teprve implicitní - trojka tu klidně může pro Vráťu fungovat jako číslo, které se načítá, které vytváří sérii triád na sčítání. Spojitost s triádami násobení vůbec není samozřejmá - ty se teprve musí vytvořit - a studentka je tu vytváří.* *Když pak Vráťa pochopí, že se pohybuje v řadě násobků tří, neznamená to, že v ní už umí skočit ke kterémukoli násobku - říká prostě další v pořadí: vždyť mu právě ukázala, že každý další příklad je dalším násobkem tří. Sotva se dostal do téhle posloupnosti a začal (snad) chápat souvislost příkladů na násobení a násobkové řady a začal se pohybovat krok za krokem v obou do té doby různých řadách, skočila mu v ní na konec.*

Na Vráťových obtížích s násobením tří, se kterým začali před pár dny (ve čtvrtek 28.3., teď je úterý 2.4.) je patrné, jak tu zůstávají jakoby odděleně, bez souvislosti věci, jejichž celek má zřejmě v didaktickém postupu vést k pochopení logiky násobkové řady.

Klasický postup začíná jmenováním násobkové řady - umět odříkat, jak jdou násobky za sebou. Víceméně souběžně s tím se vytváří řada příkladů na násobení, v němž číslo označující řadu (jde o násobilku "tří") je drženo jako konstantní a druhý činitel postuně narůstá o jednu: 0*3=, 1*3=, 2*3=, 3*3= atd. Někdy je posloupnost v komutativně převrácené formě. V učebnici používané v naší třídě, byla tato posloupnost prezentována v tabulce. Pro dospělého je samozřejmé, že násobková řada je přece vlastně tvořena výsledky prezentované řady příkladů. Domníváme, že pro Vráťu tato souvislost zřejmá není, že sice umí násobkovou řadu, ale posloupnost příkladů zpočátku počítá. Teprve pak souvislost - pro tuto chvíli - objevuje a předvídá další výsledek jako následující násobek.

Např. v záznamu z 30.4. nacházíme dvě drobné příhody.

V nově probírané násobilce 6 se exponovala řada násobků v tabulce:

Evžen neví "za 9 píšťalek" - Lada: "máš to v tabulce!"	*Násobky se probírají v rámci zadání "za 1 píšťalku 6 korun". Lada nemůže snést, že Evžen nevidí řešení, a nahlas mu napovídá, kde ho má hledat.*
Zdá se mi, že příhoda, která se mi stala hned po zvonění, ukazuje, že tabulka sama nemusí na děti "mluvit", vypovídat o souvislostech. Dori psala příklady na násobení 6 do jednoho sloupku, Lada jí předhazovala, že je měla psát do dvou. Dori se ohradila, že nemohla vědět, kolik jich bude. Ještě u násobení šesti jí nedochází, že příkladů je vždy deset, že se učí řadu deseti násobků.	

Následně je na tabuli exponována neúplná řada násobků, kterou doplňují. Sborově ji recitují a pak různými způsoby označují násobky 6 v normální číselné řadě.

Poté si do sešitu zapíší řadu příkladů:

*6*0=0 (Fanda) - učitelka: ne, má být 0*6=0.*
*Pak dále 1*6, 2*6, 3*6 atd.*

Vando, další příklad. - Vandě trvá, než ho vymyslí.

Zdá se, že i pro Vandu je série příkladů něčím odděleným od násobkové řady nebo přinejmenším jde o souvislost, kterou tu obtížně rekonstruuje - chvíli poté, co učitelka konstatovala, že se "překulili do druhé poloviny násobilky". Obtížnost nalezení souvislosti mohla být pro děti zvýšena tím, že ve třídě praktikovaly studentky PedF a tak se při výuce střídaly různé vyučující. Např. řada příkladů násobilky dvou byla prezentována jako počítání po dvou, v násobilce tří s jednotlivé příklady modelovaly pomocí sítě, v níž se řady nazývaly čtveřicemi, péticemi atd. a zapisovaly se ve formě 3*0, 3*1,.....3*5, 3*6 atd., tedy právě opačné, než vyžadovala učitelka dnes.

Vraťme se k Vráťovi z 2.4. a k otázce, jakými didaktickými postupy je budována násobilka určitého čísla. Při učení násobkové řady je každý další násobek vyvozen přičtením k předchozímu. Násobková řada se tedy vyvozuje prostřednictvím sčítání. Děje se tak ovšem především při její úvodní konstrukci, jako pomocný postup, když někdo nezná následující násobek. Násobení se sice také - v rámci plurality modelů, které mají ukázat jeho logiku - při úvodní expozici násobilky čísla prezentuje jako opakované sčítání, avšak s tímto postupem se dále nijak systematicky nepracuje. Je to prostě jedna z možností, jak si ukázat, co je násobení.

Je-li osvojena násobková řada jako posloupnost čísel, jako sukcesivní struktura, pracuje se dále na její přeměně ve strukturu simultánní, která vyváže jednotlivé členy z rigidní posloupnosti. Děti se učí rozpoznávat příslušnost násobků k řadě bez toho, že by ji musely odříkat v její posloupnosti - mají násobky vybírat ze skupiny čísel na tabuli; učitelka říká čísla a na číslo patřící do řady násobků mají co nejrychleji vstát apod.

Tyto postupy se uplatňují především během první hodiny, kdy se násobilka čísla začíná učit. Násobková řada zpaměti + násobková řada jako série příkladů s rostoucím prvním činitelem (či druhým, musí to však být drženo konstantně) + výsledky rostoucí opakovaně o velikost druhého (prvního) činitele - to má zřejmě vytvořit logiku násobení.

Ověřme pravidelnost tohoto postupu na zavádění násobilky 7.

13.5.96:

Začínají násobilku 7. - Sloupeček příkladů: Které z nich už známe?	
*Lada správně: až do 6*7 už je znají. - Uč.: a 10*7 také není těžký.*	
Doplňují známé příklady (výsledky): *Evžen - 3*7=25. Uč. mu napovídá, že 2*7 bylo 14, tedy 3*7 o 7 více. Ale nezvládl to.*	*Nemá propojené násobení s opakovaným načítáním? Nechápe to vůbec nebo chápe princip, pravidlo, ale není schopen přejít od triád násobení k triádám sčítání natolik rychle, aby dokázal tuhle nápovědu využít? A nebo tady narážíme na problém zadání "o 7 více", které je navíc jen implicitním krokem v linii soustředěné na něco jiného?*
*Vráťa: 6*7=..... 36. - Uč.: Hlavně, že si povídáš! 36 je 6*6.*	*Už nevím jistě, ale myslím, že ani Vráťa se nebyl schopen opravit, že to za něj řekl někdo jiný (?).*
*První neznámý příklad Bill: 7*7=49 - Jak na to přišel? Přičetl k předchozímu výsledku 7.*	

*8*7=57 (Aleš) - Špatně jsi sečetl. Kolik je 49+7? - Aleš: 56*	*Tady napovídá Alešovi nikoli "o 7 více", ale celým příkladem. Ale z jeho chyby usoudila, že Aleš už sčítal, že příklad sestavil správně, ale špatně vypočítal - a asi má pravdu.*
(!) *Alena: Pani učitelko, já to tak nedělám, protože já už vim, který jsou násobky sedmi.*	*Východiskem ovládnutí násobilky je naučená řada násobků, nikoli načítání. Načítání může sloužit ke zdůvodnění logiky násobkové řady, ale je to zdůvodnění logiky kulturního nástroje, který dětmi samými není konstruován, nýbrž je přijímán hotový. Je ovšem pravda, že ovládnutí pravidla jeho konstrukce pak usnadní korekci chyb. A také pohyb v okolí orientačních bodů tvořených snadnými triádami: když umím 8*8, mohu to zpočátku používat k odvození 7*8 a 9*8.*
Lada to také dělala jinak - jak? *Marcel říká rozklad.* *Až Vráťa přišel na to, že odečetla od 70.*	*Lada u příkladu 9*7 byla pošeptat učitelce svůj objev jiného postupu.* *Marcel se domníval, že přičetla k 56 nejdříve 4 a pak 3. Někdo další pak se domníval (Alena?), že Lada už zná násobky. Ještě někdo pak myslel, že přičetla 7 k 56.* *"Dělala to jinak" jako by pro některé bylo vztaženo vždycky jen k té možnosti, kterou někdo právě řekl, takže se po druhé zamítnuté možnosti klidně vrátí k první zamítnuté.*
Číselná řada - místo násobku 7 ťuknout. Zpočátku ťukají dost mimo, pak je zase vynechání vyvádí z rytmu - následně buď ťukají a současně říkají už číslo následující po násobku nebo zase po ťuknutí ještě jmenují násobek.	*Nejdřív byl nácvik ťukání, aby netřískali do lavic a nedělali virvál. Až tak do 28 to bylo dost chaotické, pak se problémy koncentrovaly do míst kolem násobků. Teprve snad poslední třetina řady proběhla bez větších problémů.* *Už jsem to viděl dříve: jakmile se naučená řada jmen rozruší cizorodým elementem, dělá to potíže. Potíže by podle mě neměli, kdyby neměli ťuknout* ***místo*** *násobku, nýbrž* ***při*** *něm, při jeho vyslovení.* *Zkouším si to na sobě a zjišťuju, že i když ťukám místo násobku, říkám si jméno násobku v duchu. Proč to tak nedělají také?*
Pak totéž s "mňau" místo ťuknutí, řada běží po lavicích. Je dost chyb.	*Předchozí řada se jela sborově, teď každý říká jedno číslo a ten, na koho vyjde násobek 7, má místo něj říct "mňau".* *Z chyb si pamatuju, že Denisa mňoukla místo 12.*

Pozornost tu zasluhují především dva momenty:

1. Evžen, který "vypadl" svým chybným výsledkem z násobkové řady, nedokáže ke korekci výsledku použít sčítání.

2. Alena, která se zřejmě naučila násobky 7 už předem doma, se touto svou znalostí **chlubí** a zdůrazňuje, že ona už nepotřebuje násobky odvozovat sčítáním. Zjevně tu nutnost

odvozování považuje za něco nižšího, co poukazuje na nižší úroveň ovládnutí násobilky, resp. teprve na přípravnou fázi.

Její perspektiva se ovšem zdá konzistentní s reálným postupem výuky. Po přípravné fázi se děti dále učí sérii příkladů násobilky napřeskáčku, kdy se jednotlivým násobkům přiřazují dvojice činitelů. Zpočátku děti dělají v přiřazování násobků chyby a často také jako výsledky interferují členy předchozí násobkové řady. Je to vlastně postup analogický rozvolňování násobkové řady: číslo do násobkové řady buď patří nebo nepatří, nanejvýš lze jeho příslušnost zdůvodnit expozicí násobkové řady jako posloupnosti. Také zde se procvičováním příklady vyvazují ze své původní posloupnosti tak, že se potvrzuje správnost či vyznačuje nesprávnost přiřazení. Když je přiřazení nesprávné, je někdy opakována posloupná řada příkladů jako cesta, jíž se dospěje ke správnému přiřazení, někdy se poukáže na příslušnost k jiné násobkové řadě (jako u Vráti).

Do přípravné fáze je ovšem zahrnuta i korespondence násobení se znázorňováním, takže možností, jak ukázat, proč přiřazené číslo není správné, je ještě více. Žádný ze zdůvodňovacích postupů však není nacvičován jako postup, jak zjistit správné číslo. Každý z modelů potenciálně takovým postupem je, avšak není vypracován jako dostatečně účinná - totiž dostatečně jednouchá a rychlá - technika výpočtu. V důsledku toho potom, přiřadí-li dítě hledané číslo triády špatně, výsledek je označen jako chyba a na správný výsledek si nemůže vzpomenout, pak dítě buď mlčí a nevyvíjí žádné pomocné postupy vůbec nebo jen pod vedením učitelky.

K pominutí nutnosti vypracovat nástroj počítání, který by nutně implikoval a permanentně reprodukoval jeho logiku, přispívá snadnost ovládnutí násobilky jako systému říkanek.

I když sčítání/odčítání v oboru přirozených čísel nevytváří grupu, protože nelze odčítat kterákoli dvě čísla, existuje přesto v jeho rámci velké množství inverzních trád, které jako říkanky interferují, protože při hledání třetího členu musí být vzata v úvahu ještě operace, která se s druhými dvěma členy provádí.

Ne tak u násobení. S čísly 18 a 6 lze v rámci malé násobilky vytvořit jedinou možnou triádu. Přitom dvojciferné číslo je vždy krajním členem příkladu - výsledkem při násobení, východiskem při dělení. Spolu s omezeným počtem těchto triád je pak násobilka snadno naučitelná zpaměti. Kolik tu máme triád? (Nepočítáme násobení jedničkou a nulou.) 9 násobků 2 (nepočítáme 1*2), 8 násobků 3 (nepočítáme 1, 2*3), 7 násobků 4 (nepočítáme 1, 2, 3*4) atd., tzn. 9+8+7+6+5+4+3+2+1=45, všehovšudy 45 triád. Z těchto triád tvoří inverzní dvojice pouze [4*2 a 4:2], [6*2 a 6:2], [8*2 a 8:2], [10*2 a 10:2], [9*3 a 9:3], [10*5 a 10:5], u ostatních triád má každá dvojice čísel jediné možné přiřazení třetího členu, aniž by se musela brát v úvahu operace.

U dělení je situace ještě jednodušší. Většině dvojciferných členů "násobilkových triád" odpovídá jediná dvojice jednociferných členů. Výjimku tvoří čísla 12, 16, 18, 24 a 36. U většiny příkladů na dělení tedy stačí zadat dělence, aby bylo možno příklad správně doplnit.

Na jedné straně se tedy násobilka učí jako říkanky pro svoji snadnost, na straně druhé pro obtížnost až nemožnost vyvozování výsledků z názorného zobrazení. Problémy, která nás tu mohou zajímat, jsou dva:

1. Jaké chyby budou děti dělat v mechanice počítání, tzn. které triády bude nutno pečlivěji diferencovat. Kromě interferencí, které jsou dány interferencí triád násobení, jak jsme je zmínili výše, mohou možná interferovat i triády sčítání a odčítání - třeba toho druhu, že 6*7 je 43, protože 6+7 je 13? Zjevně tu však vedle matematických interferencí zasahují i zvukové a jejich nejrůznější analogie: 5*5 je 25, 6*6 je 36, 7*7 je 47?

V tomto smyslu (ale je to "tento smysl"?) by některé chyby mohly mít charakter přeřeknutí - nejbanálnějších i složitěji podmíněných. Přeřeknutí je často dáno tím, že dítě pracuje se simultánní strukturou triády jako s významem a že v každém elementu této struktury jsou ostatní potenciálně přítomny. Tato potenciální přítomnost pak nabývá výrazu v přeřeknutí - např. když se řeč opožďuje za pohybem ve struktuře. Ale tento pohyb se také může vydat po špatné cestě, která narušuje normativnost vyjádření významu jako jeho synekdochy a rozvíjí ji nepřípustným (nepodstatným, nahodilým) směrem - po cestě rytmických a akustických metafor a metonymií, ale i metafor a metonymiií symbolických a dokonce matematických.[1]

2. Nehrozí při omezených prostředcích použití znázorňování (které se při násobilce omezuje pouze na ilustraci logiky počátečních příkladů s malými čísly, ale reálně není používáno k výpočtům - na rozdíl od toho, jak tomu dlouho bylo u sčítání/odčítání), že se neustaví logika násobení a dělení jako logika pohybu v číselné řadě, že některé děti zůstanou jen u znalosti říkanek?

Poslední úvaha ovšem vychází z předpokladu, který je třeba argumentovat: z problematičnosti a praktické nepoužitelnosti názorného zobrazení násobení a dělení pro techniku počítání.

Problém praktické nepoužitelnosti názorných modelů násobení vyplývá primárně z toho, že v postupu násobilky se dostáváme velmi brzy k velkým počtům, jejichž znázorňování je zdlouhavé. Připomeneme-li náš poznatek z analýzy sčítání, pak už přechod k počtům nad deset vyvolával potřebu přechodu od počítání jako pohybu ve fixní řadě k pohybu v číselné řadě. Nutnost tohoto přechodu dokázaly některé děti obejít prostřednictvím toho, že body fixní řady, vyjádřené prsty či na počítadle, jako by nesly téměř číselnou adresu, resp. její přiřazení bylo velmi rychlé.

Avšak znázornění násobení, jak jsme ho zaznamenali, nemá nijak samozřejmou afinitu k pohybu ani ve ve fixní, ani v číselné řadě.

Z hledisko logicko - sémantické strukturace zadání reálných situací a s nimi korespondujících modelů (znázornění) násobení jsme se ve 2. třídě setkali s 3 typy:

1. kusy ve skupinách,
2. geometrický model,
3. opakované přidávání téhož počtu.

Pouze poslední model je modelem navazujícím na představu pohybu v názorné nebo číselné řadě. Odpovídalo mu znázornění jako opakovaných skoků na číselné ose. Už jsme však podotkli, že to byl vždy jen jeden z několika prezentovaných modelů. Přitom představa, že tato pluralita povede k vytvoření obecnějšího celku, že totiž násobení vytvoří onu obecnou představu, která sjednotí všechny tři dílčí významy rovnou, bez stanovení jednoho z nich jako závazného či výchozího, je pochybná jak z hlediska našich empirických údajů, tak při bližší analýze tohoto předpokladu z hlediska logiky a dialektiky. Už v analýze počítání první třídy jsme několikrát argumentovali, že osvojení každé nové logiky přiřazení probíhá vlastně jako nová restrukturace známých, už samozřejmých skutečností, že v tomto smyslu se dá chápat jako překlad z nepříznakové do příznakové řady. Je-li však nová strukturace budována v korespondenci s nikoli zažitou strukturací, ale na základě strukturace nesamozřejmé, dostává se dítě do situace logické tautologie: pojem, který má být teprve výsledkem nových postupů, se tu činí předpokladem pochopení souvislosti.

Dítě by si muselo vybrat 3. typ strukturace jako ten, k němuž bude ostatní důsledně vztahovat, aby v pluralitě prezentovaných modelů pochopilo jednotnou logiku násobení jako opakovaného sčítání. Ale právě tento model je prezentován nejasně - jednak jako skoky na číselné ose, jejíž nediskrétnost vytváří překážku v její korespondenci s názorným počtem uspořádaným v řadě, jednak - v podobě opakovaného sčítání - jako pouze pomocný model při vytváření řady násobků. Avšak i pro dítě, které by vzalo tuto logiku násobení za výchozí,

[1] Přesněji popsat tyto chybné postupy ovšem umožní až analýza chyb, ke které se v této stati nedostaneme.

zbývá ještě nutnost objevit technický postup, jak tento pohyb znázornit natolik úsporně, aby byl technicky efektivní.

Jak by tento postup musel vypadat? Znamenalo by to zpřístupnit dětem násobení na prstech. To je možné jen tak, že dítě jmenuje násobky určitého čísla a zároveň na prstech načítá počet jeho opakování. Je to technika odpovídající počítání na prstech, kdy se na prstech zobrazuje velikost operátora. (Zde jsme v rozpacích, kterého z činitelů za operátora označit. Už jsme viděli, že při budování násobkové řady a jí odpovídající série příkladů byl konstanní činitel umisťován jak na první tak i na druhou pozici v příkladu. Logicko-sémantická korespodence pak - jak dále uvidíme - určuje operátora jednoznačně pouze v příkladech typu opakovaného přidávání/ubírání, v ostatních dvou typech jde o simultánní strukturu, v níž je to, který činitel se vezme za výchozí, libovolné.)

Počítá-li v našem záznamu z 12.3.96 Nina na prstech při "počítání po dvou", vypovídá to spíše o specifičnosti násobilky dvou. Spočítání po dvou vytváří - na rozdíl od dalších násobkových řad - techniku natolik blízkou spočítání po jedné, že ji Nina spontánně užívá. V dalším průběhu pololetí jsme však při násobilce počítání na prstech nepozorovali.

Není ovšem paralelismus násobení se sčítáním dětem natolik zjevný, že úvahy o mechaničnosti či formalismu násobilky jsou čistě spekulativní?[2]

Pokusme se ukázat, jak je korespondence ostatních dvou typů zadání a znázornění násobení s pohybem v číselné řadě problematická.

ad 1) **Kusy ve skupinách**. Pohyb v číselné řadě, který dříve znázorňoval sčítání a odčítání, odpovídal operaci s kvalitativně stejnorodými kusy, v níž se manipulovalo s počty, vyjadřujícími právě počet kusů. Avšak násobení jako zjištění počtu kusů strukturovaného ve skupinách operuje s dvěma počty, které se netýkají téže roviny reality.

Při sčítání/odčítání jde o počty elementů stejné třídy či dimenze (takže koncept či prekoncept skupiny tu nemusí být vůbec artikulován), zatímco u násobení (a samozřejmě i u dělení, jak se o tom zmíníme dále) jde o počet elementů různých tříd či dimenzí, které jsou v asymetrickém vztahu v tom smyslu, že první dimenze obsahuje druhou, ale nikoli obráceně (ve družstvech na vybíjenou jsou děvčata, ale nikoli obráceně), takže nějak strukturuje, uspořádává a vlastně determinuje počet z hlediska první dimenze. (Nejde přitom o hierarchický vztah třídy a zahrnutých elementů.)

Logika příkladu se ustavuje v korespondenci s textem. Logika násobení ovšem znamená přechod ke složitější gramatice vztahů v realitě, k dvourozměrným vztahům dvou tříd či dimenzí

Jaká je tedy podstata rozlišení, že např. fazole jsou v řádcích, ale řádky nejsou ve fazolích? Co to znamená "být v"? Je to právě kusovost, jednotkovost na straně fazolí - a jak označit binární protiklad? Souborovost? Skupinovost? Každopádně je to vyjádřeno substantivem, které jako by mělo také kvalitu (lexikální význam, resp. sém) něčeho ohraničujícího, něčeho, co má vnitřek, co je schopno zahrnovat, obsahovat - resp. není jen schopno, nýbrž je k tomu prostě určeno, má to kvalitu ohraničení, obalu, pouzdra; případně je to (většinou v případě osob) schopno něco mít, vlastnit, držet. Toto vymezení je ovšem určeno povahou "kusového substantiva" a vztahem k němu. Je to tedy vymezení relativní: kdybychom mluvili o krmítkách a ptácích, budou krmítka v tomto binárním vztahu v jiné pozici, než mluvíme-li o regálech ve

[2] Připomeňme, že ovládnutí násobilky nakonec musí směřovat k suspenzi logiky jako implicitní, tiché součásti rychlého mechanického ovládnutí symbolických forem. (Nemožnost nahradit toto konečné ovládnutí "mechaniky" vyvozováním příkladů prostřednictvím korespondence s názornými procedurami považujeme za tak zjevnou, že nemusí být argumentována.) Zvenku se toto ovládnutí jeví často naprosto stejně jako mechanicky reprodukovaná číselná říkanka.

skladu, v nichž jsou naskládána krmítka. Tento logicko-sémantický vztah dvou zadaných dimenzí v úloze pak je východiskem chápání logiky operace násobení.

Není-li tento vztah respektován, zní úloha dětem nesmyslně:

13.5.96

Úloha na příklad. *6*4: Bill - šest bidýlek, na každém 4 slepice. Pepík na tentýž příklady stáje a koně.*	
***(!)** Gita na týž příklad: na statku bylo 6 slepic a 4 kohouti. Kolik zvířat dohromady?*	*Dvojí možné vysvětlení: při soustředění na jazykové zadání drží korespondenci množství, ale korespondence "operací" (či spíše gramatiky) se narušuje.* *Je ale také možné, že to od začátku vzala jako příklad na zadaná množství, že nebrala násobení jako součást zadání.* *Zajímavé je zadání dvou různých kvalitativních tříd (slepice a kohouti), pro které pak hledá společnou vyšší třídu (zvířata). Dále se u příkladu na sčítání i Fanda spokojuje s "králíky" a "ještě králíky".*

Dospělý by mohl argumentovat, že i násobení tu dává smysl: vynásobení 2 množin tu dává 24 genetických kombinací. To je však pro děti nedostupné. Matematika je pro ně novým popisem známých sémanticko-logických vztahů, může jejich chápání i zpřesňovat a reflektovat. Avšak generovat je patrně může až z pozice nepříznakové řady, kterou pro děti ještě není. Odkdy a pro které vztahy se jí stane? Můžeme např. uvažovat o tom, že právě násobení (poté co bylo osvojeno jako něco samozřejmého) umožní či zpřesní chápání dvoudimenzionálních vztahů jako je tvoření dvojic z prvků dvou tříd?

Při čtení záznamu zjišťujeme, že v úvodu hodiny se násobilka procvičovala na násobení puntíků:

Karty s puntíky (jako dominové) - vynásobit obě strany. Jeden vytáhne kartu, někoho vyvolá a pak schvaluje výsledek.	*Je to, myslím, jen kvazinázorné. Myslím, že by je dostalo do těžkých obtíží násobit 8 puntíků čtyřmi puntíky: imaginárně to snad lze jen jako kartézský součin (?) - ale puntíky uvnitř množin jsou nerozlišené a tedy nevhodné i pro tuhle - jim nedostupnou - operaci. Samozřejmě převádějí počet na číslo a operaci provádějí symbolicky.*

Nejsme tu pak nakonec svědky toho, že Gita, která patří k nejlepším žákům, konstruuje realitu v korespondenci s matematickou operací? Bylo-li možné počítat "5 puntíků krát 4 puntíky je 20 puntíků", je stejně dobře možné násobit "6 slepic krát 4 kohouti". Problémem je pak právě nalezení jména pro součin jako společný násobek - a Gita právě tenhle problém demonstruje.

Logicko-sémantická dvoudimenzionálnost vztahů činitelů v násobení se zdá být spíše překážkou jejich vyjádření v číselné řadě. Akcent je tu na uspořádání do skupin, uspořádání do řady je na první pohled arbitrární, zraková evidence logiky provedené operace není při uspořádání do řady tak zřetelná - skupiny nejsou tak vidět.

ad2) **Geometrický model**. Dvojrozměrnost operace násobení se zdá z dospělého hlediska dobře vyjádřena modelem sítě. (Mohli bychom ji označit též za analogii "čokoládového modelu", jak o něm hovoří Hejný při vysvětlování zlomků.)[3]

[3] Hejný, M. a kol.: Teória vyučovania matematiky 2. SPN, Bratislava 1990.

28.3.96:

*Kiška: kolik jich je? - sestavila 3*3 - ale kolik jich bylo? (Kiška neví).*	*Sestavují znázornění příkladů na tabuli, Kiška zakreslila tři řady po třech, zapomněla ale zapsat do tabulky, kolik to je, a když se jí studentka ptá, neví. Musí to opravdu zjistit spočítáním! Triáda 3-3-9 ani náhodou.*
Teď už na počítadle: 3 čtveřice (Martin). *(Nejdříve někdo upozorňuje na čísla, obracejí je dozadu - jde jim o kostičky.)* *Martin dělá každou čtveřici jinou barvou.*	*Znázorňují to na onom počítadle, které má na drátech (jsou to spíš duralové trubky) kostky a na nich z jedné strany čísla. Ostatní strany jsou v různých barvách, bez čísel. Čísla by je při počítání kostek mýlila (protože při skládání nerespektují počítadlovou prestrukturaci).*
Čenda - 3 pětice: bez problémů, a zápis do tabulky.	*Studentku asi ani nenapadne, že to, co se jim jinde snaží vštípit, jim tady ruší. Kdyby chtěla být důsledná, pak násobky tří může ukazovat jen na na různém počtu* ***trojic****.* *Jak při téhle nejednoznačnosti zobrazení i jazyka vyvozovat jednoznačný zápis?*
*A co 3*10? - Marcel počítá kostky, ale číslice na nich ho matou!*	*Jasně, vždyť to známe - když znamenají něco jiného, než právě počítáme, jsou napřekážku tím více, čím nepříznakovější mají status.*
Zapisuje do tabulky a trochu váhá nad výsledkem - vrací se pohledem k modelu.	*Sčítá 10+10+10? a potřebuje k tomu názorné zobrazení, když nemá k dispozici tenhle zápis, ale jen příznakové 3*10?*

Je dobře vidět, jak toto znázornění nemělo logiku pohybu v číselné řadě - čísla na počítadle tu byla napřekážku. Rovnání skupin počtů do řad (např. 5 řad po 3) nekoresponduje s číselnou řadou. Pro Kišku, která zjišťuje výsledek 3*3 spočítáním názorného počtu dohromady, nemá nejspíš toto spočítání s běžným sčítáním a odčítáním na počítadle nic společného. Jakákoli podobnost takového znázorňování s počítáním na počítadle tu je jen zdánlivá. Počítadlo láme kontinuální číselnou řadu důsledně podle desítkového principu a nikoli arbitrárně či pokaždé jinak. Geometrické zobrazení násobení na jedné straně a počítadlo na straně druhé jsou pro děti nejspíše dvě zcela různé věci. Že je počítadlo (většinou) čtverec 10*10, jim dojde až mnohem později. Marcela pak mohou mást číslice na kostkách, i když tady je struktura geometrického znázornění a počítadla shodná. Možná mu právě tahle shodnost není jasná, resp. přivádí ho do rozpaků: jak to, že tady se najednou výsledek kryje s tím, co ukazuje počítadlo, když dosud tomu tak nebylo?[4]

[4] Nedá se ovšem vyloučit, že i zalomení řad na počítadle představuje při vytváření logiky pohybu v kontinuální číselné řadě pro děti problém - koneckonců je možná právě tohle jádrem problémů s vyznačením desítky, jak jsme je viděli v první třídě (viz např. Blanka). Na druhé straně je ovšem toto zalamování v přísné korespondenci se strukturací číselné symboliky - jak stavby číslovek tak čísel. Počítadlo není nějaký (jakýkoli) čtverec, ale semisymbolicky strukturovaný počet, jehož zlomy korespondují se zlomy číslovkové a číslicové symboliky. Proto zřejmě i chápání počítadla jako řady stejně kontinuální, jako je řada čísel a číslovek, je dostupné. Zajímavé by bylo zjistit, zda je přičítání/odčítání celých desítek jako změna desítkového registru v nějaké souvislosti s názorným pohybem na počítadle (podobně jako rozklad jednotkového operátora) nebo zda vzniká bez jeho vlivu, tedy čistě v důsledku strukturace symbolického označování, uvnitř jeho struktury.

Naproti tomu geometrické znázornění násobení koresponduje s násobky, nikoli však s kontinuální řadou. Návaznost na logiku sčítání a odčítání (násobení jako opakované sčítání, dělení jako opakované odčítání téhož operátora) tedy spíše rozbíjí, protože ta vycházela z řady, z jinak uspořádaného (strukturovaného) názorného zobrazení.

Násobení se při tomto znázorňování ustavuje jako pohyb separovaný od pohybu v číselné řadě. V nejvýraznější podobě je to patrné tam, kde řada násobků jako by vytvářela speciální řadu čísel, která není integrována do základní číselné řady.

28.3.96:

Číselná osa: doplnit zeleně chybějící číslad (jsou to násobky 3).	*Rošťáci duchové smazali některá čísla, mají je doplnit zeleně. Zpočátku jim neříká, co mají ta čísla společného.*
Martin chce dopsat chybějící "12" mezi "8" a "10".	*Původně jsem tomu nevěnoval příliš pozornosti, ale teď mi připadá, že to může mít dalekosáhlý význam!*
Může to ukazovat, že řada násobků tří je pro Martina opravdu novou řadou, do jisté míry úplně jinou, která se tu dokonce vymyká ze závislosti, z odvozenosti na řadě původní: Kdyby chápal 12 jako část původní řady a nikoli jako součást jiné řady, už dávno (před rokem) by nemohl tuhle chybu udělat! *Trochu mi tu chybí přesnější popis, jak k chybě došlo. Každopádně Martin doplňoval 12 ve chvíli, kdy místo devítky bylo ještě prázdné. Studentka ho nechala - spoustu věcí doplňují napřeskáčku, podle vlastního výběru. Ale Martin se možná spletl v řadě násobků a 12 měl za další, který následuje po 6? Ale to by v té chvíli musel už chápat chybějící čísla jako násobky tří. Není to vyloučené - a stržen objevem udělal tuhle chybu? Ale možná je také mnohem prozaičtější interpretace, že totiž si vyhlédl řešení, šel ho zapsat a cestou k tabuli si popletl mezery. Pak by to ošem signalizovalo, že číselné okolí ho ještě nedokáže vést natolik, aby ho chyba bila do očí.*	

Podobnou chybu ale dělá Martin i později:

15.4.96:

Martin: 12-(6)=3. Po vysvětlování učitelky na prstech přidává operátor na 7, na 8 a pak na 9.	*Zdá se mi, že Martin se pohybuje v kontextu násobení a navíc zaměnil ekvivalentní triády (12 -6 - 2 a 12 - 4 - 3).*

Martin má doplnit střední člen příkladu. Když ho učitelka vede k odčítání, vypadá to, jako by nepochopil nutnou změnu kontextu a nehledal triádu na odčítání. Jako by pochopil jen to, že operátor je moc malý, a tak ho postupně mění o jednu. Je to možná zase postup převzatý z násobení: tam změna operátora o jednu mění výsledek o celý násobek. Když učitelce vyšel s jeho operátorem výsledek 6, pak - pokud by se pohyboval v řadě násobků tří (a to má logiku, když 12 i 3 jsou členy této řady) - změna operátora o jednu znamená dostat se o jeden násobek níže: místo 6 by teď mělo vyjít 3.

Ale to může také vysvětlovat původní chybu trochu jinak a jednodušeji. Nemusel zaměnit vztahy čísel při odčítání za vztahy při dělení, nýbrž při odčítání se mohl pohybovat v násobkové řadě tří. Tam se spletl o jednu (jeden násobek). Šlo by tedy o interferenci odčítání a dělení nikoli na úrovni celků triadických struktur a pohybů v nich, ale na úrovni jinak vytvářených číselných řad.

Zdá se, že nesamozřejmost přechodů mezi sčítáním/odčítáním a násobením/dělením může indikovat právě jejich separovanost nejen jako operací, ale i separovanost "číselných prostorů", v nichž se tyto operace provádějí.

3.6.96:

*Karla si vybírá 5*5, ale ten už je vypočítaný. - Učitelka: vyber si jiný. - 8*4: mlčí - Kolik je 7*4? - Vzpomene si: 28. - A 28+4? - Po váhání: 35.*	*Teď vidím, že Karla přece jen pochopila, o co jde, jenže namísto násobku* ***čtyř*** *následujícího po 28 řekla další násobek* ***sedmi****! To znamená, že 28+4 nesčítala, nýbrž vzala ho jako nápovědu východiska ke hledání sousedního násobku. Což taky byl.*
Nevymyslí to. Přede mnou Aleš se tomu směje (ale jen potichu - je to ten úsměv "při senzaci").	*Je to takový ten rádoby nevěřícný úsměv plný jakoby údivu, že tohle může někdo vorat. Mám dojem, že je to úsměv zároveň radostný - je v něm radost nad vlastním pozdvižením, které tak vzniká. (To platí obecně, nejen teď pro Aleše.)*

Karla patří ve třídě k horším žákům. Ale nesamozřejmost přechodu mezi prostorem sčítání a násobení můžeme vidět ještě o týden později i u jednoho z nejlepších počtářů:

10.6.96:

Zavřít sešity. - Násobky čísla 8: Marcel - po 56 zadrhne (učitelka: pomoz si, přičti 8) - učitelka: "zapomněl na začátku nulu".	*Jasně se musí připomenout mechanismus tvorby říkanky, přestože je zadána jako "násobky 8". Může to ale znamenat dvě věci: suspenzi korespondence říkanky s číselnou řadou nebo suspenzi ekvivalence násobení a opakovaného načítání.*

Ovšem ony "dvě věci", o kterých v záznamu uvažujeme, jsou neoddělitelné, jde vlastně o totéž. Číselná řada se vytvořila jako prostor, v němž se odehrává sčítání a odčítání. Chybění souvislosti násobkové řady se základní číselnou řadou je právě chyběním souvislosti se sčítáním/odčítáním, s řadou, v níž se sčítá/odčítá.[5]

Na druhé straně se zdá, že některé případy svědčí pro integrovanou představu číselné řady jako řady, v níž se odehrává jak sčítání/odčítání, tak násobení/dělení. Je to např. chápání dělení se zbytkem. Taková zadání se ve druhé třídě objevují jako kuriozita nebo jako omyl. Tak když 2.4. dělí 18 dílků čokolády mezi 2 a pak 3 medvědy, učitelka-studentka se zeptá, jak by to bylo se 4 medvědy. Jeden chlapec odpovídá, že by každý dostal 4 a osvědčuje tak podle našeho názoru, že nepřiřazuje mechanicky dvěma členům příkladu třetí, ale že chápe jednak postavení přinejmenším postavení výchozího členu příkladu mezi dvěma násobky 4 a tedy zakotvuje tyto násobky v číselné řadě, a možná i princip dělení se zbytkem. To budou děti probírat zhruba v polovině 3. třídy.

Když se 10.6. setkaly děti s podobným příkladem, který byl zadán v důsledku omylu v učebnici, vykazovala řešení i jinou logiku:

Cv. 1 za DÚ, teď 2/37 - "dělicí stroj": *Bill: 45 a vyleze... pětka (dívá se na tabuli).*	*Dělicí stroj je schéma dělení 9, kde mají doplňovat podíl, je-li zadán dělenec. Bill hledá výsledek ve sloupci příkladů na násobení devíti na tabuli.*

[5] Souvisí pak nepoužívání prstů, které jsou z předchozího chápány jako analogon číselné řady, se speciálností násobkových řad, s jejich chápáním mimo číselnou řadu?

Darina: 61 a vyleze sedmička. *Lada: "vyleze nula"*	*V tabulce je skutečně jako dělenec 61, Darina to vzala (a zaměnila se 63), ale ostatní děti poznaly, že je to chyták. Lada si ale myslela, že takový chyták má řešení: když příklad "nejde", nevyjde nic, tedy nula - nula se tak prostřednictvím své korespondence s "nic" stává také synonymem výrazů "to nejde", "to je nesmysl".*

Přece jen však, při všech problémech, k postupné integraci násobkových řad do základní číselné řady nakonec dochází.[6]

Ovšem stačí změna kontextu tak, že k násobení neodkazuje pro ně zjevným způsobem, aby se souvislost sčítání a násobení - pokud už vznikla - musela jakoby ustavovat znovu.

18.6.96:

Co je obvod čtverce: Pepík ukazuje.	
Jak spočítáme obvod, když je délka jen u jedné strany? - Bill nějak nepřesně, Eliščina formulace přesná: všechny strany stejně dlouhé, takže když AB=6cm, tak ostatní taky 6 cm.	*Klasický sylogismus. Utkvělo mi v paměti použití spojky "takže".*
Všichni (?) to zapsali příkladem na sčítání: 6cm+6cm+6cm+6cm=24cm (Kiška na tabuli).	
Jak to jde jinak? Martin to říká, ale na tabuli zapisuje: 4cm - učitelka ho zastavuje, Martin vzápětí zapomíná připsat "cm" za šestkou.*	*Aktivuje se triáda, ale umístění jednotky cm dělá potíže - jde o korespondenci čísel v triádě s délkou stran, jejich počtem a obvodem. Je zřetelné, jak už v tomto jednoduchém zadání vystupuje problém korespondence s příkladem?*

Jde o to, že korespondence zadání "obvod čtverce" s příkladem je možná jen tehdy, je-li pojem čtverec definičně rozvinut. Vlastně teprve úplný sylogismus, jak ho řekla Lada, vytváří explicitní korespondenci. Jinak jde o korespondenci implicitní, která může nastat až po osvojení pojmu čtverce. (Tzn. osvojení paralelismu procedury "narýsovat či jinak konstruovat čtverec" a "mluvení o něm" - jeho verbální označení, definování jeho atributů. A tady je dobré si uvědomit, kolik úsilí bylo předtím ve škole věnováno procedurám, které definují shodnost či rozdílnost úseček a paralelnímu diskursu.)[7]

[6] Pokud bychom dělení se zbytkem vzali jako její indikátor, pak je významné, že 29.1.97 konstatuje učitelka v této třídě, že ji mile překvapili: Po jediném týdnu, kdy probírali dělení se zbytkem, má většina třídy z prověrky jedničky a jen jedna dívka zřejmě nepochopila logiku této operace.

[7] Martin už tu nemá problém s přechodem od sčítání k násobení (když je o něj požádán), ale naráží tu na problém rozlišení sémanticko-logické kvality dvou počtů. Martin přiděluje kusovou kvalitu straně. Ale strana tu v příkladu představuje "skupinový" parametr, její délka "kusový". Ale tom je právě komplikace. Problémem nediskrétních veličin je to, že se jeví také (stejně jako samy jejich soubory) jako kus, nikoli jako skupina obsahující nějaký počet. Jsou jako počet strukturovány uměle, konvenčně, prostřednictvím zvolené jednotky. Děti už v tuto chvíli umí měřit a tím zjistit počet kusů ve straně. Ale osvojením této procedury se teprve začaly propracovávat ke strukturaci nediskrétní veličiny, která umožňuje její kvantifikaci (a stanovení strukturovaných rozdílů "o tolik a tolik větší/menší") prostřednictvím čísel, která u diskrétních počtů už je dávno osvojena. Samozřejmost vyjádření strany jako velikosti však pro ně smazává rozdíl mezi nimi, nechápou měření ve významu odlišení "strany" od "velikosti, délky strany" jako různých pojmů, a "centimetry" tak mohou být stejně dobře u počtu stran jako u jejich délky.

DĚLENÍ

Významné pro chápání násobení je ovšem zavedení dělení a jeho logika. Platí to tím spíše, že ačkoli jsme se snažili dosud analýzu osvojování logiky násobení držet jako samostatný problém, ve skutečnosti tomu tak nebylo. Dělení bylo zavedeno brzy po násobení, registrujeme ho poprvé už v záznamu z 5.3.96, tedy týden po násobení:

<table>
<tr><td>Včera začali s dělením: rozdávali karty čertům, aby každý dostal stejně.</td><td></td></tr>
<tr><td>Bill má rozdat 8 karet Slávkovi a Mikulášovi na prší - každému 4 - a příklad.</td><td>Příklad jsem asi nestihl zapsat, asi na něm nebylo nic zvláštního: 8:4=2, tedy osum karet rozdělit po čtyřech. A nebo 8:2=4, tedy osum karet rozdělit po dvou? Jakmile je triáda jasná, jsou tyhle dva příklady v komutativním vztahu! jsou zaměnitelné! - přestože dělení komutativní není. Matematicky jsou totéž, protože jsou inverzí komutativního násobení. Determinace výběru správného příkladu není matematické povahy, je dána syntaxí zadání.</td></tr>
<tr><td>6 dětí - rozdat 12 karet.
Blbnou s kartami, učitelka se zlobí.</td><td>Opravdové hrací karty je podněcují k simulaci činností zcela neučebních.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Příklad: 12:6=2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Teď s kartičkou na lavici: 6 kartičkami podělit 3 děti. Bořek bez problémů.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Pak 6 dětí - problém se zněním příkladu (= problém s korespondencí operace "rozdělit šesti dětem" ~ "děleno šesti" (problém gramatické korespondence?)
[Měli by tu procvičovat synonymickou řadu = gramatiku různých pádových vazeb!]</td></tr>
<tr><td>Dělení bonbónů:
Hanka
/ \
O O O O
\ /
Jirka Kolik každý?</td><td>Dělení střídavým přiřazováním uspořádané řady do daného počtu skupin.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Příklad - Mikuláš: dvě děleno dvouma.
Učitelka: Kolik bylo bonbónů celkem? - Mikuláš: čtyři: 4:2= ... dva... jedna... dva</td></tr>
<tr><td>Nakreslit 10 čtverečků do 2 skupinek: Bill to kreslí na tabuli odzadu. - Učitelka: ale co kdybys to nevěděl? - Nakonec je kreslí neuspořádaně a rozděluje čarami nasměrovanými buď doprava nebo doleva ke skupině (1) a (2).</td><td>Zpočátku to vypadalo, že Bill kreslí rovnou 2 skupiny po 5, po zásahu učitelky přikreslil zbytek čtverečků neuspořádaně.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Bořek to kreslil do dvojic (|:první druhý:|) - Jak věděl, kdy má skončit? - "Já mam totiž 11 fix."</td><td>Překvapil mě. Nakreslil do řádku vlevo první čtvereček, vpravo druhý. Pak do dalšího řádku totéž, pak třetí řádek atd. Myslel jsem, že odpověď na otázku, jak věděl, kdy má skončit, dokáže, že se vlastně pohyboval ve známé triádě (a v jistém smyslu znal výsledek předem - kreslil 5 dvojic nebo 2 pětice). Ale Bořek kreslil každý čtvereček jiným fixem a protože věděl, že má fixů jedenáct, věděl, že aby bylo čtverečků deset, musí skončit s předposledním fixem.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Příklad - Bořek bez problémů 10:2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Učitelka vysvětluje Karle - na kolik skupin jsme to dělili? - Karla asi stejně nechápe (?)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Prac. sešit s. 11 (Učíme se dělit) - cv. 2: zapsat příklady k imaginárnímu zobrazení.</td></tr>
<tr><td colspan="2">9 vajíček do 3 misek, 4 papoušci do 2 klecí.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Martin nejdříve dělá chybu (8:4), když má 8 puntíků rozdělit na 2 skupiny - sám se opravuje.</td></tr>
<tr><td>Učitelka jim vytýká, že to kreslí rovnou jako 4 a 4 namísto postupného střídavého přiřazování.</td><td>Na jehož konci by byl zjištěn výsledek. Imaginární zdůvodnění jako by nefungovalo, protože ho nepotřebují - ale možná plní svou funkci, přestože děti vlastně obracejí kauzalitu argumentace.</td></tr>
<tr><td>Bill má rozdělit 12 čárek do 3 skupin, ale nezastavil distribuci včas a do první skupiny namaloval 5 čárek.</td><td>Tohle musí řešit tak, že mechanickou distribuci do 3 skupin doprovází mechanickým pohybem v číselné řadě až po vyčerpání celkového množství. Není jasné, co Bill nezvládl - zda zapomněl vůbec počítat nebo zapomněl zastavit na 12.</td></tr>
<tr><td>Bořek kreslí po 6 čárkách, když má 10 rozdělit na 2, ale na chybu přichází sám</td><td>Stejná chyba jako u Billa?</td></tr>
<tr><td>Rozdělit 9 koleček do 3 řádků: Slávek nejdříve začíná plnit řádek, pak zase pokračuje v prvním sloupci až na 4. řádek. Nakonec už má 9, ale na dotaz tvrdí, že jich není 9.</td><td>Přestože pracují se čtvercovými sítěmi, nezdá se, že by to pro ně bylo nepříznakové znázornění. V testu zatím nikdo nedokázal rozdělit čtverec na devět stejných částí (tedy do čtvercové sítě). Je možné, že by chápali dělení čtverce jako dělení nediskrétní veličiny, kde části nepředstavují jednotlivé předměty? Jako by pro ně geometrický výraz násobení (jako obsah čtverce nebo obdélníka) nebyl znázorněním, které jim něco vysvětluje, jako by to byla také příznaková struktura, která nemůže být použita k vysvětlení.</td></tr>
<tr><td>Zakreslování koleček do čtvercových sítí: 15 koleček do 5 řádků</td><td></td></tr>
</table>

Luděk nakreslil první sloupek, pak ale chtěl plnit už první řádky (celé? nebo ho učitelka u 3. kolečka náhodou zarazila?) - učitelka ho vrací ke střídavému přiřazování.	*Tenhle zápis je totálně zmatený. Je jasné, že síť musí být větší než 5x3, protože jinak by šlo o pouhé vybarvování.* *Správný postup má být: vyplnit první kolečko v každé ze tří řádek, pak druhé ve všech řádkách atd. Luděk místo toho plní celý řádek - a není jasné, zda by zastavil u třetího kolečka v řádku nebo by pokračoval, kdyby ho učitelka nezarazila. Každopádně se zdá, že tato úloha pro ně není tím, čím snad podle didaktického záměru být má: měli by chápat, že znají obsah obdélníka a jeden jeho rozměr (5 řádek) a hledají druhý - počet sloupců.* *Zdá se, že postupují jakýmsi zkusmým plněním sítě. Škoda, že to Luďka nenechala dodělat podle jeho záměru.*

Můžeme tu vidět, že znázorňování dělení lze provádět 3 způsoby:

1. Střídavým přiřazováním do daného počtu skupin. (Sem patří i rozdávání karet hráčům, ale také rozdělování počtu do sítě - pokud není prováděno zkusmo či "odzadu", kdy se znázornění odvozuje z vyřešeného příkladu, z doplněné číselné triády. Tento případ by pak patřil k bodu 3.)
2. Postupným označováním počtů tvořících skupinu (kroužkování)
3. Inverzní interpretací struktury odpovídající násobení.

Problémy dětí se znázorněním a zápisem správného příkladu vyplývají zřejmě

a) z nerozlišování prvních dvou případů, tedy střídavého přiřazování a grupování,

b) z nerozlišení násobení a dělení jako inverzních operací v téže struktuře počtů.

ad a) Ačkoli se může zdát, že dělení střídavým přiřazováním do daného počtu skupin (sem patří i rozdávání karet hráčům) jednoznačně odpovídá zadání "kolik je v každé skupině" a potažmo kroužkování odpovídá zadání "kolik je skupin", ve skutečnosti to tak není.

Např. v úloze rozdělit 12 květin do 3 váz je kroužkování po 3 květinách operace ekvivalentní střídavému přiřazování do 3 skupin kreslením přiřazovacích čárek střídavě k první, druhé a třetí váze. Odpovídá to tomu, že počet směrů (skupin) přiřazení je stejný jako počet prvků (n) v každé z n-tic, uvnitř nichž se nesmí opakovat stejný směr přiřazení (přiřazení do stejné skupiny). Ale ekvivalence tu asi budí rozpaky, protože pak rozdělení "do tří" skupin a rozdělení do trojic, "po třech" je totéž.

Ani při dělení se tu nedá vyhnout komutativnosti násobení. Ať dítě zvolí jako prostředek řešení kterýkoli způsob znázornění, dostává pomocí strukturace prostřednictvím jednoho počtu (činitele) druhý hledaný počet (činitel). Problém je ovšem s jeho čtením, s jeho korespondencí - na jedné straně s jazykovým zadáním, na straně druhé s příkladem. Znázornění je dvojznačné, nezachycuje gramatiku úlohy jednoznačně, a počet zakroužkování může znamenat jak dělitele tak podíl.

Možnosti se zdají být dvě: buď zavést do znázorňování striktní pravidla nebo ho brzy opustit a začít pracovat s triádami, jak to dělá klasický didaktický postup.

Grafické znázorňování by pak muselo vycházet z jednoznačného významu kroužku jako znázornění skupinového parametru struktury:

1. Postupným přiřazováním se celkové množství (dělenec) dělí do známého počtu skupin odpovídajících děliteli. Zakroužkovat pak lze konce přiřazovacích čárek (distribučních pohybů), počet zakroužkování odpovídá děliteli, počet uvnitř každého kroužku pak podílu.

2. Celkový počet (dělenec) se zakroužkováním rozdělí po počtech odpovídajících počtu v jedné skupině (děliteli). Počet kroužků pak odpovídá podílu. (Je to tedy opačně než v předchozím případě.)

Pak by nemohlo docházet k tomu, že počet zakroužkování znamená jednou počet skupin a jindy počet kusů ve skupině.

Podobný problém nastává i při vysvětlování dělení jako opakovaného odčítání, které bylo opět prezentováno jako jedno z možných znázornění dělení.

15.4.96:

S. 23, cv.1: Kolikrát můžeme odečíst 4 od 12, než dostaneme nulu? *Zapiš jako odčítání.* *Zapiš jako dělení.*
Luděk zapisuje odčítání - potichu a bez váhání: 12-4-4-4=0
Jako dělení:12:3=4 (Alena) - Učitelka to nejdřív odkývla, ale pak to chce obráceně: "12:4=3" - "ubírali jsme po čtyřech a ubírali jsme třikrát".

Učitelka. má pravdu jen potud, pokud vyjde z gramatiky zadání a trvá na tom, že to, na co se ptá otázka, musí být v sestaveném příkladu tím, co hledáme jako výsledek - že tedy sestavujeme "obyčejný příklad".

Jinak ale gramatika tak jednoznačná není: grupovat "po čtyřech" neznamená nutně "dělit čtyřmi", protože "dělit čtyřmi" může také znamenat "dělit na čtyři" - a to v této triádě znamená naopak "grupovat po třech".

Logika znázornění jako "spravedlivého dělení" umožňuje proceduru, jíž lze dospět k výsledku. V tomto významu děti zřejmě původně dělení chápou a je jim v něm možná bližší než násobení, kde předpoklad téhož či opakujícího se počtu v různých "skupinách" zní v zadáních mnohých úloh někdy arbitrárně. Avšak platí tady totéž, co pro násobení: žádný ze způsobů znázornění nenabývá statusu techniky počítání. Grafické znázornění dělení však do jisté míry nevyhovuje ani jako zdůvodnění logiky, právě pro svou nejednoznačnost svých procedur. Tyto procedury korespondují s operací, znázorňují různé způsoby jak "provádět dělení", avšak nejednoznačnost výsledného uspořádání i jeho nepřehlednost (je-li kroužkován či přiřazován předem neuspořádaný počet) znesnadňují výslednou simultánní strukturaci, která by korespondovala s příkladem jako celkem. Jednoznačnosti uspořádání pak nabývá ve strukturaci, v níž je dělení zaměnitelné s násobením (jako např. v síti).

Při této nejednoznačnosti pak správnost jednoho či druhého čtení či zápisu nemůže určit samo znázornění. Logické správnosti jakožto jednoznačnosti korespondence nabývá znázornění a příklad jedině v souvislosti s textem zadání, jíž se budeme zabývat později.

ad b) Ve skutečnosti se problém nejednoznačnosti znázornění řešil spíše odkazem k logice dělení jako operace inverzní s násobením. K tomuto problému odkazuje také třetí možný způsob znázornění dělení. Zní-li příklad 3 na str. 23 Pracovního sešitu "Znázorni ve čtvercové síti", přičemž se tu do dvou shodně strukturovaných sítí (6 čtverečků svisle x 10 vodorovně) má do prvé znázornit příklad "28:4=" a do druhé "4*8=", je zjevné, že simultánní struktura znázornění je vlastně znázorněním číselné triády a příklady pak zápisem různého pohybu v téže triádě.

Je-li ovšem ve svém praktickém významu a snad i při znázorňování operace dělení vůči násobení operací rovnocennou, sice inverzní, avšak nikoli nějak sekundární či odvozenou, je tomu při dalším učení násobilce jako systému násobkových řad jinak. Dělení se stává operací odvozenou od násobení, vůči němu sekundární. Je to logické: je to násobení, které vytváří systém násobků, a teprve v takto vytvořeném systému se může odehrávat i operace dělení.

Kdybychom chtěli tuto nevyváženost odstranit, bylo by prvním předpokladem zavést opakované odčítání jako závaznou proceduru hledání výsledku příkladu počítáním (tj. nikoli pamětním doplněním číselné triády) - tzn. postupu inverzního k tomu, o kterém jsme hovořili při násobení jako o možnosti, jak ho prezentovat důsledně jako pohyb ve stejné číselné řadě, která se předtím vytvořila jako prostor sčítání/odčítání.

To by však nestačilo. Bylo by nutné hned zpočátku zavést dělení se zbytkem, tak aby bylo možno dělit každé číslo, nejen jejich soubor konstruovaný předtím násobením.

Skutečný postup byl jiný. Děti vycházejí od násobení, které se stává konstituentem násobkové řady a tím i dělení. Z množství způsobů ukazujících logiku dělení pak tomu skutečně uplatňovanému odpovídal tento: 12:3=( ), protože 3*( )=12.Výsledek dělení je odvozen z triády násobení, netvoří samostatný příklad nezávislý na násobení (jako tomu bylo původně u vztahu sčítání a odčítání). Je zjevné, že pokud muselo být dělení zprostředkováno operací, jejíž logika sama se dosud nekonstituovala a opírala se o mechanickou reprodukci příkladu jako číselné říkanky, zůstávala tím spíše nepochopena logika dělení.

Původně prezentovaná logika dělení názorných počtů se nepřevádí na logiku pohybu v číselné řadě přímo, nýbrž oklikou. Logika dělení se stává logikou inverze symbolické formy násobení, jejíž význam však dosud není plně chápán jako ekvivalent opakovaného sčítání. Zkušenost se symbolickými formami příkladu ale umožňuje pochopení analogie a ekvivalence symbolických forem patrně mnohem dříve, než je děti pochopí jako opačný pohyb v číselné řadě či v uspořádaná řadě názorné. Dělení jako řešení příkladů na dělení je tak zprvu symbolickým derivátem násobení. (Připomeňme, že při sčítání a odčítání jsme považovali vývoj logiky počítání příkladu a vývoj chápání podobnosti mezi příklady za relativně samostatné, avšak těsně spjaté linie vývoje, kde sice primární posun může nastat v té či oné linii, avšak má za následek příslušnou restrukturaci a posun v linii druhé.)

2.4.96:

Prac. sešit s.23 - třetí modrý čtvereček shora: Čokoláda s 18 dílky - rozdělit ***spravedlivě*** *mezi medvědy → všichni stejně.*	*Povídá se o tom, že spravedlivé dělení je na stejné části a při jiném by se asi medvědi poprali.*
Když máme 2 medvědy - jak víme, že má mít každý 9? - Fanda: 9+9=18.	*Studentka mu to odsouhlasí, myslím že dodala také variantu 18:2.*
Máme 3 medvědy: Nina - 6, ale příklad plete: 18:2. - Uč.: máme ***tři*** *medvědy - Nina opravuje.*	*Tahle ukázka a dále potom příklady "myslím si číslo" se mi v tuto chvíli zdají klíčové pro pochopení zásadního faktu: výsledek dělení se neodvozuje z operace dělení, ale z triády, z pohybu v ní. Nina zná výsledek, ale neví, jak se k němu dostala. Dostala se k němu ovšem doplněním triády.*

Nina intuitivně doplňuje triádu, ale nemá ještě jasno v tom, že jeden pohyb v triádě je násobení a dělení je opačný pohyb v téže triádě. Dělit je pro ni příklad s "děleno".[8]

[8] Když se studentka na počátku hodiny ptá, co se učili v matematice, dostává se jí od Gity odpovědi: "počítat: děleno, krát, sčítat, odčítat". Sčítání a odčítání je tu pojmenováno slovesem, které jako by zároveň mělo svůj samozřejmý význam. Naproti tomu násobilka je zastoupena jen jmény matematických znamének, jako by zatím jiný význam neměla, jako by nebyla spojena s ničím reálným.)

2.4.96:

Doplňování do tabulky: *15 | 6 | 18 | 24 | 30 | 27 |* *-----------------------------* *5 | 2 |*	*Tabulka je vedle "dělicího stroje".*
Aleš: 18:3=... 6 (krátká pauza: musí to ověřit násobením?	
27 (v tabulce) - pod něj Nina říká nejdřív 7 (učitelka si asi myslí, že to je místo 27).	*Nina asi dosazuje do triád, ale nemá je ještě pevné - zase jako by se tu objevovala opožděná strukturace, když členem (a potenciálním operátorem) jsou čísla 7 až 9 (?).*
"To je lehký, to je jasný", říká Bořek a vykládá mi inverzní operace v triádě.	*Vypadá to, že došel od intuitivního dosazování k uvědomění - intuitivní operace nabývají slovního výrazu.*
Vanda nezabírá na 9:3. - Studentka: Kolikrát 3 nám dá 9? - Třikrát. - A 9:3? - neví. *(Nemá operace násobení a dělení jako inverzní.)*	
*Projede s ní řadu příkladů na násobení 3, dojdou ke 3*3=9: Kolik je tedy 9:3; - Vanda: Šest* ***(!)*** *[Triáda sčítání!]*	

Problém studentky je v tom, že nechápe, co Vanda nechápe - souvislost 3*3 a 9:3 má za samozřejmou, bere ji jako výchozí přepoklad obou operací. Nechápe, že je to souvislost, kterou teprve musí Vandě ukázat. Příklad, který Vanda chápe, je příklad na násobení typu "myslím si číslo". S ním nemají děti problémy.

Myslím si číslo*. Když ho vynásobím pěti, dostanu deset.*	*Klasická forma i formulace. Projeli takhle několik příkladů, děti, které se hlásily, to zvládaly bez problémů.*

Co však problémy dělá, je ekvivalence mezi "myslím si číslo" u násobení a "obyčejným příkladem" u inverzní operace dělení. Tato ekvivalence je na jejich cestě klíčem k chápání logiky dělení.

Oproti tomu, co jsme popsali u sčítání/odčítání, je tohle novum: tady se reálně ustavují analogie (ekvivalence) nejen mezi obyčejnými příklady, ale analogie mezi i příklady na "doplňování" a "myslím si číslo" s obyčejnými příklady za inverzní operace.

Při sčítání/odčítání by tomu odpovídalo ( )+(b)=c <=> c-b=( ), tedy převedení příkladu "myslím si číslo" na obyčejný inverzní příklad. To ovšem u sčítání a odčítání děti vůbec nepotřebovaly a také k téhle analogii nedospěly. Tam pochopily nejprve sčítání a odčítání jako dvě nezávislé operace a teprve později objevily jejich souvislost. Tady se však dělení dá (efektivně) pochopit jen skrze souvislost s násobením, právě jako jeho inverze. Cesta k tomu vede právě přes ustavení ekvivalence příkladu "myslím si číslo" s obyčejným inverzním příkladem. Násobení je konstituentem dělení.

15.4.96:

Karla: "Ježišmarja!", když na ní zbylo jen 36:4, 21:3 a 16:4. Dlouho váhá. *"Který počítáš?" - ukázala 16:4 - "Kolikrát čtyři je šestnáct?". Jede s ní řadu 1*4, 2*4, 3*4. Když dojedou 4*4=16 (jde to ztuha!), píše Karla výsledek: 16:4=16 (!)*	*Co přesně to tu Karla vyvedla? Je to známka toho, že triáda jako souvislost příkladů ještě nevznikla? Chápe, že učitelka ji chce dovést ke správnému číslu, ale hledané číslo je pro ni na konci "obyčejného příkladu" jako jeho výsledek.*

Možná je to ještě trochu jinak. Během počítání řady příkladů na násobení se pro ni změnil kontext: z původního "myslím si číslo" přešaltovala na "obyčejné příklady". Při nich je akcent na hledání posledního členu. Tuhle strukturu pak Karla ponechala při návratu do původního kontextu. Není z toho jasné, zda souvislost příkladů nechápe či zda jen "opomněla" jeden z nutných kroků. Každopádně je ale na úrovni, kdy tahle změna, přechod mezi kontexty, přinejmenším vyžaduje speciální pozornost, spíše však oporu učitele; je speciálním krokem, nerozumí se sama sebou.

13.5.96:

Kytička: *36 ( )* *42 ( )* *48 ( ) 6* *54 ( )* *24 ( )*	*Ve středu kytičky je "6". Má pak dva okruhy okvětních lístků, na vnějších jsou napsána čísla (první sloupec), vnitřní jsou prázdné, mají je doplnit. Jasné doplňování triád.*
Uč.: Co budeme dělat? - Karla ví: šest krát něco rovná se 42. - Uč.: Jak to jinak můžeme říct?	
Někteří (Gita?) tuhle formulaci uvítají jako objev!	*Škoda, že se u toho trošku nezdrželi, ale pár (?) překvapených "aha" se mi tu zdá velmi významnou skutečností.*

Učitelka poukázala na to, že Karlin příklad můžeme také formulovat jako "42 děleno něčím rovná se šest". "Aha" se týká uvědomění si toho, že násobení a dělení jsou inverzní operace, že se mohu pohybovat od středu kytky ke kraji nebo obráceně a zůstávám v téže triádě, přičemž operace se mění. "Aha" tu asi vítá něco, co je intuitivně připraveno, s čím se zachází, ale nemělo to dosud svůj jasný výraz.

PROBLÉMY KORESPONDENCE ÚLOH NA NÁSOBENÍ A DĚLENÍ

Základním problémem však je diferenciace členů triády a logika jejich korespondence s realitou úlohy, popisovanou textem zadání.

(30.4.96)

2/27b: Kolik váží 1 krabice? (Na vahách 5kg a 5 krabic.) *Alena: 1kg - Jak jsi to spočítala? - váhá, pak 5*1=5, Bill opravuje na 1*5=5.*	*Dosazuje prostě třetí člen triády.*
2 krabice - 10kg. Kolik váží jedna krabice? - Napsat příklad. *Dori: 2:2=5*	*Dorianin příklad patrně říká: 2 krabice jako 2 části (deseti), to znamená 5.*

Denisa: 10:2=5.	
*Martin: 2*5 - Učitelka ho přesvědčuje, že je to na dělení.*	*Martin to myslím bral jako jinou možnost, jak dojít k výsledku.* *Námitka učitelky jde po linii gramatiky.*

Nediferencovanost jednotlivých příkladů jakožto konkrétních výrazů vztahů čísel v číselné triádě se zdá u násobení/dělení ještě větším problémem než tomu bylo při sčítání/odčítání. Je to konzistentní s naší domněnkou, že triády násobení/dělení vznikají mnohem více jako intuitivní deriváty symbolických forem, bez reflektování matematické operace jakožto posloupnosti, jíž odpovídá nějaká posloupnost činnosti. Přispívá k tomu významová mnohoznačnost příkladů, nejednoznačnost jejich překladu do jazykového vyjádření.

Dokonce i operátor jako počet opakování dílčích kroků operace je v násobení jazykově nejednoznačný: 5*3 => "pětkrát vezmeme tři" nebo "vezmeme pět", a to 'krát tři = třikrát'"? Operátor tu není nutně středním členem příkladu. Z toho ale vyplývá nejednoznačnost inverze. Matematicky sice platí, že a*b=c <=> c:b=a <=> c:a=b, ale tato libovolnost znejasňuje, co je výsledek, a způsobuje tak u dětí neadekvátní vyjádření zadání příkladem. (Srv: později fazole a řádky: zapíšu-li zadání jako 48:6=8, pak výsledek příkladu neodpovídá tomu, na co se ptá otázka. To se jim také stalo - buď měli špatně příklad nebo ze správného příkladu špatně odečítali odpověď. Při složeném počítání (zadání slovní úlohy) by pak bylo východisko dalšího postupu chybné.)

Dalo by se tomu zabránit zavedením nějakých normativních konstrukcí příkladu, které by měly závazně formu korespondující se zadáním a v důsledku toho i závaznou formu čtení, a jejich odlišením od pomocných konstrukcí, tzn. od dalších úprav příkladu, které jsou ekvivalentní a výhodné matematicky, ale nikoli logicko-sémanticky, a jimiž si jen pomáháme při výpočtu, "aby se nám lépe počítalo"?

Mohla by se při tom využít logika násobení vyplývajícící z korespondencí s opakovaným sčítáním/odčítáním? Mohla by korespondence se znázorňováním (tedy i způsob znázorňování) být strukturována tak, aby to vytvářelo jednoznačnou korespondenci příkladu?

13.5.96

Tvoří úlohy na zadaný příklad.

(Učitelka se pravidelně táže: "A otázka?")	*Ano - otázka rozhodujícím způsobem ovlivňuje či definuje gramatickou korespondenci.*

Otázka ve slovních úlohách determinuje přechod od simultánní struktury číselné triády k sukcesivní struktuře příkladu, resp. je zakotvením simultánní triády v sukcesivní podobě.

4/32: Slovní úloha: turnaj ve vybíjené - 30 děvčat, 6 děvčat v každém družstvu. Kolik družstev?	
Jaký bude příklad?: Luděk - 5, někdo - 6, Mikuláš: 30:6 (?). *Někdo spletl odpověď: přijede 5 děvčat.*	*První odpovědi říkají "výsledek" a ne "příklad". Odpovídají tedy na otázku zadání, ale ne na to, jaká bude operace.* *Špatná odpověď zaměnila činitele: špatně je to právě jen v korespondenci s gramatikou slovního zadání.*

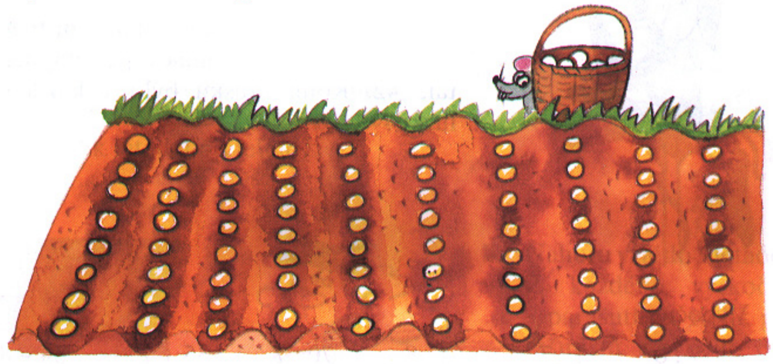
Zase je snazší doplnit příklad na násobení než zformulovat příklad na dělení. (Příklady na dělení jsou uspořádány prstřednictvím příkladů na násobení, jsou z nich odvozeny.)

3.6.96:

Učebnice s. 37: Do kolika brázd je zasázeno 8 (24, 32, 56, 64, 80) brambor? (Brázdy po 8.)	*Obrázek, jak medvědi nasázeli brambory po 8 do řádků.*
Co je "brázda" - ukažte si na obrázku (Denisa asi neví ukazuje spíš na celý obrázek.)	*Učitelka říká, že na obrázku vypadají brázdy vlastně jako sloupečky. To je ale možná divoké vysvětlení, protože vyžaduje volně přecházet mezi troj- a dvourozměrnou strukturací obrázku. Mohou to zvládat?*

Následující obrázek je z učebnice (viz Literatura), s.37.

Na jaře pracujeme na zahrádce. Sázíme květiny a zeleninu.
Lojzík sázel brambory.



- Kolik brambor zasázel Lojzík do jedné brázdy?
  Kolik brambor je zasázeno ve 2 (3, 5, 6, 9) brázdách?
  Kolik brambor Lojzík celkem zasázel?
- Do kolika brázd je zasázeno 8 brambor?
  Do kolika brázd je zasázeno 24 (32, 56, 64, 80) brambor?

0	0
1	8
2	16
3	24
4	32
5	40
6	48
7	56
8	64
9	72
10	80

8: Aleš - 64. Dori: 10. Po prvním příkladě už vědí, že je to na dělení, ale Vráťa se stejně plete: 56 - osum. Má se podívat do tabulky. 64: Denisa taky neví	*U Aleše jako by šlo o inverzní triádu: 8*8 namísto 8:8. Je to ale asi dáno špatným porozuměním textu. Aleš asi nenásobí omylem, intuitivním dosazením, ale záměrně, protože se domnívá, že to zadání vyžaduje (?). U Dori je tohle asi odpověď na otázku "Do kolika brázd jsou nasázeny brambory" - je jich celkem 10. Je fakt, že formulace je gramaticky dost nejednoznačná. Resp. je sama o sobě nesmyslná, smysl jí dává až výpočet, paralelní matematická struktura. Kolik takovýchhle umělotin, které vzaty pouze v kontextu jazyka nedávají příliš smysl, se v matematických úlohách vyskytuje?*
Velký zápis slovní úlohy (už dlouho nedělali).	*Uč. jim to později zdůvodňuje, že to musí cvičit, protože to budou potřebovat ve třetí třídě. Mezi dětmi je z toho jevení, protože jim to nešlo.*
Úloha: Filip má 48 fazolí - zasázet do 8 důlků. Kolik fazolí musí dát do důlků?	
Jak to zapíšeme? Co víme? - Marcel: že budeme dělit.	*Marcel jde dál, než chce učitelka, vnímá už korespondenci struktury příkladu s matematickou strukturou.*
Ale nejdříve, co víme. Všechna čísla budou důležitá.	*Tady se naučí, že všechna čísla v zadání hrají důležitou roli a musí být nějak zapsána. Později se budou téhle představy zbavovat, zjistí, že některá čísla v zadání mohou být irelevantní. Jde to jinak? není to zákonitý proces dialektické negace? Aby reflektovali od počátku, která čísla jsou v zadání důležitá, museli by si vytvořit korespondenci struktur už při čtení, ještě před zápisem. Ale to nejde od počátku - nejdříve se musí naučit klást textu otázky, extrahovat údaje z textu a sesazovat je do struktury a dolaďovat ji v korespondenci s paralelní matematickou strukturou.*
Fazolí ..... 48 (Fanda na tabuli).	*Fanda ví, jak by se to mělo zapsat.*
Opakované dotazy: "co máme psát?" - uč.: co je na tabuli.	

Celý postup bude provázet nepochopení, proč to vlastně dělají, když od počátku vnímají příklad a jeho výsledek. Jenže jejich chyby ukáží, že vnímají číselnou triádu, avšak její korespondenci s textem jen přibližně, globálně, nikoli jako přesnou korespondenci jednotlivých členů a jejich nutnou posloupnost. Jde tu o zpětné rozvíjení simultánní struktury do sukcesivní podoby v korespondenci s textovým zadáním, jež jsme anticipovali jako budoucí problém už u triád sčítání a odčítání.

Důlků ..... 8.	

Jak zapsat otázku? - říkají příklad nebo výsledek: 8, 6	*Nedrží zvlášť strukturu textu, pořád ji mísí s paralelní triádou.*
Uč.: "To ještě nevíme."	*Snaží se právě udržet odlišené dvě paralelní linie.*

Resp. ani text nedrží jako sukcesivní strukturu, která má začátek a konec. Zápisy slovních úloh je vrací ke korespondenci matematických operací s reálnými ději v čase nebo reálnými strukturami jako výsledkem těchto dějů. Zápis nejdříve přiděluje číslům významy reálných počtů - jako kusů a jako skupin.

Teprve Gita: 1 důlek .... "otazník".	
Uč. to převádí na: 1 důlek .... x fazolí	
Jak to vypočítáme: Martin říká zase výsledek, ne příklad. Fanda diktuje příklad.	*Z dalšího průběhu se zdá, že tu Fanda nadiktoval příklad 48:6=. Nebo, pokud nadiktoval správný příklad, tzn. 48:8=6, z něj pak špatně četli výsledek: "8".*
"Co je řešením slovní úlohy?" - Bořek: "Odpověď."	*To zdánlivě nesmyslné lpění školy na explicitním držení struktur a jejich elementů prostřednictvím kodifikovaných pozic se mi tu najednou zdá* ***geniální!*** *Odpověď jako řešení zdůrazňuje odlišné postavení jednoho z členů triadické struktury v jejím sukcesivním rozvinutí.*
Do každého důlku musí dát 8 fazolí.	
Gita upozorňuje na chybu: má být 6 fazolí. - a dohadování, kdo už to věděl taky.	*Někdo nakonec špatně nadiktoval příklad: Fanda? Nebo učitelku spletl Martin? Asi měli po oné zdlouhavé proceduře, v níž dali dohromady zápis (= strukturu textu), si ho ještě znovu zrekapitulovat, aby vystoupila jeho struktura vcelku, jeho sukcesivní kroky v dostatečné blízkosti.* *Vlastně se tu netvoří zpětně pouhá sukcesivní struktura, ale spíše* ***sukcesivní diferenciace simultánní struktury***

Dělají to, o čem opakovaně mluví Vygotskij: abychom mohli reflektovat vztahy mezi dvěma věcmi, musíme je držet právě jako dvě věci a nikoli je směšovat, nerozlišovat, pokládat za totéž. Většina dětí vlastně nedrží paralelní strukturu, objevený (či odhadovaný) vztah okamžitě považují za totožnost, okamžitě provádějí substituci. Nejsou schopny držet kontexty odděleně.

Jak to souvisí s dekontextualizací, s distanciací subjektu od vlastní pozice, vlastního hlediska? Tady přece není nějaké subjektivní hledisko, na němž by dítě stálo a muselo ho nahlédnout jaksi ze strany, učinit ho předmětem, objektiviztovat svoji subjektivitu? Ale jsou tu dva kontexty a požadavek na jejich střídání a kontrolu jejich vztahu jako korespondence. Je reflexe paralelismu, dvojitosti zobrazení (?) a arbitrárnost, vědomá kontrola střídání hledisek předpokladem posunu v chápání relativnosti hledisek? Který posun by mohlo připravovat tohle? Posun k objektivní interpretaci verbálních sdělení druhého? Ke schopnosti interpretovat je jako bych je říkal já, jako bych byl na jeho místě - posun ke "zlatému pravidlu"? A kognitivně ke schopnosti číst a nechat se ovlivňovat textem a ne jen do něj vkládat momentální subjektivní impulsy? Od interpretace textu ve smyslu momentálních nápadů a tedy od ovlivňování textu subjektivitou (od jeho asimilace) k ovlivňování subjektivity textem?

Otázkou by mohlo být, jak zbavit děti při tomhle jakoby zpětném pohybu (od zvládnuté simultánní struktury k její sukcesivní diferenciaci v korespondenci s textem) pocitu zbytečnosti a nesmyslnosti. Možná by se před ně měla postavit složitější textová zadání, jejichž struktury by nezvládaly naráz simultánně, takže by se rozfázování do jednotlivých kroků zápisu jevilo nezbytné. Tyhle složitější struktury by měly vytvořit jen vědomí existence složitě sukcesivně diferencovaných řad (zadání, v nichž si musíme ujasnit, co víme, co z toho můžeme spočítat, co potřebujeme vědět, co z toho nejdříve a co až potom). Pak by snad spíše věděly, co se učí - podobně jako se jednotlivá slova učí rozkládat na hlásky a diferencovat je (např. na tvrdé, měkké a obojetné), přestože by se to mohlo zdát zbytečné, když už umí slovo přečíst vcelku. Tady však smysl této činnosti dodává správné psaní, naučit se správně psát. (Ale možná, že i tady už začínají pro některé z nich pochybnosti o smyslu?)

MÍSTO ZÁVĚRU
(Poznámka k problému pororozumění jazyku v matematických zadáních)

Jazyk a matematika vytvářejí v zadáních paralelní řady, které se vzájemně zdůvodňují, resp. mají smysl jen v tomto paralelismu, vytvářejí smysluplný kontext. (Srv. zesměšňovanou nesmyslnost zadání slovních úloh, vzatých mimo tento paralelismus.) Matematikové však možná předpokládají, že nositelem kontextu je pouze jazyk a že postup je jednosměrný: slovní vyjádření je jasné a jde o to ho matematicky vyjádřit. Jenže ve skutečnosti je tomu jinak: slovní vyjádření pro dítě často jasné není - a to ani v textech narativních (používáme tu provizorně tento termín jako opak textů matematických zadání). Nerozumí-li však dítě narativnímu textu, je situace taková, že neznámé slovo je člen symbolické řady, který korespoduje s něčím v názorné realitě, co je samo o sobě srozumitelné a známé. Jde o situaci, kdy se význam neznámého slova odvodí z kontextu nepříznakové názorné řady nebo (pokud je kontext pro dítě natolik nejednoznačný, že to není možné) se řeší jako problém doplnění slovní zásoby - synonymem, definicí. Tak může kluk tátovi podat "ten hasák", i když do té doby vůbec neví, co slovo "hasák" znamená. Z kontextu je hasák definován dostatečně jednoznačně.

Objeví-li se však neznámé (příznakové) slovo v matematickém zadání, je dítě v jiné situaci. Nepříznakovost textu je zproblematizována a dítě stojí před nutností operovat ve dvou paralelních příznakových řadách, překládat do matematického vyjádření text, který je sám nesrozumitelný. Struktura úlohy se tím velmi komplikuje, protože dítě by tak muselo definovat text prostřednictvím významů matematického jazyka, jehož struktury si teprve osvojuje. Matematici si pak někdy stěžují, že děti umějí aplikovat matematické vědomosti jen v úlohách, které mají standardní podobu. Ale právě kontexty standardních zadání (na jedné straně) a postupů (na straně druhé) vytvářejí korespodenci, v níž je zadání srozumitelné jako to, co se po nás chce (který matematický postup). Bez opory známého matematického postupu je možná kontext úlohy nesrozumitelný, je to cizí jazyk, používající výrazy, které nic neznamenají. Něco totiž znamenají jen ve vztahu k matematice, která klade zřejmě na jazyk takové nároky, které v jiných předmětech nejsou běžné. Matematika tu tak kultivuje a zpřesňuje jazyk, ale protože matematici o tom nevědí, dělá to živelně a nesystematicky.

LITERATURA

Ve třídě, kterou jsme navštěvovali, se jako učebnice matematiky používala:

Coufalová, J., Pěchoučková, Š., Hejl, J., Hervert, J.: Matematika pro druhý ročník základní školy. (Část 1 a 2.) Praha, Fortuna 1994.

Násobení se týká její druhá část.