SČÍTÁNÍ A ODČÍTÁNÍ DVOUCIFERNÝCH ČÍSEL
Miroslav Rendl

OBSAH

DVOUCIFERNÁ ČÍSLA VE DRUHÉ TŘÍDĚ
Čtení, psaní a počítání
Typa příkladů a jejich obtížnost
SČÍTÁNÍ A ODČÍTÁNÍ VE TŘETÍ TŘÍDĚ
Nižší typy příkladů
Počítání do dvaceti
Příklady IV. typu
Sčítání a odčítání pod sebe
Korespondence formule a procedury
Úloha ze 4. třídy
Vyšší typy příkladů
ZÁVĚR

V této kapitole se pracuje především s údaji z opakovaných pobytů ve 3. třídě jedné pražské školy. Byla to tatáž třída, kterou jsme sledovali ve druhém ročníku. Její složení se změnilo jen málo: ze 24 dětí odešly 2 dívky a přišli 3 chlapci a jedna dívka z jiných škol. Ve třetím ročníku tedy bylo ve třídě 26 dětí, z toho 9 dívek a 17 chlapců. Ve statistických analýzách v úvodu této zprávy je třída (resp. škola) označena jako Modrá.

Přestože stať vychází především z materiálu třetí třídy, musí se vracet k předchozím etapám vývoje počítání - v první a zejména ve druhé třídě.[1] Je přitom zatížena problémem nedostatečné analýzy materiálu z druhé třídy. Přesto jsme se rozhodli spokojit se jako s východiskem této zprávy prozatím s těmi předběžnými analýzami, které máme k druhé třídě k dispozici. Prodloužení horizontu analýzy do třetí a v některých případech až do prvního pololetí čtvrté třídy může zpětně zproduktivnit návrat k materiálu druhé třídy prostřednictvím pochopení logiky procesů, které zde probíhají, prostřednictvím vytvořeného konceptuálního rámce, s jehož pomocí se snažíme tento vývoj popsat a vyložit.

Ve druhé třídě jsme zcela náhodně analyzovali nejdůkladněji násobení, přestože se mu děti učily až ve 2. pololetí a chronologicky následovalo až po rozšíření oboru sčítání/odčítání do 100 v pololetí prvním. Zpětně se tato náhodná okolnost, která převrací posloupnost chronologie, jeví skoro logicky. Z toho, co víme z další analýzy, se zdá, že násobilka (tak jak jsme ji ve zmiňované zprávě popsali - tedy včetně dělení) měla pro vstup do světa dvouciferných čísel, pro jeho strukturaci, menší význam než sčítání/odčítání.

---

[1] Rendl, M.: Vývoj počítání v první třídě. In: Pražská skupina školní etnografie: První třída. (Příloha závěrečné zprávy o řešení grantového projektu.GA ČR) Praha 1997, s. 171 - 228.

Rendl, M.: Násobení ve 2. třídě. In: Pražská skupina školní etnografie: 2. třída. (Příloha závěrečné zprávy o řešení grantového projektu.GA ČR) Praha 1997. (Nestránkováno průběžně.)

DVOUCIFERNÁ ČÍSLA VE DRUHÉ TŘÍDĚ

Čtení, psaní a počítání čísel

Podíváme-li se na počátky obeznámenosti dětí s dvoucifernými čísly, pak problém dvouciferných čísel je zpočátku pro dítě problémem čtení/psaní - a přechodu od logografie k ideografii.

Ideografie čtení/psaní dvouciferných čísel má podobu spojování primárních znaků[2] ("jednociferných čísel"-slov) do složených tvarů, podobu skládání, spojování čísel nebo slov dohromady. Není to ideografie čistá - logografický charakter zůstává částečně zachován:

princip funguje dál - co číslo (číslice), to slovo a naopak. Změna spočívá jen v tom, že první číslice nabývá desítkový tvar - to je ona nová dovednost. To znamená, že dítě nemůže říci "dva pět", ale "dvacet pět". V "dvacetpět" je tedy "dvacet" obsaženo - ale původně jako slovo "dvacet". Je to konstrukce jazyková, jejíž korespondence s desítkovou soustavou jako matematickým fenoménem není dítěti zřejmá.

Při učení se čtení/psaní dvouciferných čísel 20 - 100 tedy to, že ve "dvacet pět" je obsaženo "dvacet", nemusí vůbec původně znamenat, že je tam "20". Tím spíše ve "dvacet pět" původně nejsou "2 desítky" - to je až speciální matematická znalost.

Postup čtení/psaní dvouciferných čísel tedy substituuje za každý primární znak jedno slovo, které odpovídá primárnímu znaku minimálně ve svém kořeni. (Je to čtení/psaní zvláštního druhu, které se liší od čtení/psaní hláskového písma.) Právě moment zachování obsahu původního slova v novém (přičemž v něm nese pozměněný význam) můžeme nejspíše označit za ideografický.

Avšak tento "nový význam" (jehož nabývá v kontextu nového spojení) je pro dítě zprvu zakotven pouze jako vztah orálního a grafického označování, nikoli nutně jako vztah k označovaným názorným počtům či dokonce k jejich vnitřní struktuře.

Proč tomu tak je? Děti se v ontogenezi dostávají k větším počtům jinak (patrně opačně) než matematika ve své historii - dostávají se k nim přes znalost čtení a psaní dvouciferných čísel. Historicky tu snad jazyk následuje matematiku, ale ontogeneticky matematika jakožto počítání většinou následuje až po ovládnutí symbolických výrazů pro počty, jako by následovala jazyk.

Některé děti tak mohou umět už v předškolním věku číst/psát dvouciferná čísla, aniž by s nimi počítaly nebo dokonce aniž by je používaly ke spočítání. Je to speciální znalost převodu dvou symbolických řad. Tato znalost obsahuje:

- zvládnout desítkové koncovky pro každé číslo;
- čtení jednotek po desítkách, tzn. čtení čísla zleva doprava, přičemž první číslo se čte s desítkovou koncovkou;
- eo ipso přiřazení desítkového tvaru první číslici;
- speciální případ nuly na místě jednotek, která se nečte.

Výjimečnost čísel 11-20 tu spočívá v nestandardním tvoření názvů čísel - číslovek. To pak zřejmě napomáhá skutečnosti, že přechod do druhé desítky ještě neznamená nutnost zvládnout operování v desítkové soustavě.

[2] Jako "primární znaky" označujeme číslice a číslovky 0 - 9, která však děti ve struktuře dvouciferných čísel nemusí původně chápat jako pouhé dílčí znaky, ale přidělují jim status samostatných čísel, odvozených z dosavadního zacházení s nimi v rámci počítání do 10, s nimiž se provádějí samostatné operace.

V předchozím počítání do 20 (v první třídě) se do problému složenosti čísel (do problému přechodu od logografického čtení čísel k ideografickému) zavádí pouze problematika šiftu.[3] Zdá se, že tento šift sice indikuje přítomnost desítky jako počtu a děti na dotaz rozloží 17 na 10+7. Ale tato struktura patrně zůstává dlouho příznaková - dítě je schopno ji vyčlenit speciálním postupem, avšak nevytváří dvojitý triadický pohyb, resp. nutnost pohybu ve 2 triádách znamenajících operování s různými řády. Počítání se děje s jednotkami, i při přechodu přes desítku je desítka v lepším případě jen zvláštním "jednotkovým" bodem.

Počítání do dvaceti je tedy zvládnutelné pomocí speciálního desítkového šiftu, který znamená připsat či nepřipsat k výsledku (resp. před něj) jedničku, korespondující s příponou „-náct“. Subjektivně tak dítě operuje se speciálním mechanismem, který není nijak spojen s konstrukcí desítkové soustavy, nijak nutně ji nepředpokládá.

Čísla do 20 se patrně učí číst a psát jako aplikaci ideografického principu, která však je postupem omezeným právě jen na čísla 11 - 20. Není přitom generativním gramatickým pravidlem tvoření číslovek a číslic, odpovídajících prodlužující se číselné řadě, nýbrž má kanonickou povahu. Teprve přechod k číslovkám 20 - 100 umožňuje (a nutí) objevit pravidla rozvoje číslovkové řady a s ní korespondující způsob numerického zápisu jakožto pravidla generujícího konstrukci číselné řady.

Děti postupují při zavádění dvouciferných čísel zpočátku velmi rychle. Samo zavedení číselné řady do 100 se nezdá být problematické a proto se velmi rychle poté začíná s dvouciferným čísly počítat. V podstatě tu splývají první lehké příklady s procvičováním "slovo-číslo-tvorby". Platí to jednak o počítání s celými desítkami: při počítání "jako s jednotkami, jen se nesmí zapomenout připsat nulu a výsledek správně přečíst" se vlastně procvičuje přiřazování "názvosloví celých desítek" známým jednotkovým triádám: 20+50=70 je strukturálně stejné jako 2+5=7, jen musíme k jednotkám připsat nuly a číst je jako desítky,

Druhým typem lehkého příkladu je 30+6=36. Na něm se zároveň ukazuje decimální struktura výsledného čísla.[4]

Poté, co se zvládly názvy desítek, vysvětluje se logika jejich spojování s jednotkami jako součet. Tento modelový příklad, "vysvětlující" dvouciferné číslo, dospívá k výsledku zdánlivě složením desítek a jednotek - ale toto skládání se děje pouze v rovině jazyka, tvorby číslovek:

třicet plus **šest** rovná se **třicetšest**,

kdežto matematicky odpovídá tento postup až závěrečné fázi složené procedury sčítání dvouciferných čísel:

32+47=(30+40)+(2+7)=70+9.

Jenže tady ani **sedmdesát**, ani **devět** nebylo jazykově obsaženo v původních sčítancích. (Tato varianta procedury není sice jedinou možnou, ale ani v jiných nelze výsledek složit "jazykově".) Naproti tomu modelový příklad 30+6 je speciálním případem, kdy odpadá podstatná část

---

[3] Jako šift označujeme obecně kroky, které nemají charakter počítání, ale zvláštního jednoduchého pravidla, stojícího mimo běžné početní úkony. Tak čísla 11 - 20 se v chápání dětí nemusí od jednociferných lišit tím, že jsou o deset větší, že se skládají z jedné desítky a daného počtu jednotek, ale tím, že se v nich před normální čísla připisuje "1" nebo přidává přípona "-náct".

[4] Paralelně s tím se občas v učebnici prezentují názorné počty, strukturované jako tři "desítky" a zbývající (přičítané) jednotky. Ale přítomnost názorných počtů zde zdaleka nemá tu roli jako při počátečním počítání v první třídě: z důvodů ontogenetických to není nutné, neboť význam čísla přestal být definován primárně označovaným názorným počtem a je už dostatečně zakotven také v číselné řadě, v systému číselných operací a vztahů. Z důvodů technických to pak není možné, protože systematické prezentování logiky operací s dvouciferným čísly na názorných počtech by při zdlouhavosti spočítání patrně znemožňovalo jakoukoli simultaneizaci těchto postupů. Každopádně pak struktura názorných počtů není primárně decimální - snad vyjma počítadla s jeho prestrukturací. Jejich decimální strukturace je naopak pro dítě odvozená ze struktury dvouciferných čísel.

procedury, totiž sečtení desítek a jednotek zvlášť. Vytváří past, protože se jeví jako analogie jazykových a matematických postupů, která vede k jakémusi "jazykovému sčítání". To je možná usnadněno i tím, že obě struktury jsou převoditelné na dvojznačné "třicet a šest je třicet šest". Vliv této falešné analogie je pak u dětí možno vidět v počáteční tendenci zopakovat ve výsledku jazykové spojení prvních dvou členů příkladu.

Jakmile se ovšem děti setkávají s dalšími typy příkladů, jazykové skládanky selhávají. Jsou nahrazeny skládankami matematickými: pro skládání primárních znaků nejsou užívány postupy jazykové, jazykové analogie, nýbrž postupy matematické - triády primárních znaků - zpočátku ovšem často nerespektující decimální strukturu dvouciferných čísel.

Děti pak utvářejí výsledek počítání nikoli jako výsledek pohybu v číselné řadě (v souladu s logikou sčítání/odčítání jako přechodu mezi dvěma adresami), nýbrž jako by hledaly jednotlivé části tajenky, z nichž se složí výsledek, se kterým se pak až jeho přečtením jako celku vrátí do číselné řady.

Pravidla luštění tajenky jsou pak zprvu různou kombinací dosud poznaných principů: jazykových skládanek, které však v čisté podobě mizí a projevují se později v některých podobách intuitivních doplnění, doplňování triád jednociferných čísel, šiftových pravidel. Mechanika skládání tak v těchto případech překrývá logiku operací. Akcent je na to, co je nové: složenost nových čísel narušuje i logiku známých syntagmat: udělat totéž s něčím novým není totéž.

To vše není pouze důsledek falešné analogie úvodních příkladů. Tyto chyby poukazují také či především na to, že co se původně zdálo snadné, totiž osvojení decimální struktury dvouciferných čísel, vykazuje při zadání, které vyžaduje nepříznakové užití decimální struktury, svoji nehotovost, příznakovost. Teprve mnohonásobné opakování početních operací si postupně vynutí nepříznakové osvojení, kde bude struktura čísel zcela samozřejmě respektována jako implicitní předpoklad, a nikoli identifikována jen při speciálním zadání.

Typy příkladů a jejich obtížnost

Různá míra obtížnosti příkladů s různou strukturou dvouciferných čísel a různou mírou jejich restrukturace je hodinách matematiky evidentní. Na základě analýzy materiálu druhé třídy předpokládáme, že by bylo možno vyčlenit zhruba následující typy příkladů se stoupající mírou obtížnosti:

0. 30+50=80: Typ příkladu, který slouží jako uvedení do dvouciferných čísel. Jde o zjevně "šiftový příklad", kde s nulou se nepočítá, projevuje se jen ve změně názvosloví.

I. 20+3: příklad korespondující s jazykovou skládankou.

Tato výchozí figura - 30+6=36, tzn. “třicet plus šest rovná se třicet šest” - budí zdání, že jazykové skládání (spočívající v pouhém vypuštění spojky “a”) koresponduje s matematickým: číslo(vka) ze zadání nutně figuruje ve výsledku.

Chyby, jichž se děti dopouštějí, mají pak formu: 30-6= 36 (nebo také 26).

II. 23+5: posloupnost jedné triády + opsání desítek.

Nejjednodušším typem chyb je opomenutí kroku ve složené operaci - původně obdobné zapsání šiftu: 42 + 7 = 9.

Nejčastější chybou patrně je, že v příkladu není jasná pozice jednotkového sčítance - je totiž první zleva stejně jako desítková číslice ve dvouciferném sčítanci. Pak mohou nastat tyto kombinace:

32 + 6 = 92

nebo:

32 + 6 = 98

Při “opravách “ těchto chybných výsledků se můžeme nadít dalších reflexních či intuitivních triadických kombinací:

32 + 6 = 32

obdobně

52 + 6 = 12

Nebo také:

32 + 6 = 34 nebo 38

a obdobně

52 + 6 = 14 nebo 18

III. 23+50: posloupnost jedné triády primárních znaků + opsání jednotek.

Příklady tohoto typu nazýváme posunem "desítkového registru". Vyjadřuje to skutečnost, že pro dítě nemusí při tomto kroku jít o "počet desítek", jak by to viděla logika dospělých, ale o změnu rejstříku, znakového předznamenání jednotkových čísel, která se v desítkách cyklicky opakují. Není to naproti tomu pouhý šift jako "mechanický přepínač" bez logické korespondence. Posun desítkového registru koresponduje s logikou počítání do 10.

Chyby mají tvar např.:

23 + 50 = 28 nebo 70

Pořadí obtížnosti příkladů II. a III. typu je v 2. třídě sporné: Na jedné straně je II. typ analogický počítání s jednotkami s pouhým opsáním desítkového registru, v němž se odehrává, na straně druhé děti často nerozlišují jednotkovou pozici jednociferného čísla a skládají ho do triády s počtem desítek.

K nerespektování závaznosti pravidla skládat jen desítky s desítkami a jednotky s jednotkami přispívá to, že nula funguje v triádách primárních znaků jako “nic”, zvláštní “ne-číslo”, s nímž se nepočítá. Příklady s nulou patří mezi šiftové příklady, které se řeší podle zvláštních pravidel a které se nepočítají. Také ve čtení dvouciferných čísel je nula šiftem, znamenajícím desítkovou příponu, ale sama se nečte.

Nula se tedy neúčastní skládání triád primárních znaků. Vychází-li ovšem dítě z předpokladu, že ve výsledku musí být dvouciferné číslo, které je složeno z výsledků dvou triád primárních znaků, pak namísto nuly napsané (tzn. v jednotkové pozici u celých desítek) a tím spíše nenapsané (tzn. v desítkové pozici u jednociferných, jednotkových čísel) má tendenci dosazovat do triády "něco" jiného:

20 + 62 = 84

23 + 5 = 75

IV. 23+8: Desítková restrukturace + šiftová změna desítky (desítkového registru).

Ve druhé třídě byl toto nejvyšší typ příkladů.

Pokud je přechod přes desítku pro dítě strukturou tří triád[5], dostávají se do hry další možnosti. Platí to tehdy, je-li přechod přes desítku dosud rozvinutou posloupností několika kroků, jestliže tedy děti nemají osvojeno počítání do dvaceti v simultánní podobě triád. Avšak i tam, kde se tyto "triády do dvaceti" do značné míry staly simultánními, narušují se použitím v nové struktuře desítek, kde přechod není přechodem přes desítku, ale mezi desítkou nižší a vyšší.

Na druhé straně nás analýza ve 3. třídě přiměla uvažovat o možnosti vývoje počítání, při níž se neustavuje přechod přes desítku v podobě desítkové restrukturace, nýbrž naučením "velkých triád do 20".

Další typy příkladů zde uvádíme pro úplnost přehledu, přestože tyto příklady probírala naše třída až ve 3. ročníku.

V. 23+51: Posloupnost dvou triád primárních znaků.

Tento typ příkladu s dvěma dvouciferným i čísly s nenulovým obsazením jednotkových pozic poskytuje ještě bohatší možnosti kombinací.

Pokud by zde pokračovala logika chyb z druhé třídy, pak nejčastější chyba bude pramenit z párování dvojic primárních znaků, které je často efektivní. Správné 53+24=77 je zaměněno za:

53 + 24 = 95 nebo 59

Záměna nemusí spočívat jen ve zkříženém párování, ale v obrácení pozic výsledku (např. později v důsledku interference s písemným sčítáním), výsledek se zapisuje odzadu. Např.:

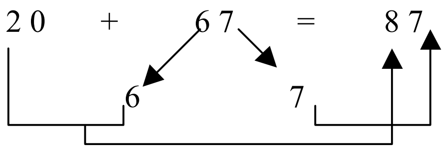
53 + 25 = 87

[5] Ve zprávě "Vývoj počítání v první třídě" podrobně popisujeme, jak přechod přes desítku je nacvičován jako rozklad přičítaného/odčítaného čísla a jak je výsledkem postupných doplnění tří číselných triád namísto původní "velké". (S. 209 n.)

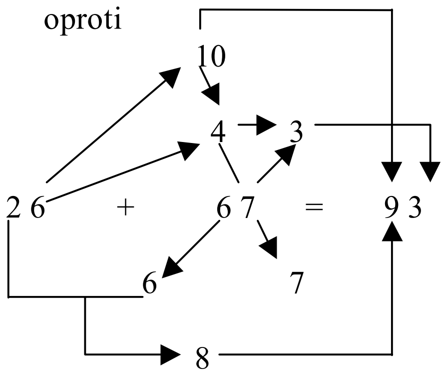
VI. 23+58: Posloupnost triády desítek + triády jednotek "přes desítku" + šiftový posun desítkového registru.

Na základě zkušeností s nižšími typy příkladů bychom mohli anticipovat problémy interference dvou typů rozkladů - užití "vidliček" ve dvou různých kontextech.

Děti se setkávají s vidličkami, které mají ukázat dvouciferné číslo jako sklad desítek a jednotek a oddělit režim počítání s jednotkami od počítání s desítkami. Tyto vidličky ovšem interferují s jinými vidličkami, které sloužily právě k přechodu mezi jednotkami a desítkami. Kdyby byly oboje "vidličky" použity najednou v příkladech VI. typu, vypadal by rozdíl oproti příkladu IV. typu takto:



oproti



Ve skutečnosti k tomu ale ve 3. třídě nedošlo, potenciální problém byl řešen posloupností probírání jednotlivých typů příkladů a tlakem na rychlost řešení příkladů nižšího typu.

Jednou z otázek, kterou můžeme klást následující analýze materiálu ze 3. třídy, je to, zda nějak potvrdí oprávněnost tohoto členění různých typů příkladů a jejich různou obtížnost. Prostá četnost chyb v příkladech není přitom jednoznačným indikátorem - mj. i proto, že s postupem učiva ke složitějším operacím se objevují nové možnosti chyb i v předtím zvládnutých operacích jednodušších - právě kvůli nedostatečné diferenciaci různých postupů.

Tak např. sčítání pod sebe může paradoxně narušit posloupnost sčítání jednotek a desítek - jednou se postupuje zepředu, jednou zezadu. Také jednička, kterou jsme si "půjčili" či ji najednou máme navíc a musíme ji připočítat, může interferovat se směrem šiftové změny desítkového registru.

Tuto rámcovou analýzu sčítání a odčítání s dvouciferným čísly ve druhé třídy můžeme, při vědomí její nedostatečnosti uzavřít některými výchozími předpoklady pro analýzu materiálu třetí třídy. Můžeme shrnout, že počítání s dvouciferným čísly přináší dětem tyto problémy:

- Interferenci jazykových a matematických skládanek; která však patrně brzy ustupuje čistě "matematickým" skládankám triád primárních znaků.
- Změnu použití desítkového šiftu, kdy přechod "nahoru/dolů" neznamená vždy tutéž změnu, tzn. vždy přidání či ubrání "jedničky" či přípony "-náct", znamenající desítku, nýbrž změnu desítkového registru, která musí brát v úvahu nejen "nahoru/dolů", ale také výchozí registr.

• Oddělené počítání s desítkami a jednotkami - právě kromě výše uvedených přechodů přes desítku - tzn. zdvojení linie počítání, vytvoření dvojité triadické struktury - a interferenci mezi desítkami a jednotkami.

V naší analýze, jak se děti učily násobit, jsme ukázali, že násobilka, kterou probíraly ve 2. pololetí druhé třídy, zdaleka neznamená nutnost ustavit číselnou řadu do 100 jako jednotný prostor, v němž se odehrávají různé, ale vzájemně související matematické operace. Přesněji řečeno, k ovládnutí násobilky postačuje řada do 100 jako kontextový paradigmatický soubor existující ve svém jazykovém a korespondujícím číselně znakovém výrazu, v němž členy jsou propojeny spíše jazykovými než matematickými syntagmaty. Z oněch druhých postačuje nejvýše vztah větší/menší - a i ten spíš výjimečně.

Jak se tedy bude vyvíjet zacházení s dvoucifernými čísly ve 3. třídě? Protože se analýza ukázala pro nás složitější, než jsme původně předpokládali, omezujeme ji na sčítání a odčítání dvouciferných čísel.

SČÍTÁNÍ A ODČÍTÁNÍ VE TŘETÍ TŘÍDĚ

Nižší typy příkladů

První dva měsíce ve třetí třídě patřily především procvičování z látky prvních dvou tříd. Učitelka kladla na neustálé procvičování velký důraz a rostl také tlak na rychlost.

V řadě případů zůstávalo při procvičování zachováno členění, které jako by kopírovalo předchozí velké partie učiva: sčítání/odčítání do 20, násobení/dělení (pochopitelně do 100) a sčítání/odčítání do 100.

Rozlišení jednotlivých kontextů, jejich záměnám, diferenciaci a propojování se pokusíme později věnovat zvláštní kapitolu. [6] Zde poznamenejme, že procvičování se dělo vlastně ve dvou podobách. V první z nich se speciálně procvičoval jeden z výše uvedených kontextů vyčleněných předchozí didaktickou posloupností, přičemž se např. násobilka dále členila a v určité pasáži se opakovalo jen násobení/dělení určitým číslem - např. jen násobilka osmi. Hranice mezi kontexty byly respektovány ve většině "rozcviček" na úvod hodiny, v jednotlivých pasážích hodiny i při soutěžích.

Ve druhé formě se tyto tři kontexty propojovaly. K této formě patřily jednak tzv. dlouhé příklady (někdy také "řetězy") a "zvětšování/zmenšování čísel".

Při analýze záznamů zjišťujeme, že **sčítání/odčítání do 20** je jako samostatný kontext procvičováno především v září. V záznamu z 9.10.96 registrujeme konstatování učitelky, že *"na sčítání a odčítání do 20 byly z desetiminutovky samé jedničky, z násobilky byla spousta jedniček, ale také spousta chyb"* (citace záznamu). Poté už samostatné procvičování příkladů do 20 nevidíme, objevuje se ovšem stále jako součást několika složitějších forem:

1. V "dlouhých příkladech" ("řetězech"), které jsou procvičovány v průběhu celého roku. I zde ovšem při analýze zjišťujeme, že počet příkladů do 20 se zejména po přechodu ke složitějším příkladům na sčítání/odčítání dvouciferných čísel (započato 11. prosince) snižuje, tyto příklady se vyskytují spíš ojediněle.
2. V příkladech "zvětši/zmenši číslo" tomu bylo přibližně stejně.

Pro obě tyto formy ovšem platí:

[6] Bohužel se ji nepodařilo včlenit do této zprávy.

- důležité (bez ohledu na didaktický záměr) jsou především kvůli rychlému střídání kontextů - jednotlivých operací, u "zvětšování/zmenšování" navíc korespondujících s růzností jazykového vyjádření;

- stejně jako při procvičování vůbec, a to v průběhu celého školního roku, kladla učitelka větší důraz na násobilku, příklady na násobení a dělení byly procvičovány častěji než na sčítání/odčítání.

3. Reprodukce triád sčítání/odčítání do 20 je také integrální součástí sčítání/odčítání pod sebe. To bylo s dvoucifernými čísly zavedeno kolem 20. října (sčítání - odčítání pak až o měsíc později) a procvičováno, později i s trojcifernými čísly, velmi často až do konce školního roku.

Jaké jsme mohli v těchto prvních dvou měsících vidět fenomény v zacházení s dvoucifernými čísly?

Samotná znaková skladba, morfologie dvouciferných čísel, jejich posloupnost a vztahy v rámci kontextu "větší/menší" byly krátce opakovány na počátku školního roku a problémy byly spíše ojedinělé.

9.10.96:[7]

Číslo větší než je číslo uprostřed (64) - 96, 67, 72, a už žádné.	
Svítí všechny žárovky s čísly menšími než 58?	*Úlohy na větší/menší číslo v oboru do 100.*
Všechny velké čtvercové knoflíky s čísly menšími než 82.	
A čísla větší než 82. Žádné problémy.	*Orientace z hlediska větší/menší je bez problémů. Viz i dále - vše nasvědčuje tomu, že koncept čísel jako* ***řady*** *je zažitý.*
Malá čtvercová tlačítka s čísly většími než 43 a menšími než 48.	
Ke konci hodiny někteří zívají.	*Mám opravdu dojem, že je to pro ně jednak moc lehké, jednak moc dlouho totéž a ještě dost rozvláčné, jak je uč. nejistá.*
Čísla větší než 49 a menší než 51.	*Bezpečně vědí, že je to jen 50 a nic jiného.*
36<☐<42 - uč. má problém přečíst zadání, ale děti tomu rozumějí.	*Zpočátku to dokonce popletla, protože začala něco o číslech menších než 36, pak to četla "třicet je menší než čtvereček, čtvereček je menší než 42" (? - už nevím přesně). Děti řeší úlohu správně.*

26.9.96:

3 čísla menší než 53: mohou to být čísla od 1 do 53 (ta už tam být nesmí). - Nikdo nedodává nulu.	*Zřetelně chápou vymezení intervalu - vlastně nerovnosti jako rozdělení řady přirozených čísel.*
Bořek: 52, 49, 50	
Pepík napsal: 1, 2, 3 (ale na ose ukazuje 0, 1, 2).	*Šel to ukázat na tabuli a mylně považoval první bod na ose za jedničku.*

[7] Citace záznamů uvádíme kurzívou. Pokud mají formu tabulky, pak v levém sloupci jsou poznámky vzniklé namístě, ve třídě. V pravém sloupci je pak rozšíření záznamu vzniklé při následném zpracování poznámek na počítači, které doplňuje či komentuje poznámky v levém sloupci. Jména dětí jsou smyšlená, respektují ovšem návaznost na druhou třídu: pro tytéž děti užíváme tytéž pseudonymy.

Kiška: 52, 51, 50.	
Volí nejdostupnější postup - zdá se na první pohled nejúspornější: ale proč je úsporný? Protože ve vztahu k těmto číslům se snadno drží vztah vůči číslu 53. Kdyby začali vybírat čísla od sebe vzdálená a navíc vzdálená od 53, dalo by jim víc námahy kontrolovat podmínku <53. U Pepíka se i při vzdálenosti od 53 kontroluje dobře, protože je apriorně zvolen opačný konec osy, kde se nedá šlápnout vedle.	

Postup, který děti volí při kontrole podmínky < 53, však naznačuje, že práce s dvoucifernými čísly se stává obtížnější, stává-li se součástí složitější struktury zadání.

Procvičování **nižších typů příkladů na sčítání/odčítání** dvouciferných čísel se dělo po celý školní rok.

- Příkladům 0. typu nebyla věnována speciální pozornost, ale objevovaly se občas jako součást dlouhých příkladů (tady jsme je ve 49 "dlouhých příkladech" zaznamenaných v průběhu roku našli 22 takových dílčích příkladů). Jako součást zvětšování/zmenšování se objevily jen výjimečně - z 38 případů, které korespondovaly se sčítáním/odčítáním, byl jen jeden případ tohoto typu. Nezaznamenali jsme tu snad jedinou chybu. (Něco jiného je ovšem počítání s desítkami po zavedení trojciferných čísel.)
- Také příklady I. typu s objevují především jako součást složitějších struktur. Jako samostatně zadaný příklad jsme jej dokonce v našich záznamech nenašli (při celkovém počtu 95 příkladů součtu dvouciferného a jednociferného sčítance - nepočítaje v to "příklady do 20" - které se v konkrétní číselné podobě v záznamech vyskytly). Byla to však poměrně frekventovaná součást "dlouhých příkladů" - celkem se zde vyskytlo 10 takových příkladů. (V rámci zadání "zvětši/zmenši číslo jsme zaznamenali 3.)

Jenže jejich nejjednodušší základní forma je přitom v naprosté menšině, většinou šlo příklady na odčítání typu 30-6. Nebylo by ovšem vhodnější považovat takové příklady za přechodný typ stojící mezi I. a IV. typem? Dále je patrné, že učitelka skutečně většinou příkladů zadávaných při ústním procvičování, směřuje k příkladům IV. typu. Přinejmenším z hlediska didaktického záměru jde tedy patrně o lehký příklad IV. typu.

Vedle toho se v dlouhých příkladech poměrně často objevoval typ, který můžeme považovat za přechodný mezi typem I. a II. Jde o příklady typu 36-6: je to příklad inverzní k typu I., v němž odečtení jednotek dosahuje právě hranice desítky. Také tyto příklady jsme v záznamech našli pouze jako součást složitějších příkladů - v rámci registrovaných "dlouhých příkladů" jich bylo 9.

- Příklady II. typu opět v záznamech nacházíme pouze v rámci složitějšího zadání, skutečně jsme nezaznamenali ani jeden takový příklad zadaný při procvičování samostatně. Ovšem také v rámci "dlouhých příkladů" jich nacházíme (kromě příkladů přechodného typu zmíněného výše) málo - pouhé 4.

Učitelka dávala častěji přednost typu, který opět můžeme považovat za přechodný a směřující ke IV. typu - totiž příkladům, v nichž sice jednotky nezůstávají v rámci daného desítkového registru, ale dosahují právě hranice registru vyššího: 24+6. Takových bylo v dlouhých příkladech 6, v zadáních zvětšit/zmenšit číslo pak 3. Je to příklad inverzní k výše zmíněnému typu 30-6.

Adekvátnější se tedy skutečně zdá považovat tyto příklady za skupinu "lehkých příkladů IV. typu", v nichž nejde ještě o přechod do sousedního desítkového registru, ale o operování s jeho hranicí.

Odpověď na otázku, co znamenají tyto příklady pro děti samé, souvisí s odpovědí na jinou otázku: Je operování ve dvou sousedních desítkových registrech a tím spíše pak pouze v rámci intervalu mezi sousedními desítkami (zde mezi 20 a 30) subjektivně přechodem mezi desítkami? Později uvidíme, že tomu tak být nemusí. Ale to platí i pro samotné příklady IV. typu: některými dětmi jsou zřejmě chápány jinak, než bychom zprvu čekali. Přesto však patrně vytvářejí svébytný typ.

- Také příklady III. typu nebyly speciálně procvičovány nijak často. V rámci samostatného zadání je nenacházíme vůbec, v rámci dlouhých příkladů pak pětkrát.

- Naprostá většina speciálního procvičování při sčítání/odčítání dvouciferných čísel byla věnována příkladům IV. typu. Tohoto typu bylo všech 95 příkladů zadaných samostatně, které odpovídají sčítání/odčítání dvouciferných čísel a nepatří přitom do příkladů V. a VI. typu. Také v zadáních "zvětšit/zmenšit číslo o několik" jsou tyto příklady v převaze: z 38 takových zadání byl v nich příklad tohoto typu obsažen 26krát.

V "dlouhých příkladech" nemá tento typ takovou převahu, najdeme ho zde 11krát.

Prakticky jen tyto příklady byly také zadávány při desetiminutovkách a soutěžích, tzn. tam, kde děti nepracovaly s písemným zadáním, nýbrž podle ústního zadání měly rovnou zapisovat výsledek. Odpovídá to snaze vytvořit schopnost řešit tyto příklady rychle zpaměti.

(Naproti tomu příklady vyšších typů - V. a VI. - byly v prověrkách zadávány vždy jen písemně, byť se přepokládalo, že se píše přímo výsledek a desítkový rozklad, jak o něm budeme v souvislosti s těmito příklady mluvit, se nezapisuje.)

Výjimku tvoří dlouhé příklady. Zde nacházíme poměrně často opět jakýsi podtyp, vytvářející přechod k příkladům V. a VI. typu. Tvoří ho příklady jako 25+15 (ev. 25+25), 81+19, jeho "odčítací" variantu pak např. 81-11, 49-19, 36-16. Počítání v rámci dvou sousedních desítek vlastně spojuje počítání do 20 - ať už se děje pomocí "velkých triád" nebo rozkladem operátora - s nejjednoduššími příklady s celými desítkami (příklady 0. typu). Nový těžší příklad se konstruuje jako posloupnost dvou lehkých. Objevuje se tu nutnost chápat příklady 0. typu ve spojení s jednotkami, tzn. nikoli jako pouhé připisování nuly k příkladům "do 10". Význam desítek jako samostatných čísel se mění v desítkový registr jako součást dvouciferného čísla.

Počítání do dvaceti

Které jevy jsme mohli u dosud zmíněných příkladů vidět?

Zajímavé jsou některé chyby v počítání do 20, které jako by poukazovaly na jakousi "ztrátu logiky", "hádání".

10.9.96:

Pětiminutovka - sčítání a odčítání do 20 - ale jen ústně: *9+7, 9+9, 7+7, 7+8, 6+6, 9+6, 7+7, 9+5, 9+9, 5+6, 9+7 (Slávek: 14 - "přemýšlej" - Slávek: "jo, patnáct")*	*Správný výsledek snad nakonec Slávek řekl, ale vysloužil si nemile překvapené konstatování, že to bylo dlouho. Slávek pak nezabodoval v průběhu vyučování ještě přinejmenším jednou či dvakrát a uč. nad tím dávala najevo nespokojenost a znepokojení.*

19.9.96:

*Dlouhý příklad: 2*2*4-6:5*10-6 - Frantík: 16, pak opravuje na 14.*	*Řetěz učitelka diktuje, před každým dalším krokem udělá krátkou pauzu. Někdo polohlasem konstatuje, že se ztratil. Uč. dává najevo, že takové lehké příklady už by měli umět.*

26.9.96:

3 kluci postavit dozadu ke stěně - Mikuláš, Bořek, Aleš - bude soutěž (děti: to jsme dělali).	*Zřejmě poprvé v novém školním roce klasická soutěž na počítání příkladů.*
19-9, 13-6 (Aleš: 6), 17-9, 12-3 (Bořek: 7, pak 9)	
Dost dlouhé latence.	

Podobné chyby můžeme občas vidět v rámci počítání pod sebe:

23.10.96:

Vilík: 33 *66* *88*	*To je zajímavý kiks. Prostě selže říkanka, mechanika, přestože logika už je dávno v pořádku? Začíná s přechodem k počítání v symbolických triádách možnost mechanických chyb - resp. chyb v symbolických říkankách a Gestaltech, způsobených všemi možnými interferencemi v symbolickém systému?*

30.10.96:

38 Darina: 8+9=15 - učitelka.: u vás, *39 někde v komíně, na půdě. U nás ve škole ne.*	

Luděk: 46 *47* *7+6=18 .... přemýšlí, pak že to* ***zapomněl*** *(!)* *Učitelka se s ním vrací k rozkladu, ale i tak to drhne: vezmeš 3 a kolik ještě zbývá? Luděk: 4 (?) - vidí "4" u "46"? Pak ho nějak dotlačí ke 13.*	*"Zapomněl" je argument svědčící o pamětném ("říkankovitém") osvojení příkladů. Ale možná, že Luděk také zapomněl na logiku, na korespondenci, byť ji už dříve používal? Ale jak pořád pracuje už s mechanikou, jejíž logika se neprověřuje, přestává se reprodukovat i logika sama? Jako by najednou vypadl z číselné řady? nebo nevypadl a ztratil - po dlouhé době, kdy jen dosazoval příklady jako triády - prostředky pohybu v ní?*

27.11.96:

Slávek: 76 *-38* *Verbalizuje perfektně. "Čtyři a kolik je sedum? A dva" - a hned se vyděsí. - Uč. ho uklidňuje.*	*Tohle není z mé strany ironie. Slávek dokonale recitoval, co dělá, ale spletl při tom dopočet do 7. Vzápětí poté, co z jeho úst vyšla ta hrozná chyba, sebou trhl a věděl, že je to špatně. Uč. ho začala uklidňovat, říkala něco, že o tom mluvili s maminkou, a že Slávek je takový - nevím jestli řekla "bojácný" nebo "že se bojí" - a že to je povaha, že za to nemůže.*

4.12.96:

72 *-36* *Slávek: 4 a kolik je 7? A dva.*	*Je to narušení figur (i takhle elementárních) pod vlivem stresu před tabulí?*

Zdá se, že nezbytný tlak na rychlost znemožňuje spoléhání na sukcesivní procedury počítání, které původně konstituovaly logiku počítání do 20. Platí to o rozkladu při přechodu přes desítku ("desítková restrukturace" jako rozklad číselného operátora, kterou jsme popsali při počítání v první třídě) a tím spíše o možnosti návratu ke korespondencím s názornými počty. Děti jsou nuceny spoléhat na pamětné vybavení. U některých jako by se tím ztrácela při chybě schopnost logiku rekonstruovat i při dostatku času. Jde však o chyby z počátku školního roku, později se chyby objeví jen výjimečně, a to jen u několika dětí.[8]

V několika případech jsme měli možnost pozorovat naopak zřetelný návrat k logice posloupného počítání za použití prstů.

14.11.96:

<table>
<tr><td>34 Aleš podtrhává podle trojúhelníka.
27</td><td>Při příkladech sleduju Aleše. Přestože svůj zájem nijak neskrývám, dokonce jsem se před vyučováním ujistil, že Aleš píše pravou, a řekl mu, že je to kvůli tomu, abych mu dobře viděl do sešitu, Aleš je plně soustředěný a mně nevěnuje pozornost. Spíš se potom v průběhu vyučování, když měl pauzu mezi úkoly, zajímal o mé psaní a snažil se přečíst, co jsem napsal.</td></tr>
<tr><td>Aleš jede na prstech?! (určitě načítal přesah přes desítku) - při třetím příkladu je to jasné, jede v modu pohybu v pevné řadě, ale z pravé ruky na levou!</td><td>Prsty se mu lehce hýbají, dívá se na ně. Týká se to součtu prvních dvou čísel, která jsou součtem přes desítku. Při prvním příkladu to bylo zřetelné, při druhém ne tolik (9+2 zná asi zpaměti nebo to přinejmenším netrvá tak dlouho)..</td></tr>
<tr><td colspan="2">Začíná na pravé ruce, takže pro první příklad to vypadá takhle:
Drží v pravé pero a palec a ukazováček, které ho drží, reprezentují vztyčené prsty druhé pětky. To je vlastně košer, protože takhle vypadá prstová sedmička. Držení pera ale prsty nijak neváže, klidně by mohly být i jako skrčené, stačí malý pohyb a fixace výchozího postavení pohledem či kinesteticky.
Pak načítá po jedné čtyři - lehké pohyby (jakoby vztyčení prstů) jdou pomalu na pravé ruce v pořadí: prostředník - prsteník - malík. (Dívám se na prsty, takže nevidím, nakolik zřetelně vyslovuje paralelní nárůst velikosti operátora. Určitě nešeptal, to bych si všimnul, nanejvýš náznakově artikuluje.) Pak přechází na levou ruku a vztyčuje palec. Správně zapíše jedničku, správně přičte v dalším kroku jedničku. Tady ovšem už nenačítá, to zvládá zpaměti - nejde totiž o přechod přes desítku. Evidentně dělá všechny triády do deseti zpaměti.
V první chvíli jsem se domníval, že to nějak modifikuje obraz prstového počítání, jak jsem ho popsal ve zprávě za 1. třídu. Ale myslím, že je to perfektně konzistentní, vlastně konzistentnější, než jsem si přechod přes desítku v prstovém provedení představoval. Já jsem totiž počítal s tím, že přechod přes desítku se zobrazuje pohybem z levé na pravou, že se původní hranice mezi první a druhou pětkou modifikuje ve hranici mezi pětkou druhou a třetí. Ale Aleš vychází od klasického prstového vyjádření čísla, kdy dva prsty na pravé jsou 7. Když chce zobrazit přechod přes desítku, doplní normálně pravou ruku (a to v anatomickém směru) a přechod přes desítku se zcela logicky zobrazí jako přechod na levou, která v té chvíli funguje jako třetí pětka. Pohyb v ní se opět děje anatomicky, od palce.</td></tr>
</table>

Charakteristické se tu zdají tyto skutečnosti:

- Příklad do 20 je tu "vnořenou" součástí složitější struktury sčítání pod sebe. Tento postup je v tu chvíli poměrně nový: se sčítáním pod sebe sice začali asi před čtyřmi týdny, ale teprve asi dva týdny ho dělají s přechodem přes desítku.
- O chvíli později Aleš při příkladech na násobení prsty nepoužívá:

8 U Slávka můžeme uvažovat o tom, že tlak na rychlost možná vede k obavě použít zdlouhavější cestu logické rekonstrukce, i když by ji zvládl. Při vyvolání působí často nervózním dojmem.

14.11.96:

<table>
<tr><td>36:6=6
3*9=27
5*6=30
2*8=16</td><td>54:9=6
4*7=28
1*6=6
5*5=25</td><td>63:7=9 (s latencí)
4*3=12 (předlouhá latence, bez pohybu)
8*4=32
9*5=45</td><td>Aleš pak sám konstatuje, že na 4*3 se zasek. Po odevzdání si našel výsledek na tužce, na které měl malou násobilku, a s úlevou konstatoval, že to má dobře. Pak říkal, že si ji měl vzít hned, ale nemyslím, že to myslel úplně vážně. Řekl jsem mu pro jistotu "to by byl podvod".</td></tr>
<tr><td colspan="4">Když jsem se pak o přestávce ptal proč, říkal, že se na tomhle příkladu zasekne vždycky. Chtěl jsem něco bližšího, co dělá když se zasekne, jak se to snaží vymyslet, ale nic jsem z něj nedostal.
Je myslím zjevné, že prostě pátrá v paměti - nevím jestli si nakonec řekne násobkovou řadu 3. Ale zjevně nepoužívá sčítání 3+3+3+3, to by při tom něco dělal, počítal. Jakým způsobem jeho mysl bloudí, když hledá správný výsledek, to zůstává nepřístupno i jemu samému.</td></tr>
</table>

Podporuje to naše závěry o tom, že pro násobilku jsou typické naučené triády, jejichž logika je sice vysvětlena v úvodních postupech, ale není permanentně reprodukována v dostatečně rychlé a efektivní technice počítání, která by dokázala generovat doplnění triády, když dojde k chybě nebo není pamětně vybaveno.

Mechanika triád jako suspenze původní logiky konstrukce výsledku vytváří v optimálním případě vlastně situaci, kdy se tato logika stává implicitní pro vztahy čísel ve triádě. Každá fáze vývoje počítání v 1. třídě, jak jsme ji popsali citované zprávě, je vůči další fázi původně onou nepříznakovou procedurou, jejíž nutnost se postupně ztrácí a nepříznakovost se přesouvá na vyšší stupeň. Ten integruje část sukcesivní posloupnosti nižší procedury do simultánní podoby - jeho logika pak mj. spočívá v možnosti libovolně rozvinout tuto simultánnost znovu do sukcesivní formy, zopakovat sukcesivní proceduru, implicitně obsaženou ve vyšším stupni.

To je ovšem postup učení, které provizorně nazýváme **generativním**, kdy nová struktura postupu, jímž se dospívá k výsledku, je zřetelně vyvozena z dosud ovládnutých postupů, takže výsledek je v této proceduře srozumitelně konstruován.

Kromě této formy existuje linie **kanonického učení** - učení příkladů jako správných triadických forem. Tato druhá forma může být postupně rekonstruována a díky generativním konstrukcím jsou pak nalézány souvislosti kanonických forem, takže jednotlivé správné příklady s týmiž třemi čísly jsou postupně nacházenými ekvivalencemi simultaneizovány - případně až ve triádu jako synekdochu všech možných příkladů s týmiž třemi čísly. [9]

[9] Původně jsme se domnívali, že jde o rozlišení analogické rozlišení textového a gramatického mechanismu osvojování u Lotmana, o němž referuje Klusák ve své stati Prvouka v 1. třídě. (viz Pražská skupina školní etnografie: První třída. (Příloha závěrečné zprávy o řešení grantového projektu.GA ČR) Praha 1997, s. 254.) Není však jasné, nakolik je zde generativní učení shodné s Lotmanovým gramatickým mechanismem, který jej podle Klusáka chápe jako „mechanismus metatextů pravidel - zákonů". Důležitá je totiž otázka, jak metaúroveň pravidla - zákona funguje pro subjekt, zda má subjektivní status pochopené logiky nebo je kulturním pravidlem zadaným zvenčí. Pak bychom ji chápali - jakkoli má objektivní, kulturní status generativního gramatického pravidla - jako kanonickou formu přeloženou k naučení, která se teprve postupně může rekonstruovat v logickou zkratku původních mechanických postupů. Ve vývoji jedince přecházejí tyto formy jedna v druhou, nejsou od sebe odděleny, nemají stále tentýž status.

Příklady IV. typu

Vzhledem k tomu, co bylo uvedeno výše o frekvenci procvičování jednotlivých typů příkladů na sčítání/odčítání s dvoucifernými čísly, je pochopitelné, že nejvíce pozorovaných fenoménů se týká příkladů IV. typu.

Pokusíme se ukázat, jak viditelný tlak na rychlost počítání, který byl zřetelně pozorovatelným explicitním didaktickým záměrem, vytváří hlubší pohyb vývoje počítání. Děje se tak při vší zdánlivé povrchnosti tohoto záměru a mechaničnosti jeho postupů, které spočívaly především v mnohonásobném opakování, v permanentním procvičování.

Skrytou rovinou tlaku na rychlost je totiž nutnost osvojení příkladů IV. typu jako simultánních struktur, jejichž simultaneizace umožní začlenění do složitějších postupů rychlého počítání jednak příkladů V. a VI. typu, jednak příkladů s trojcifernými čísly. Přestože v dobře zvládnutých příkladech není logika simultánní struktury pro pozorovatele zjevná, je patrné, že tu došlo k posunu od simultánních triád "do 20" k simultánním triádám ve dvou sousedních desítkách. To ovšem znamená, že původně příznaková decimální struktura dvouciferného čísla, která původně vyžadovala speciální pozornost, je užívána nepříznakově, samozřejmě. Došlo k integraci původní sukcesivní procedury vytváření či rozkladu dvouciferného čísla, která z něj teď činí strukturovaný člen, element početních operací. Přitom ovšem tato integrovaná implicitní struktura modifikuje logiku početní operace.

Ve fenoménech spojených s řešením příkladů IV. typu můžeme při prvním přiblížení jasně vyčlenit dva druhy chyb: chyby spojené s určením desítkového registru a s počtem jednotek. Tyto chyby se jen ojediněle vyskytují obě zároveň, takže se zdá, že jde o dva relativně samostatné kroky řešení. Příznačný projev toho vidíme v následujícím záznamu:

18.12.96

74-8= (Slávek: 74-8= šedesát to.... šest)

Postup Slávka zřetelně vyznačuje dvoukrokovou posloupnost. Jazyková struktura dvouciferných čísel (desítky se říkají jako první, opačné znění typu "pětadvacet" učitelka zamítla) pak činí zřejmě výhodnějším řešení desítkového posunu v prvním kroku. Vidíme tu jasně posloupnost řešení v čase. Nesprávná řešení pak vznikají tehdy, není-li k dispozici dostatek času. Můžeme ovšem pozorovat, jak tyto chyby v průběhu roku ubývají. Avšak zejména při ústním zadání s velkým tlakem na rychlost je vidíme ještě na konci školního roku.

11.6.

Marcel, Darča a Luděk - soutěž:	*Klasika - stavějí se dozadu ke zdi.*
96-8 (82, 83)	*Jen občas jsem stačil ve změti výkřiků zachytit i chybná řešení.*
33+8 (Luděk)	*Výherce jednotlivých kroků nestačím psát - jen výjimečně.*
72-4 (dohady, kdo byl první)	*Dohady v zásadě nastávají tehdy, když vykřiknou všichni naráz. Někdy ale někdo vykřikne jasně první, ale chybný výsledek, a jeho oprava pak splyne s pokusy ostatních. Také když zazní současně různé výsledky, není vždy jasné, kdo co říkal, zvlášť když se rychle začnou opravovat.*
36+6, 55+8, 76-8, 33-6 (24, 26, 27)	
66-8, ?, 25+9 (Luděk: 64)	

64-9 (Luděk vyrazí desítky, jednotky střílí)	*Opakovaně: nejdříve vykřikne sousední desítku (ne vždy ovšem správně), pak se pokouší trefit jednotky, ale jak má málo času, je asi jeden z těchto kroků intuitivní.*
66+5, 25-6, 68-9, 35+7, 97-9, 66-9, 25+9 (Darča: 44)	*Zase jednotky dobře, desítky jak? Skoro to vypadá, jako by šiftovala dvakrát?*
28+3 (Luděk: 51) [5 jako 28+3=51?]	*Každopádně tu Luděk postupuje jinak, než při chybě 25+9. Tady se jednotky nesmíchají se šiftem, ale s desítkovou číslicí do triády, která má být desítková.*
?, 62-9, 26+6 (Marcel: 42, teda 32)	*I tady jako by se do hry dostalo doplnění triády 2-6-(4)?*
Marcel dostává jedničku, druzí dva dvojky (!).	*Dost mě to zarazilo, to jsem ještě neviděl.* *Uč. to komentuje, že chce, aby měli hodně známek.*

Vidíme tu oba typy chyb:

1. Chyby na místě jednotek:

96-8=82, 83

33-6=24, 26

Podobné chyby můžeme vidět v rámci zadání zvětšit/zmenšit číslo: 2.10. Darina (16+7=22), Luděk (53+8=60), Vilík (46+8=58), ale také 4.6. Darina (39+8=48)

2. Chyby v desítkovém registru:

25+9=64

25+9=44

28+3=51

26+6=42

Rozeberme nyní předpokládanou posloupnost po jednotlivých částech v tom pořadí, jak si je děti v průběhu vývoje počítání osvojovaly.

Jednotková triáda

Narážíme tu zřejmě na skutečnost dvojí možné podoby "velkých triád do 20", obsahujících přechod přes desítku. Ty totiž mohly ve vývoji počítání vzniknout dvojím způsobem:

1. Generativně, jako produkt desítkové restrukturace při přechodu přes desítku (analyzovali jsme ho v textu o první třídě), a tedy integrující logiku rozkladu operátora. Sám koncept operátora je přitom integrací vzdálenosti mezi dvěma čísly v číselné řadě a směru přechodu mezi nimi: od menšího k většímu jako "plus" a naopak jako "mínus". Při takto ustavené "velké triádě" se šift stává nepříznakovým synonymem, implicitním ekvivalentem pro posun k vyššímu číslu při sčítání a k nižšímu při odčítání.

2. Kanonicky naučené "velké triády" skládají prostě ze dvou jednociferných čísel jedno dvouciferné. Směr matematické operace (jakožto směr pohybu v číselné řadě) tu není integrován, není její nezbytnou součástí. Zadání dvouciferného čísla s spolu s jedním jednociferným odpovídá jednoznačně druhé jednociferné číslo. Je to situace podobná násobilce – sčítání a odčítání do dvaceti je naučitelné jako soubor skladů a rozkladů čísel 11 – 20, aniž je směr operace nutno brát v úvahu.

Zatímco kanonicky naučená triáda má jen simultánní podobu, může být při generativním postupu simultaneizace nedokončena. Dopustí-li se dítě pod časovým tlakem chyby, má jinou povahu u kanonického a generativního postupu. Kanonická chyba je špatným pamětným vybavením triády, často na základě akustické interference s "podobně znějícími" příklady. Vysvětlení musíme hledat také v okolním kontextu, v příkladech, které se procvičovaly předtím apod. Chyba se neopravuje tím, že by se příklad "počítal znovu", ale pamětně se vybavuje jiná triáda.

Naproti tomu v chybách pramenících z nedokončeného postupu přechodu přes desítku můžeme patrně nalézt výsledky typické pro rozklad do triád při desítkové restrukturaci. Jediná chyba je ovšem málokdy zcela jednoznačná, pravděpodobnost správné interpretace se zvyšuje, lze- li větší počet chyb téhož dítěte nebo více dětí ve stejném okamžiku vyložit stejně.

Připomeňme např. už jednou citovaný záznam:

30.10.96:

Luděk: 46 *47* *7+6=18 .... přemýšlí, pak že to* ***zapomněl*** *(!)* *Uč se s ním vrací k rozkladu, ale i tak to drhne: vezmeš 3 a kolik ještě zbývá? Luděk: 4 (?) - vidí "4" u "46"? Pak ho nějak dotlačí ke 13.*	*"Zapomněl" je argument svědčící o pamětném ("říkankovitém") osvojení příkladů. Ale možná, že Luděk také zapomněl na logiku, na korespondenci, byť ji už dříve používal? Ale jak pořád pracuje už s mechanikou, jejíž logika se neprověřuje, přestává se reprodukovat i logika sama? Jako by najednou vypadl z číselné řady? nebo nevypadl a ztratil - po dlouhé době, kdy jen dosazoval příklady jako triády – prostředky pohybu v ní?*

Luděk tu zjevně neumí příklad vypočítat, když zapomněl kanonicky naučenou triádu. Když ovšem u něj např. v závěru školního roku vidíme jiné chyby, není z nich jednoznačné, zda u něj přetrvává použití kanonických triád.

17.6.97:

Na tabuli 5 sloupků - příklady na sčítání/odčítání typu 25+8.	
Slávek, Evžen, Luděk, Jindra, Lada.	*To jsou vyvolaní, u Lady uč. poznamenává "taky ňákou holku".*
Luděk: 73+8=65 (pak opravuje na 81)	*Soustředěn na desítkovou restrukturaci provádí ji opačným směrem.*
Slávek dobře (jednička), Evžen taky.	
Luděk tam má chybu - hlásí se Gita: *35-7=23*	*Vypadá to na chybu při přechodu přes desítku - od desítky odečten celý operátor namísto zbytku.*

To, že v záznamu uvažujeme u Luďka o desítkové restrukturaci, je interpretace "na první pohled". V obou případech chyb může jít o kanonické triády. Ve druhém případě však chyba skutečně připomíná typickou chybu při desítkové restrukturaci: dosáhne se při ní správně nejbližší hledané desítky, ale namísto odečtení už jen zbytku odečítaného čísla se odečte číslo celé. Dále ovšem uvidíme, že u Luďka je pravděpodobnější, že logika operátora u něj chybí, že používá kanonické triády, které ovšem v proceduře často interferují s posunem desítkového registru. Svědčila by pro to také inverzní záměna u příkladu 73+8.

U některých dětí však můžeme zřetelně vidět posloupnost přechodu přes desítku. Připomeňme Alešovo počítání na prstech v dříve citovaném záznamu. Něco podobného jsme viděli u Vandy:

4.12.96:

Otevřít desetiminutovky.	
25+6, 32+9 (Kiška opakuje), 48+4 (Čenda opakuje), 66-9 (Vanda prsty?, 72-4, 88-9, 28+6, 49+5, 64+9 (jasně prsty po jednom - výsledek 67), 77+8. *Vanda upře pohled do prázdna, na prsty se nedívá, ale lehounce jimi pohybuje.*	*Řekl bych, že načítá jednotkového operátora podobně jako Aleš, tedy ve fixní řadě.* *Ale některé příklady možná nejdříve loví v paměti.*
(Mám dojem, že jsem ten chybný výsledek zapsal k jinému příkladu, že měl být u příkladu 66-9? Při 64+9=67 by musela udělat moc chyb najednou: musela by splést načítání operátora o jednu, a výsledný výraz číst jako 7, zapomenout tedy šiftovat a změnit desítkový registr.)	

Přestože nejsme schopni ze záznamu přesně rekonstruovat její postup a vysvětlit mechanismus její chyby zcela konkrétně, sukcesivní povaha prstového počítání je zjevná. Následující část záznamu pak může mít souvislost s tím, co vidíme v předchozí, byť se týká počítání pod sebe:

Uč.: Vando - ty seš jediná, která ještě nepochopila... víte co dělá? Nepřipočítává.	*To už je při přechodu k dalším příkladům - odčítání pod sebe. Vandu vyvolává k tabuli a při tom se jí dostává preventivního varování. Otázku "víte co dělá?" neadresuje uč. mně, ale dětem (jako by se s nimi chtěla podělit o ten skandál). Děti (některé) odpovídají na otázku dříve než ona - "nepřipočítává" a uč. to stvrzuje: "nepřipočítává". Jde o připočítání jedničky, kterou jsme si půjčili při přechodu přes desítku.*

Souvislost by mohla být tato: Nejsou-li triády do 20 osvojeny jako simultánní a musí se generovat sukcesivním postupem, komplikuje se tím i nová procedura počítání pod sebe, počet nutných kroků přesahuje kapacitu paměti.

Jsme na rozpacích, zda přítomnost sukcesivních postupů v názorné řadě má vedle nesporných nevýhod své pomalosti výhodu jasné logiky pohybu v řadě. Vyvstává tu pochybnost, zda pochopená názorná logika posloupného postupu při počítání o dvaceti je zobecněna na postupy v číselné řadě a zda tak není vázána právě jen na kontext "do 20" .

Shrňme naznačené postupy v počítání jednotkových triád: jde buď o kanonické doplnění triády bez korespondence s pohybem v číselné řadě nebo o doplnění korespondující s generativním postupem, s "konstrukcí" výsledku. To pak může být simultánní, v němž jako by se okamžitost doplnění kanonické triády prolnula s logikou generování výsledku, nebo v různé míře sukcesivní, takže se může vracet až k názorným řadám. Tam už je ovšem sporné, nakolik je logika pohybu v názorné řadě vztažena na řadu číselnou.

Šiftový posun desítkového registru

V počítání do 20 řeší kanonické "velké triády" problém šiftu vlastně tím, že ho obcházejí, nevyčleňují ho jako krok procedury. Čísla 11 - 20 jsou jen složenými označeními - jmény a znaky - pro vyšší počty jednotek. Např. v kanonicky řešeném příkladu 8+5 nemá v přiřazeném výsledku 13 cifra 3 význam "tři za desítkou", jako je tomu v generativním řešení prostřednictvím restrukturace operátora: 8+5=8+2+3. Zatímco tedy v generativním postupu je výsledek členěn na výsledný počet jednotek "přes desítku", ze kterého se speciálním šiftovým krokem (přidat či nepřidat k výslednému počtu jednotek "1" či "-náct") dosáhne výsledek, pro kanonický postup problém šiftu v triádách do 20 neexistuje.

Jak je tomu v počítání s dvouciferným čísly? Co tu znamená použití kanonických "velkých triád"? Tak příklad 57 + 8 má strukturu "50 a 15". První řešení by složilo výsledek 55. Korekcemi chyb se však brzy objevuje nutnost šiftového posunu desítkového registru, je-li součet jednotek přes deset: "50 a 15" = "(5+1) a 5" = 65. Problém šiftu, který do 20 nebyl artikulován, je nutně vyčleněn zde, v počítání s dvouciferným čísly do 100. Má ovšem složitější podobu, než tomu bylo do 20. Zatímco tam šlo o to "přidat či ubrat jedničku", a to znakově, ve významu "připsat či škrtnout, nenapsat", zde jde o přičtení či odečtení k desítkové cifře, tedy o šiftový posun, který je možný oběma směry.

Naproti tomu generativní řešení příkladu má stejnou strukturu jako do 20 - pohyb v číselné řadě je rozložen na dva kroky prostřednictvím přecházené desítky: 57+8=57+3+5. Jedinou změnou je změna významu šiftu. Namísto toho, že při přechodu nad deset se šift přidává a pod deset se ubírá, se zde musí vždy přiřadit jméno vyšší či nižší desítky podle směru přechodu, přechází se tedy vždy do sousední desítky. Původní mechaničnost přiřazení šiftu jako předepsaného kroku procedury se tedy nejpozději zde mění v respektování posunu desítkového registru ve směru operace. Šift dostává význam změny desítkových registrů, v nichž operace dospívá k výslednému bodu. Tím šift nabývá logickou korespondenci s pohybem a mizí jako šift - je integrován do logiky operace; šift se mění v přechod mezi desítkami.

Zatímco pro děti pracující s kanonickými triádami "do 20" se v dvouciferných číslech teprve šift objevuje jako problém, jako speciální krok, pro děti pracující s generativními postupy přechodu přes desítku se šift mění v přechod mezi sousedními desítkami, je integrován do logiky pohybu a jako speciální krok mizí.

Je zřejmé, že jak šiftový posun tak přechod mezi desítkami předpokládají bezpečné osvojení posloupnosti desítek. S jedinými zjevnými problémy, které by mohly být tohoto charakteru, jsme se setkali u Luďka na počátku školního roku (19.9.96).

Interakce mezi jednotkovou triádou a desítkovým posunem

Přechod k dvouciferným číslům vnáší ovšem do kanonických triád nejednoznačnost. Není-li přičítané/odčítané číslo bráno jako operátor, který implicitně určuje, zda východisko příkladu leží v nižší či vyšší desítce, nýbrž je bráno jen jako jeden člen triády, pak např. jednotková triáda 6-8-( ) může mít ve výsledku na místě jednotek stejně dobře doplnění 6-8-(4) jako 6-8-(8).

O významu jednotkové cifry v následující proceduře rozhoduje znaménko. V příkladech “do dvaceti” jsou její významy jednoznačné: 3 ve dvouciferném čísle je “třináct”. Ale v aplikaci desítkových přechodů v soustavě “do 100” je pozice zadaného čísla nejednoznačná a určuje se až ve vztahu ke znaménku. “3” v 63 je před znaménkem plus (pohybem nahoru v číselné řadě) ve vztahu k přechodu přes desítku “3”, ale před následujícím “mínus” (pohybem dolů) je to ve vztahu k přechodu přes desítku “13”.

Ovšem to neznamená, že děti, pro které není směr operace rovnou integrován v konceptu operátora, neumějí o směru posunu desítky rozhodnout a že budou dělat právě tyto chyby.

17.6.97:

Na tabuli 5 sloupků - příklady na sčítání/odčítání typu 25+8.	
Luděk: 73+8=65 (pak opravuje na 81)	*Soustředěn na desítkovou restrukturaci provádí ji opačným směrem.*

Pro postup prostřednictvím skládanek jde tedy v závislosti na znaménku nejen o směr šiftového posunu, ale také o výběr správné triády. U příkladu 63-8 má pak skládanka následující postup:

desítkový znak	znaménko	jednotkový znak
6 nebo (6+1) nebo (6-1)	← "-" ↘	3+8 nebo 13+8 nebo 3-8 nebo 13-8
5		5

V jednotkové triádě je třeba vybrat ze 4 možných variant. Varianta (3-8) je však zřejmě nepříznakově vyloučena předem jako zakázané "větší od menšího", znaménku pak odpovídá jediná. Podobně je patrně vyloučena možnost (13+8), protože nejde o triádu "do 20".

Obecně tedy problémy příkladů IV. typu spočívají v tom, že jeden či oba kroky vyžadují natolik posloupnou proceduru, že v čase, který je k dispozici, nestačí dítě všechny kroky provést a nahrazuje je nediferencovanými instinktivními kroky.

Nedostatek času může pochopitelně být dán vnějším tlakem na rychlost. Avšak doba k řešení má patrně i vnitřní limity. Přesáhne-li délka řešení jednoho kroku určitou hranici, ztrácí se patrně možnost integrovat toto řešení s řešením předchozího kroku v celkový výsledek. Předchozí krok už se "nedrží", dítě se k němu musí znovu vrátit. To je možné v případě, že má příklad zadán písemně nebo mu ho učitelka zopakuje, jinak je však řešení definitivně ztraceno.

Jak by při tomto pohledu mohla vypadat interpretace chyb, s nimiž jsme se setkali?

Ve výše citovaném záznamu ze 17.6. vidíme v soutěži některé chyby v jednotkové triádě, u nichž však neznáme autory:

96-8 = 82, korekce na 83: Chyba v intuitivním doplnění jednotkové triády může mít dvojí původ: buď jde o doplnění triády 6 - ( ) - 8 (typické spíše pro skládanky) nebo o odečtení 8 (jako celého operátora namísto zbytku) od desítky (typické pro generativní postup). Korekci 83 neumíme vyložit, zdá se, že jde spíše o zkusmou korekci původní chyby "o jednu".

33-6 = 24, korekce na 26: Pokud chybu udělal tentýž žák jako onu předchozí, svědčila by pro stejnou chybu typickou pro generativní postup: od desítky je odečten celý operátor namísto jeho zbytku. Korekce na 26 doplňuje správnou desítku téměř jakoby číslovkou ze zadání. Avšak může také být reakcí na předchozí chybu a vybrat ze stejné nesprávné triády (10 - 6 - 4) druhou možnost.

Podívejme se na jiné chyby tohoto druhu.

Chyba Dariny 16+7=22 při zvětšování o 7 (2.10.), kterou sama vzápětí opravuje, se zdá být chybným vybavením kanonické triády. (To ovšem už poněkud preferujeme interpretaci konzistentní s jinými chybami Dariny. K výsledku by mohla dospět i rozkladem, přičemž namísto zbytku operátora 7 by použila zbytek z 6 v 16.)

Luďkova chyba z téhož dne a v rámci stejného zadání vypadá v souvislosti s dalšími jeho potížemi jako ukončení řešení po prvním kroku: nalezení desítkového registru.

Ve stejném zadání tentýž den se dopouští chyby i Vilík: 46+8=58. Původ "8" ve výsledku může být opět dvojí: celý operátor namísto zbytku v generativním doplnění nebo výběr inverzní triády ve skládance: (1)6 - 8 - 8.

Darina 4.6., když má 39 zvětšit o 8, odpovídá 48. Opět by bylo možno uvažovat i o generativním postupu a přičtení celého operátora k desítce. V tom případě by ale téměř na konci školního roku nebyl opakovaně používaný postup dostatečně simultaneizován. Jinou možností je chybné použití speciálního šiftu v jednotkové triádě s devítkou. Podobně vidíme Darinu váhat nad zadáním zmenšit 75 o 6 (19.2.).

Ale není problém Dariny také v něčem jiném - totiž v samotném zadání "zvětšit/zmenšit"? Tento problém, jehož podstata spočívá zřejmě v korespondenci jazykových a matematických syntagmat, tu bohužel nemůžeme probrat. Je však patrné, jak se děti v rámci tohoto zadání dopouštěly častěji chyb v příkladech, které jako samostatné byly zvládány téměř bezchybně.

11.12.96:

Sčítání: nejdřív +6 (49+6: Luděk 51, pak 54 – děti: Martin mu radil)	*Uč. Hubuje, že si nechá napovídat, neřídí se podle svého, nakonec si tak nechá napovědět chybu. (Martin asi napověděl opravu "54".)*

Jde tu u Luďka o přičtení první části operátora v druhé malé triádě? U Luďka ovšem máme o generativním postupu pochybnosti. Konzistentní s jinými jeho chybami se zdá odvození výsledku z jednotkové triády a interference s desítkovým registrem: z výsledku jednotkové triády "patnáct" se ve výsledku objeví na místě jednotek jednička, protože pětka se už realizovala v desítkách jako "padesát ".

Zajímavá je tu i chyba Martina při napovídání. (Domníváme se, že můžeme vyloučit záměrné chybné napovídání.) Bylo by ji možno interpretovat podobně jako u Luďka, tím spíše že podobné u Martina uvidíme u příkladů vyššího typu: výsledek "jednotkové velké triády" – "patnáct" - je realizován jako "padesát" a "čtyři" z původních "čtyřicet devět" se objevuje ve výsledku jako počet jednotek. Ale jiná a méně komplikovaná možnost je interference triády násobení (9 - 6 - 54), které se předtím procvičovalo.

Také některé další chyby Luďka svědčí o interferenci výsledku velké triády s desítkovým registrem. Podívejme se na obě chyby z citovaného záznamu ze 17.6.:

25+9=64: Chyba je pochopitelná snad jen právě jako důsledek snahy o co nejrychlejší vykřiknutí výsledku. Pokud desítková cifra výsledku vznikla šiftovým posunem, pak jde o posun vůči "pět" v jednotkách prvního sčítance. Jinak je vysvětlitelná snad jen jazykovou blízkostí "štrnáct" a "šedesát".

28+3=51: Také zde jako by se posun registru neodehrával prostřednictvím šiftu, nýbrž triády, v níž se intuitivně mísí "dva"(cetosum) a "tři" ve výslednou pětku, takže číslovka "tři" (jako primární znak) je obsazena jak v jednotkové, tak desítkové triádě.

11.12.96:

Přičítání +7: 28+7 - Darina dobře, ale některé děti vyjekly, jako by to bylo špatně (Lada).
36+8: Lada 42, opravuje na 44.

Je tu v Ladině chybě ve hře triáda 6-(2)-8, která by patřila k odčítání - nejspíše k odčítání pod sebe? Pak po šiftovém posunu registru dosazuje za jednotky toto chybné doplnění jednotkové triády? A uvažovala podobně už v předchozím příkladu, kde výsledek Dariny považovala za chybný? (Tzn. vyšlo by jí 39, případně 31?)

V záznamu ze soutěže 17.6. jsme si všimli, že některé chyby v určení desítek vypadají jako dvojitý šiftový posun. Pak by přicházela v úvahu tato interpretace: děti identifikují přechod a posunou se na vyšší desítku. V druhém kroku k ní přidávají doplnění velké triády. Takže 26+6=30+12.

Jak by mohla vypadat chyba Dariny 25+9=44:

25+9 = (2+1) a (5+9) = (3) a (14) = (3+1) a 4.

V takto rozvinutém postupu a při zápisu by ovšem Darina tuto chybu neudělala. Je to důsledek rychlosti, s níž se snaží dospět k výsledku. Znaménko nezůstává trvale vnějším kritériem šiftového posunu desítkového registru ani výběru jednotkové triády, ale je do těchto kroků integrováno.

Když tedy Slávek počítá příklad *"74-8= šedesát to.... šest"*, dokazuje sice jeho pomlka, že postupuje ve dvou krocích, ale ty mohou mít různou podobu:

skládanky:

74-8 = (7-1) a (14-8)

"šedesát to... šest"

nebo přechodu přes desítku:

74-8 = (74-4) - (8-4)

"šedesát to... šest".

Frekvence potíží s příklady IV. typu se v průběhu roku snižovala. Chyby, které se objevovaly ještě v druhém pololetí, se zhruba v polovině případů týkaly příkladů s devítkou. Zdá se, že děti někdy používají v těchto případech jiný postup v jednotkové triádě, využívající toho, že jednotková cifra se změní o jednu. Namísto 12-9 lze počítat 12-10+1, což odpovídá ekvivalenci postupů 12-2-7 = 12-10+1. Přechod přes desítku tu pak vypadá jinak. Jako pomocná triáda, která restrukturuje operátora, se zavádí lehká triáda 9-1-10. Problémem je, že závěrečný posun jednotek o 1 musí jít při správném postupu proti směru původní operace (tedy opačně, než při regulérním přechodu přes desítku) - a tady se dělají chyby. Pro děti s počítáním prostřednictví skládanek by se tak dostával do hry další šift. Zdá se navíc, že při kanonicky naučených triádách pomocný postup restrukturace přičítaného či odčítaného čísla nepotřebují; na druhé straně je ovšem zbavuje nutnosti volby výběru jednotkové triády a nahrazuje velkou triádu lehkým šiftem.

17.6.97:

Chyba Jindry: 72-9=61. - Vzteká se a breč – mumlá něco o znamínkách. - Uč. mu v rohu domlouvá, ale Jindra stojí a kouká do rohu u umyvadla.	*Byla to velká scéna, Jindra se zapích a nešel si sednout. Uč. ho chvíli neúspěšně přemlouvala, ale byla velmi shovívavá, nijak nepřitvrdila a spíš Jindru omlouvala.*

Jindrova chyba by tu mohla pramenit právě z pomocného šiftu. Protože ale u něj dále nacházíme některé náznaky příznaky logiky skládanek, je možné interpretovat chybu i jinak. Na jaké znaménko tu Jindra žehrá? Kromě jeho obrácení při pomocném šiftu mohl totiž také změnit znaménko v jedné ze skládanek: 72-9 = (7-1) a (2+9) = 61. To by pak odpovídalo chybnému výběru jednotkové triády.

Konstatujme závěrem, že v počítání příkladů IV. typu na začátku a na konci roku byl patrný rozdíl v rychlosti.

23.10.96:

45-7, 28-9 (Slávek stejně jako Vilík – pohled chvíli ztuhne, pak píše výsledek.)	*Tzn.: šeptem víc či míň zřetelně si řekne příklad, jako by to byl povel k rozběhnutí nějaké vnitřní aktivity, pak strnutí, ponoření se do sebe, kde znehybnění pohledu jako by mělo zabránit rušivým vlivům zvenku, a po chvilce napsání výsledku.*
64-8, 72+9 (i Fanda má bariéru proti Slávkovi)	*Tedy aby Slávek neměl možnost opisovat. Přitom to je snad nejtěsnější kamarádská vazba ve třídě.*
54+7 (taky Fanda má strnutí)	*Stejný projev jakoby "lovení v paměti".*
Uč. se ptá Slávka, "co tam pořád počítá" (má dojem, že počítá na prstech?)	*Jinak není jasné, proti jakému počítání by to mělo směřovat.*

Po předchozí analýze se jeví vnitřní obsah "strnutí", které můžeme u dětí pozorovat, zvenku nejednoznačný. Svědčí však o posloupné struktuře procedury řešení. Ta postupně v průběhu roku mizí, takže se příklady IV. typu jeví jako počítané "zpaměti". Simultaneizace postupu zjevně uvolňuje kapacitu paměti. Nečekaně se to projeví na počínání Bořka a Evžena ve stejné situaci:

5.2.97:

Uč. diktuje: *25+8 (nečeká na ně; nejsou připraveni. Bořek počítá zpětně.)*	*Uč. se tváří nemilosrdně - řekla jim přece před přestávkou, že si mají připravit sešity na desetiminutovky. Museli tedy ve velkém chvatu stíhat otevřít (někteří i najít) sešity a pera a rychle počítat první příklad.* *Bořek napsal "3", pak registroval druhý příklad, napsal jeho výsledek, pak se vrátil a dopsal druhou "3" na "33" - zjevně prokázal schopnost držet příklad nebo přinejmenším výsledek v hlavě současně s dalším.*

19.2.97:

25+8 (Evžen až zpětně: 35)	
34+7 (Evžen hledá pero)	
29+5	*Sáhl jsem do tašky a dal mu svoje rezervní.* *Myslím, že prošvihl první tři příklady. K prvnímu, jehož znění asi při hledání držel, se pak vrátil, ale s chybou. Chyba mohla ovšem vzniknout posunem znění příkladu při interferenci se zněním příkladů následujících.*
66-9 (Evžen: 54, když uč. už diktuje další příklad.)	

Evžen tu při návratu k prvnímu příkladu dělá chybu, která by odpovídala oné posloupnosti dvou kroků (posun desítky + jednotková triáda), v níž ale na druhý krok, který možná sám není plně simultánní strukturou, nezbývá dost času, a proto tu buď interferují nesprávná doplnění nebo je začátek procedury a tím i její celek ztracen a Evžen doplňuje už jen naslepo. Další Evženova chyba v téže desetiminutovce (před ní ovšem předcházely další čtyři příklady, a po ní ještě tři, které zde neuvádíme a které měl dobře) by svědčila spíše pro generativní, avšak nedostatečně simultaneizovaný postup přechodu přes desítku.

Sčítání a odčítání pod sebe

Sčítání a odčítání pod sebe děti v naší třídě předtím ve druhém ročníku neprobíraly - až na několik výjimek dětí, které přišly z jiných škol. (Šlo o 4 děti z 26.) Ve třetí třídě pak tento způsob počítání začal být probírán kolem 20. října. Po zaokrouhlování dvouciferných čísel na desítky, které představovalo z hlediska pozornosti, která mu byla věnována, spíše jen epizodu a které budeme analyzovat jinde, to byla první nová látka v matematice. Představovala pak dominantní součást většiny hodin až do prosince, poté se její frekvence snížila, ale byla opakovaně procvičována až do konce školního roku, v jeho závěru pak zejména v souvislosti se zavedením trojciferných čísel.

Učitelka zpočátku opakovaně vyjadřovala podiv nad tím, že počítání pod sebe ve druhé třídě neprobírali, podobně se podivovala i nad tím, že neprobírali ani příklady V. a VI. typu na sčítání/odčítání vedle sebe. Nepřímo lze tedy soudit, že didaktická posloupnost učiva, daná zřejmě výběrem učebnic, nebyla postupem zcela běžným. Lze tedy vyslovit domněnku, kterou jsme ovšem neověřovali, že mohlo jít o záměr autorů učebnic. Zdá se, že autoři (titíž jako u učebnice používané ve 2. třídě) mohli předpokládat, že počítání pod sebe vede k diferenciaci decimální struktury dvouciferného čísla, která pak usnadňuje další zacházení s dvou- a víceciferными čísly. Tuto domněnku o autorském záměru by snad bylo možné ověřit analýzou metodických materiálů, kterou jsme neprovedli. Ať však šlo skutečně o záměr autorů nebo jim ho takovým předpokladem jen podsouváme, můžeme tuto hypotézu učinit jedním z východisek analýzy našeho materiálu. V obecnější rovině tedy klademe otázku, k jakým posunům v zacházení s čísly dochází při osvojování si počítání pod sebe.

V analýze jsme dospěli k závěru, že počítání pod sebe nijak nutně nevyvazuje zacházení s dvouciferními čísly z kontextu znakových skládanek, možná naopak toto chápání dvouciferných čísel posiluje. Činí tak dokonce i pro přechod přes desítku, který traktuje jako přidání (ev. půjčení a vrácení) "jedničky": tak členění "13", kde "trojku napíšeme a jedničku si pamatujeme" a pak ji přidáme k dalšímu číslu-znaku, na které v závazném postupu narážíme, vůbec nemusí znamenat členění na jednu desítku a tři jednotky, jak se to jeví dospělému, ale právě jen na trojku a jedničku, ze kterých je třináctka složena.

Počítání pod sebe tak sice vymezilo hranici, přes níž se triády primárních znaků (cifer) nesmějí tvořit, je to však hranice mezi izolovanými jednotlivými ciframi, nikoli členění integrované ve struktuře dvouciferného čísla.

Zdá se dokonce, že počítání pod sebe naopak znejasnilo povahu pohybu v číselné řadě tím, že znejasnilo povahu odlišnosti mezi sčítáním a odčítáním, kterou převádí na odlišnost receptuálních formulí.

Nápadná je **receptuálnost** počítání pod sebe, jeho nespojenost se sčítáním/odčítáním, jak ho děti dosud znaly. Odtrženost tohoto nového kontextu od dosud ustavené logiky zacházení s čísly byla - snad spíše výjimečně - u některých dětí patrně dokonce doprovázena zážitkem zmatku, dezorientace.

23.10.96:

Nové učivo - opakování:	*Tedy opakování nově probraného učiva z minula - sčítání pod sebe.*
Kiška: 36 *23* *Má se připravit Slávek, který to posledně nemohl pochopit.*	*Příklady jsou na tabuli a uč. vyvolává jednotlivé děti.* *Uč. mi pak ještě jednou po skončení hodiny líčí, jak se Slávek celý třásl z toho, jak to nechápe.*
Ještě nepřekračují přes desítku. Uč. mluví o tom, že to až příští týden.	
23 *56* *Slávek bez potíží 2 součty. Dává mu to smysl?*	*Z pozdějšího je zřejmé, že dává.*

<table>
<tr>
<td>31
<u>65</u>
Eda neví, jestli začít odshora nebo odzdola, přestože uč. o tom právě vedla dlouhou řeč. - Děti se nadšeně řehtají, když se nakonec rozhodne "odshora".</td>
<td>Uč. předtím dlouze vysvětlovala, jak mají sčítat odzdola, ale svým typickým způsobem to zamotala, že by to vyšlo stejně, ale že shora mají sčítat pro kontrolu, že by to vyšlo stejně, ale shora to není správně.
Děti ale už chápou co chce - ne tak Eda. Ten byl asi tak zmaten, že při vyvolání se rovnou zeptal, odkud to má počítat. Uč. se tvářila, jak nevěří vlastním uším, nechala ho otázku zopakovat a ještě mě do toho zatáhla, a ptala se "slyšíte to, pane doktore" - a já jsem to na potvoru neslyšel, takže to musel Eda ještě jednou opakovat a děti se mu smály. Uč. ho sice skandalizovala, ale správné řešení mu neřekla a nechala ho odpovědět na otázku, jak že říkala, že to mají počítat a Eda se rozhodl špatně. To už vyvolalo bouři smíchu. Bylo mi ho ukrutně líto a divil jsem se, že se nerozbrečel.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Zajímavé je sčítání pod sebe. Zdá se mi, že je to přesně postup, kdy se děti zpočátku řídí mechanickým předpisem. Uč. možná předpokládá, že tomu nelze nerozumět, projevovala shovívavý údiv nad tím, jak se Slávek celý třásl z toho, jak tomu nerozumí. Ptal jsem se pak Slávka, čemu nerozuměl. Moc mi toho neuměl říct, ale bylo zjevné., že vůbec nechápe smysl, proč se to sčítá takhle. Řekl bych, že se tímhle postupem ocitl zcela mimo logiku počítání jako pohybu na číselné ose. Dalo by se o tom spekulovat i tak, že nový recept na počítání, který ho zcela vyrval z logiky, jež mu umožňovala chápat, o čem svět čísel je, ho zároveň vystavil náporu něčeho, pro co chybí vysvětlení, koncept, čehož důsledkem je úzkost.
Když jsem se s Slávkem bavil, bylo jasné, že už tomu rozumí - když jsem se k němu obracel, zrovna vysvětloval Fandovi, jak se počítá pod sebe, když je součet dvojice čísel přes desítku - tu desítku si ukážeš takle (na prstech) a pak se přidá k součtu další dvojice. Ptal jsem se Slávka, jestli tedy už ví, že je to stejné, jako kdyby to počítal v řádku. Věděl to, ale příklad tuším 38+41 vedle sebe vypočítat neuměl. Ale 38+40 ano, takže pak už jsme jen přidali jedničku.
Ptal jsem se taky, zda mu to mamina vysvětlila - víceméně pro jistotu, protože se mi to zdálo jasné. Pravil, že mu to vysvětloval táta.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Zkoušel jsem se taky bavit s Edou o jeho problémech, ale neřekl mi vlastně nic, co by nebylo jasné už z reakcí učitelky. Vysvětloval jsem mu jen, proč čísla musí být pod sebou, jak by se to při sčítání více čísel pletlo. To snad řekl "aha", ale jinak se moc do vysvětlování potíží nepouštěl. Nejspíš je popsat neumí, ale je fakt, že jsem v rozhovoru moc nápaditý nebyl. Taky začínala velká přestávka a Eda vypadal, že má v tuhle chvíli větší zájem o svačinu.</td>
</tr>
</table>

V záznamu z hodiny i z rozhovoru se Slávkem je patrné, jak sčítání pod sebe traktuje jako receptuální. Přestože děti později pracují v některých zadáních s explicitní ekvivalencí postupů počítání pod sebe (které je také nazýváno písemným) a vedle sebe (které ne zcela přesně označovaly jako "zpaměti"), jde o ekvivalenci globální, nediferencovanou, na úrovni celku výpočtu. Příklad zapsaný v učebnici "vedle sebe" je přepsán do podoby "pod sebe" a pak zpracován podle předpisu pro písemné odčítání. V něm je konstrukce řešení rozložena do řady dílčích kroků, které jsou nalezením částí výsledku - tajenky: "vyšlo nám tolik a tolik" zněla závěrečná formule počítání pod sebe, která byla přečtením výsledné skládanky. Jednotlivé dílčí kroky nemají pro děti žádnou logickou korespondenci s počítáním jako pohybem v číselné řadě, vyjma dílčích podobností, které zmíníme dále, které však podstatně neovlivní chápání celku procedury. Počítání pod sebe vytváří speciální kontext, který pro děti nejspíše nemá dokonce ani vlastní logiku, která by zpětně umožňovala chápat celek procedury jakožto logickou strukturu. Je to patrně důsledek toho, že paralelní popis procedury, např. metajazyk popisující, co se v proceduře provádí, a převádějící počítání pod sebe a vedle sebe na společný kontext by byl pro děti příliš složitý. Tuto nesnáz by patrně bylo možno obejít systematickou paralelní prezentací postupných kroků výpočtu téhož příkladu pod sebe a vedle sebe a ukazováním jejich korespondence. To se však reálně nedělo. Bylo by to navíc znesnadněno tím, že děti v té době ještě nezvládly příklady V. a VI. typu: U Slávka vidíme, že - i při chápání globální korespondence a po zvládnutí výpočtu pod sebe - umí vedle sebe 38+40 (III. typ), nikoli však 38+41 (V. typ).

Z citace záznamu je dále patrné, že počítání pod sebe začíná sčítáním čísel, kde jednotlivé součty ve sloupcích nepřesahují desítku. Je to zjevně nejlehčí typ příkladu: postup v každém sloupci je uzavřen zápisem čísla doplňujícího snadnou triádu, nejsou tu žádné kroky, jejichž výsledek by se nezapsal a musel se držet v paměti. Důraz učitelky byl na pečlivý zápis do sloupců, postup ve sloupcích odzadu a zdola nahoru. Jeho dodržování zajišťuje, že nedojde k chybám ani při pozdějším písemném odčítání.

30.10.96

Příklady pod sebe na tabuli. - 4 děti k tabuli.	
Mikuláš opravuje 25 34 59 (původně prý tam měl šestku).	*Tedy asi místo pětky na místě desítek. Z dalšího průběhu je patrné, že už se posledně učili "s přechodem přes desítku", takže Mikuláš asi "napsal 9 a jedničku připočítal".*
Žalují na Edu, že to ale spočítal odshora. (Měl to dobře.) - Ale teď děti upozorňují, že počítá taky od desítek.	*Měl jsem od učitelky za malicherné, když lpěla na tom, že budou sčítat odspodu. Jenže teď se ukazuje, že dát Edovi volno v tom, odkud kam bude sčítat, znamená, že bude plést také směr zleva a zprava. Tady to mohl mít dobře, protože to bylo bez přechodu přes desítku, ale jinak je to katastrofální chyba.*

Učitelka tedy lpěním na pravidlech postupu zajistila jednotný "směr" postupu při jakémkoli příkladu pod sebe. Zároveň ji to ovšem nutí nechávat stranou logiku jednotlivých kroků, která by umožňovala variovat i jiné postupy - ovšem jiné u sčítání a jiné u odčítání.

Ještě před zavedením písemného odčítání se probíraly příklady na sčítání, v nichž součet sloupce přesahoval desítku. U Mikuláše v záznamu vidíme, jak "připočítat jedničku" je čistě receptuální krok daný kanonicky, který činí proceduru počítání složitější tím, že ji prodlužuje. Navíc je krokem, který nepracuje jen s napsanými ciframi a také jeho výsledek se přímo nezapisuje. Kromě opomenutí připočítat tak najdeme i chyby, v nichž je do výsledku zapsán výsledek tohoto mezikroku. (Eda 29.1., Vanda 4.12.)

Tuto složitost učitelka kompenzovala velkým důrazem na závaznost "držet" šiftovou jedničku a mezivýpočet s ní udělat okamžitě v dalším kroku.

30.10.96:

Martin k tabuli: 28 *32* *Uč. mu znovu opravuje každý detail postupů: dva a osum (uč.: ne, dvě plus osum) rovná se deset. - Uč.: Ukaž si ten paleček, řekni: jednu připočítáme. - Pak už ho to nechala spočítat. Jedničku k příkladu nepoznamenávali.*	*Martin nemá říkat "dva", ale "dvě". "A" namísto "plus" mu neopravovala tak, že by to musel říci znovu správně, ale zopakovala to po něm ve změněné podobě "plus".*
Znovu zdůrazňuje (Vráťovi: 49 *27): jedničku připočítáme, držíme ji na palečku.*	
Milena 17 *23: nulu napíšeme, jedničku připočítáme. - Uč. ji chválí, jak verbalizuje.*	*Vůbec jí do toho nezasahuje, Milena to říká přesně tak, jak to má být.*
Radek: 54 *38* *Teď uč. opravuje psaní trojky a pětky - dotahovat oblouček dole.* *Uč.: Ale já jí nevidím, drž si ten paleček.*	*Uč. nevidí tu jedničku, o které tuším Radek říká "jedničku připočítáme". Uč. na ně apeluje, ať se nestydí si tu jedničku (později i jiná čísla) podržet - ani později, to už ji třeba nebudou ukazovat na zvednuté ruce, ale třeba takhle (připaží ruku se vztyčeným palcem ke stehnu), ale ať si to tak pořád dělají. Považuje to zřejmě za zcela legitimní i pro dospělé?*

4.12.96:

Uč.: Vando - ty seš jediná, která ještě nepochopila... víte co dělá? Nepřipočítává.	*To už je při přechodu k dalším příkladům - odčítání pod sebe. Vandu vyvolává k tabuli a při tom se jí dostává preventivního varování. Otázku "víte co dělá" nesměruje uč. ke mně, ale k dětem (jako by se s nimi chtěla podělit o ten skandál). Děti (některé) odpovídají na otázku dříve než ona - "nepřipočítává" a uč. to stvrzuje: "nepřipočítává". Jde o připočítání jedničky, kterou jsme si půjčili při přechodu přes desítku.*

Později tutéž hodinu:

53 *-36 6 a kolik je 13? (Uč.: Hezky.) ... Jedna. (Uč.: A co jedna?) ... Jedna plus tři je 4 (chtěla psát - uč.: čtyři a co? - Vanda dopočítala).*	*Kdyby ji učitelka nezarazila, napsala by Vanda 1+3=4 (připočítání jedničky k desítkám menšitele) jako počet desítek do výsledku.*

11.12.96:

Radek: 64 Jednu si necháme - uč. *29 ho nutí vztyčit palec.*	*Tahá ho za něj, aby si tu jednu ukázal.*

63 *24 Kája: 4+3 ... zarazí se - uč.: no ano - je sedum* *Jednu jsem si pučili... - uč.: kde jsme si pučili?*	*V úvodu si nejsem jist, zda "je sedum" dořekla po učitelčině povzbuzení Kája sama, ale řekl bych, že ano. Dál Kája pokračuje v mechanickém postupu "pučili jsme si jednu, musíme ji vrátit", ačkoli jednak nejde o odčítání (kde jedině si může půjčovat), jednak ani při součtu nepřekročila desítku. Možná je to ale vedeno snahou co nejvíc mluvit, aby měla paní uč. radost. Bez "půjčování" je celá formule postupu dost chudá.*
79 *21 Aleš chce připočítat 1 až nakonec - uč. ho vrací, radši hned.* *Jako zvláštnost: napsat celou desítku.*	*Aleš chce počítat "1+9=10, jedna - 7+2= 9 a jedna je ...". Uč. zarazí tenhle postup tentokrát nikoli jako špatný, ale jako horší.*
65 *-46 Míťa: 1 a 4 je pět a šest mínus pět rovná se - uč. se jeví: tys to spletl (klepe s ním)*	*Uč. podle mě myslí horší chybu, než Míťa reálně udělal (vlastně jen spletl formuli předpisu, nikoli logiku) - možná myslí, že znovu odčítá první dvojici čísel, a to obráceně? Těžko říct. Ale třese s ním, aby se probudil, jako by plácl nějaký naprostý nesmysl.*
72 *19 Lada: devět a kolik je dva? Devět a dva je jedenáct....* *Jedna a sedum je osum.... - uč.: ne - držet jedničku a hned připočítat. (Cloumá s ní a Lada má na krajíčku.)*	*Je to jen přeřeknutí nebo Lada nechápe logiku rozdílných formulí při sčítání a odčítání?* *Chyba dál není jednoznačná. Možná chtěla připočítat drženou jedničku nakonec, ale možná, že jmenovaná jednička byla ona - v tom případě sčítala shora, což je ovšem taky prohřešek.*

Kromě "připočítávání" šiftové jedničky můžeme v záznamu z 11.12. (viz u Míti, Lady, částečně i Káji) identifikovat problematiku **zacházení s předepsanými formulemi** sčítání a odčítání pod sebe, jejich logické korespondence a případných souvislostí. Vynořuje se po zavedení písemného odčítání.

20.11.96:

Některé děti se zběsile hlásí na odčítání pod sebe. Učili se to prý ve 2. třídě - děti z jiných škol.	*Na tabuli jsou příklady na odčítání pod sebe, které se uč. chystá začít vysvětlovat. Některé děti by chtěly předvést, jak už umějí to, co se ještě neučili. Ale hlásí se i některé děti z minulé 2.A, asi to jim to vysvětlili doma.*
Uč. jim vysvětluje příklad 57 *-32*	
Rozkládá na 5 desítek: ⑩⑩⑩⑩⑩ *a 7 jednotek: ❶❶❶❶❶❶❶.*	*Kroužky s čísly pochopitelně nebyly inverzně.*
Kája rozkládá 32 na 3 desítky a 2 jednotky.	
Ubrat 2 jednotky - škrtneme to, totéž u desítek.	*Tedy odčítání 32: škrtneme 2 jednotky a 3 desítky.*

Kolik to vyjde? - 25 (Děti to vidí.)	*Vidí, jak po tomhle rozložení a ubírání zvlášť v jednotkách a zvlášť v desítkách mohou ze zbylých jednotek a desítek složit výsledek. Nepotřebují k tomu pohyb na číselné ose do 100, strukturované po desítkách. Desítková soustava je tu právě jen pozičním konstruováním složených čísel jako kombinací číslic 0-9.*
A teď technika: 2 a kolik je 7? - Ne 2 a 7 je kolik? - to by bylo sčítání.	*Záměna pořadí slov vede k inverzní triádě, k vnější inverzi.*
Pepík: 3 a kolik je 7? - Uč.: Ne, pozor - a kolik je...(ukazuje na 5).	*Pořád v původním příkladu 57* *-32. Pepík se tázáním přesunul k desítkám, ale chce je dočítat do předchozího počtu jednotek.*
Sborově recitují kroky příkladu: Dva a kolik je sedum? A pět. Tři a kolik je pět? A dva (mají říkat dvě).	

Příklad pro Vilíka: 35 *-20* *Znaménko "-" psát kousek pod polovinu řádky.*	
Opravuje Vilíka, aby neříkal "dva". Vilík opravuje: "Dvě a kolik je jedna? A tři."	*Hezky je vidět, jak při zaměření pozornosti na něco dalšího se naučený postup naruší a že tady už je to právě správná posloupnost v triádě, která se naruší. (I když 2-3-1 funguje jako triáda už hodně brzo.)*

66 *-42* *Denisa: 2 a 6 je kolik? - uč.: Kolik musíme dopočítat do šesti? - Denisa na rozpacích. - (Uč. nepouští Vilíka na záchod.)* *Podruhé formule dobře, ale neví. - uč.: Že by tohle ti dělalo potíže? Máš 4 koruny a kolik ti chybí do 6? - Denisa: 2.*	*Když Denisa neví, kolik dopočítat do šesti, někdo z dětí (myslím z holek vzadu) navrhoval, ať si to spočítá na prstech (seriózně, bez ironie). Uč. na to nereagovala. Nevím, jak ji dotlačila k prvnímu doplnění. U desítek pak Denisa řekla správně formuli, ale zase nevěděla. V čem má problém? V porozumění formuli - neidentifikuje ji jako zadání doplňování? Nebo v příkladech na doplňování? Možná, že problém je v posloupnosti čísel, že to, že se tu tímto postupem obyčejný příklad "6-4 je kolik" stává příkladem na doplnění "4 a kolik je 6", je vzato jen jako mechanické pravidlo, jehož smysl se nechápe? Potřebují tu vlastně pochopit ekvivalenci obyčejných příkladů a příkladů na doplňování..*

Pepíkova chyba je svou povahou v našich záznamech ojedinělá a prakticky se neopakuje. Písemné počítání svým uspořádáním brzy eliminuje utváření triád přes hranice sloupců. Takové chyby jsou pak typicky důsledkem nepečlivého grafického zápisu, nikoli chybného postupu jako tady u Pepíka. V naší třídě však k nim často nedocházelo ani "z nepečlivosti"; učitelka kromě speciální pozornosti zápisům při počítání pod sebe kladla vůbec velmi silný důraz na "krásné psaní" - byl to jeden z velmi charakteristických rysů jejího stylu.

Korespondence formule a procedury

Co nás tu však zajímá především (kromě zjevných znaků receptuálnosti, kanoničnosti zaváděných postupů), jsou problémy s užitím závazných formulí pro odčítání. Chyby Vilíka i Denisy jsou nejednoznačné, částečně také kvůli fragmentárnosti záznamu.

U Vilíka nevíme, jakou číslici napsal - nebo by býval napsal, protože je pravděpodobné, že ho učitelka nenechala zápis při chybné formuli dokončit - do výsledku. I kdyby však napsal do zápisu "1", není jasné, co to znamená: chápe logiku a jen popletl formuli nebo jen doplňuje triádu, kterou obsadil do chybné formule, nebo je mu předem jasný výsledek, protože (lehký) příklad spočítal nejdříve zpaměti?

Také u Denisy nevíme, v čem chyba spočívá. K úvahám přímo v záznamu můžeme dodat další: Je pro ni pro doplnění triády klíčové pořadí číslic a znaménko, takže formule jí nedává smysl? Vzato zdola jí to dává příklad 2-6=( )? A totéž pak v druhém případě: 4-6=( )?

V jiných případech nestandardního použití formulí či k nim závazně přiřazeného postupu však je situace zřetelnější. Můžeme tak rozlišit několik situací.

1. Nesprávná či nepřesná korespondence mezi formulí a procedurou. **Formulí** nazýváme jazykové vyjádření toho, co se děje s čísly; formule je to, co učitelka vyžaduje, když na dětech chce, aby při počítání mluvili, říkali, co dělají. **Procedurou** pak nazýváme samotné zacházení s čísly, posloupnost jednotlivých kroků.

Nepřesná korespondence má dvě formy:

a) Formule je sice nesprávná, neodpovídající zadání, ale dítě přesto počítá správně. Kromě citovaných níže by sem mohla patřit i Vilíkova chyba z předchozí citace (20.11.96).

4.12.96

62 *<u>-32</u> "dva a dva je nula"*	*Uč. ho hned zarazí a přiměje k opravě formule. Eda (?) má dobře triádu, ale blbě posloupnost. Vlastně tady musí ve formulích respektovat triádu v posloupnosti podle zadání.*

(V citovaném případě si nejsme jisti, zda šlo opravdu o Edu.)

11.12.96:

72 *<u>19</u> Lada: devět a kolik je dva? Devět a dva je jedenáct....* *Jedna a sedum je osum.... - uč.: ne - držet jedničku a hned připočítat. (Cloumá s ní a Lada má na krajíčku.)*	*Je to jen přeřeknutí nebo Lada nechápe logiku rozdílných formulí při sčítání a odčítání?* *Chyba dál není jednoznačná. Možná chtěla připočítat drženou jedničku nakonec, ale možná, že jmenovaná jednička byla ona - v tom případě sčítala shora, což je ovšem taky prohřešek.*

Pod tento bod spadá první část Ladina postupu.

b) Sama formule je sice správná, ale procedura jí neodpovídá - a neodpovídá tudíž ani zadání.

4.12.96:

38 *-19* *Darina: 9 a kolik je osum? A jedna. (Užaslé vzdechy.)*	*Třída se děsí spolu s uč., co to Darina říká.*

29.1.97:

Darina na tabuli: 72 *-28* *K: dvě a kolik je osum? - uč.: já s tebou zatřepu, vzpamatuj se v té matematice...*

Není jasné, jak by pokračovala procedura, ale chyba se zdá podobná té, kterou udělala Darina v předchozím záznamu.

2. Formule a procedura si odpovídají, ale obě neodpovídají zadání - dochází k záměně sčítání a odčítání.

4.12.96:

Cv. 12/26: Napište správně pod sebe a vypočtěte. - Uč.: Neplést sčítání a odčítání. Pozor, rychle změnit postup. - Na známky.	*Tentokrát samostatně do sešitu. Přepsat příklady z učebnice, které jsou zapsány vedle sebe, do formy "pod sebe" a vypočítat. Ještě se upozorňuje, že pod sebe se píše jen znaménko mínus, plus se nepíše.*
Uč. Nině: musíš jednu připočítat. Ty odčítáš - místo sčítání. (K tomu se hlásí i další.)	*I další se ozývají, že popletli sčítání s odčítáním.*

3. Formule odpovídá proceduře, která správně řeší zadání příkladu, ale neodpovídá závaznému znění požadovanému učitelkou:

a) je neúplná, nerozvinutá, jakoby zkratkovitá:

4.12.96:

Čenda: 77 *-29* *...musíme vrátit. 1 a 2 je tři. tři a čtyři je sedum.*	*Tady to myslím zůstalo neopraveno. Je to formulace, která spojuje otázku a odpověď, sestaví rovnou jediným krokem doplněný příklad, v němž se případně hlasem zdůrazní doplněný (hledaný) člen, který se píše do výsledku.*

Tutéž hodinu později:

90 *-36* *Asi 8 dětí se zběsile hlásí, Radek konečně vyvolán. Nutí ho říct frázi o půjčení(?). Radek pak říká "čtyři a* ***pět*** *je devět" (nebo dokonce "****pět*** *a čtyři je devět"?)*	*Radek se mi začíná jevit jinak než zpočátku. V rozhovoru se mnou, když měl možnost pronést několik souvislých vět, jsem byl překvapen přesnými formulacemi - výběrem slov i syntaxí. I tady vypadá "nesprávná" formule jako důsledek arbitrárnosti, která plyne z pochopení logiky.*

b) Střídá se znění formulí, jakoby se jednou počítalo shora, jindy zdola, jako by byly variovány postupy počítání.

20.11.96:

52 *<u>-32</u>* *Míťa: Dva... ne, dvě mínus dvě... - uč.: počkej počkej.*	*Míťa začal odčítat s formulí jako vedle sebe. Proč to nejde? Normálně by mu to vyšlo. Jenže pořadí čísel by muselo být opačné než u postupu, který se učí a který tak může mít shodný směr (ale jinou formuli) jako u sčítání. Míťův postup by tak narušil pravidlo postupu dříve, než se ustavila jeho logika?*

27.11.96:

66 *<u>-36</u> Míťa: šest mínus šest rovná se nula (neopraven), pak už "tři a kolik je šest?"*	*Míťa zřejmě nerespektuje formuli, když ji nepotřebuje, když nejde o přechod přes desítku(?). Klonil bych se k domněnce, že je mu logika jasná a tak formuli (a tedy postup) klidně variuje. Znamenalo by to simultaneitu (simultánní ekvivalenci) příkladu na doplňování a na odčítání:* *a+( )=c <=> c-a=( ).*

Pokusíme se ukázat, o čem podle našeho názoru tyto fenomény vypovídají. Problémy korespondence vznikají zavedením formule pro odčítání. Sčítání samo o sobě nečiní problémy, protože jeho formule je totožná se zněním standardního ("obyčejného") příkladu. U odčítání je tomu jinak. Počáteční potíže některých dětí nás tu vedou k úvaze, jak je to s paralelismem a příznakovostí linií při zavádění procedury a jí odpovídající formule.

Procedura - sama o sobě nová a příznaková - může být zavedena buďto jako nová kombinace známých postupů (procedur) nebo pomocí paralelního popisu v odlišném označovacím systému - typicky v metaúrovni jazyka. Avšak metaúroveň jazykového popisu musí mít jasný vztah k nepříznakové úrovni, k nepříznakovému popisu oněch známých kroků, z nichž je nová procedura kombinována, musí být kombinací nepříznakových formulí. V našem případě by už musela existovat a být osvojena řeč, jazykové formy, které jasně diferencují jednotlivé formy příkladů na sčítání a odčítání. Náznaky této řeči jsme identifikovali v prvním ročníku (bohužel však v jiné třídě než v této) v diskursu o různých typech příkladů, které jsme popsali jako "obyčejné příklady", příklady na "doplňování" a příklady typu "myslím si číslo". Že však se tyto formy nejen dále neelaborovaly, ale ani neudržovaly (resp. reprodukuje se forma "obyčejných příkladů"), je patrné ze záznamu z naší třetí třídy:

17.6.97:

S.50: zvláštní stroj: Co se s číslem stalo - vhozeno 430, vypadlo 730.	
Uč.: o kolik se zvětšilo - Jindra: o 300, protože 430+300=730.	*Jindra tu na otázku „proč“ ukazuje, že doplňuje do triády na sčítání, že úkol řeší doplněním příkladu s tou operací, kterou stroj dělá, nikoli prostřednictvím operace inverzní (to by odpověď zněla „protože 730-430=300“).*

I v dalších příkladech je zadání začleněno do kontextu "zvětšování/zmenšování", příklad je formalizován pouze otázkou, explicitně není ani označen jako "příklad na doplňování", ani zapsán ve formě 430+( )=730. Jindra prezentuje příklad až s řešením jako zdůvodnění.

Jestliže tedy neexistuje, není vypracována a osvojena nepříznaková úroveň popisu (jakožto základní úroveň jazyka), k níž by se nově zavedená formule jako příznaková odkazovala a jestliže neexistuje nepříznaková řada či procedura v paralelním sémiotickém systému, je nová formule významově prázdná. To je zřejmě případ, který didaktika spíše intuitivně označuje jako past verbalismu.[10]

Nová formule se sice dodatečně naplňuje významem, protože se prostřednictvím přiřazování kroků procedury vytváří přece jen paralelismus dvou linií, z nichž žádná však není zakotvena v nepříznakovém kontextu. Tak se vytváří uzavřený, izolovaný kontext, těžko propojitelný s kontexty jinými, bez možnosti vytvářet další korespondence a tedy i neteoretizovatelný.

Zdá se tedy, že děti se dostávají ke zvládnutí korespondence formule a procedury, a tím i počítání pod sebe, dvěma odlišnými způsoby. Jde vlastně o dva odlišné způsoby přechodu počáteční příznakovosti této korespondence k pozdější nepříznakovosti.[11]

1. Některé děti v proceduře odčítání pod sebe rychle nacházejí nepříznakovou logiku jedné z forem pohybu v triádě. Původně příznaková formule tu rychle nabývá význam, takže posléze mohou tuto logiku suspendovat (integrovat) v reprodukci mechanizované říkanky jakožto původně jen vnější opory logické správnosti procedury.

Formule je tu jen pomocným nástrojem, odvozeným z nepříznakové logiky pohybu v číselné řadě, který především vybavuje a udržuje v chodu mechaniku procedury, ale nevytváří její logiku. Formule je příznakem kontextu (a paralelní oporou strukturace sukcesivní procedury), nikoli jeho generativním zdrojem.

---

[10] Je tu patrné, že vztah „příznakového“ a „nepříznakového“ používáme ve dvou odlišných případech: jednak jako vztah dvou úrovní osvojení procedury, resp. vztah jednodušší, osvojené procedury k proceduře nově osvojované, vyvozené, jednak jako vztah dvou paralelních realizací téže procedury ve dvou různých sémiotických systémech.

Jsou tu možná dvě řešení, jak s touto odlišností zacházet:

buď tyto situace rozlišit jako dvě zásadně odlišné - a to i terminologicky - a jejich dosavadní směšování považovat za nedůslednost,

nebo za touto odlišností vidět přece jen zásadní shodnost.

Druhé řešení nás přivádí k možnému závěru, že paralelismus může vzniknout jednak popisem v paralelním, odlišném označovacím či zobrazovacím systému jako paralelní popis procedury, jednak v témže zobrazovacím systému vytvořením nové, většinou složitější kombinace dřívějších, již osvojených postupů.

Ve druhém případě možná ovšem chybí paralelní zobrazovací systém jen zdánlivě: namísto popisu třeba v jazyce se tu užívá ukazování, a to v různé míře strukturovaného. Zcela nestrukturované je to, které jen znovu ukazuje složitější proceduru a spoléhá, že její vnitřní strukturace na jednodušší známé kroky bude rozpoznána a tím bude pochopena i jejich souvislost a logika. Avšak ani tady se ve skutečnosti nikdy nepostupuje bez strukturace na známé kroky: opakování dílčích chyb (a tím spíše pak s nimi spojené kladení otázek - které ovšem už přechází v paralelní "povídáním o", není pouhým ukazováním) ukazuje na jednotlivé kroky; podobně na ně ukazuje rytmizace, hlasová intonace atp. Těmito prostředky je artikulována struktura a realizován paralelní "popis" (= logika, význam?) složitější procedury.

Tento kvazipopis prostřednictvím ukazování je však patrně vázán na kontext, neuchovává se mimo něj a vybavuje se jen spolu s ním. Vybavuje se jakožto "znovupoznání", ale není sám prostředkem vybavení, rekonstrukce kontextu - nebo jen zřídka, obsahuje-li nějaké speciální figury, které se váží jen k danému kontextu. Je patrně dostatečný tam, kde nová procedura je reprodukována natolik často, že je součástí každodenní reality. Platí to většinou dokonce i tehdy, je-li ukazování převedeno do grafických schémat - trvalost jejich porozumění závisí na trvalosti sdílení kontextu.

[11] Představa o přechodu korespondence procedury (jakožto posloupnosti kroků nějaké činnostní operace, struktury činnostního aktu) a formule (jako jejího paralelního popisu v jazyce jakožto jiném sémiotickém systému) od příznakovosti k nepříznakovosti má tento obsah: Původní speciální akt vědomého přiřazení přesunem příznakovosti mizí a formule a procedura se stávají vzájemně zastupitelné. To umožňuje kombinovat ovládnutou formu s dalšími formami jak v operačním systému tak v jazyce. Jako experimentální výraz přesunu k nepříznakovosti můžeme např. označit Vygotského experiment s vývojem vztahu tří řad podnětů.)

Počátečním bodem pro určení správné procedury je pochopitelně znaménko. V tomto případě se vztah znaménka a procedury stává brzy nezprostředkovaným formulí. Znaménko "mínus" tu znamená vztah dvou zadaných čísel jako menšího a většího, pohyb je zjištěním vzdálenosti mezi nimi, otázka formule je jazykovou paralelou téhož. Tento pohyb je dokonce ve shodě s pohybem ve sloupci čísel: zdola nahoru. V případě existence konceptu operátora je taková paralela velmi snadná, odčítání je snadno pochopitelné jako dočítání.

Procedura se vztahuje ke znaménku přímo, je srozumitelná jako odčítání, neděje se tak jen kanonickým přiřazením a prostřednictvím formule. Koncept operátora jako pohybu mezi dvěma adresami v číselné řadě dává proceduře význam, zprostředkovává podobnost s příkladem vedle sebe. Pokud pak není znaménko opomenuto (v tom případě má chyba zcela jinou povahu, spočívá v nerespektování počátečního klíče - všechny další kroky pak mohou odpovídat subjektivně percipovanému zadání), je procedura evokována nepříznakově.

K důsledkům toho pak mj. patří to nejen to, že mizí nesoulad formule a procedury, ale nedochází také k záměnám sčítání a odčítání.

2. Jinak je tomu v případě, kdy představa zacházení s čísly jako pohybu na číselné ose chybí. Pak zřejmě chybí možnost vztáhnout strukturu zápisu pod sebe k běžné podobě příkladu vedle sebe. Samozřejmě - příklad vedle sebe není pro děti obtížné zapsat pod sebe. Ale pak přijde formule odčítání, která má řídit postup v tomto zápisu, resp. postup s ní má korespondovat, a shodnost struktury obou zápisů, nezprostředkovaná vyšším, obecnějším kontextem pohybu v číselné řadě, se zcela ztratí:

8 - 2 = 6	kdežto	8	8 ←--------------------------------
osum mínus dva rovná se šest		- 2	2 → a kolik je (namísto "mínus")↑
		6	a šest (namísto "rovná se šest")

Formule "osum mínus šest rovná se" je u počítání pod sebe přímo zakázána. Bez zprostředkování konceptem dvou adres a operátora je to zcela neznámé zacházení se dvěma čísly, a to jak v rovině procedury, tak v rovině jazykové formule.

Před těmito dětmi stojí tedy dosud neznámá syntagmatická forma, jazykově ani operačně nezakotvená, která vytváří zcela nový kontext nejen ve svém celku, nýbrž i v jednotlivých krocích. Tak se - prostřednictvím postupných korekcí, ale asi i částečných analogií (typu, že např. horní číslo ve sloupci musí být větší, protože celé horní číslo je přece větší, jinak bychom odčítali zakázaně - větší od menšího) postupně vytváří onen uzavřený kontext počítání pod sebe jakožto korespondence formule a procedury, které jsou určeny jen vzájemným vztahem, aniž by se vytvořily korespondence počítání ve sloupcích s běžnými příklady. Samozřejmě, kontexty jsou podobné v tom, že se - tak jako jinde v matematice - doplňují triády čísel. Avšak nové syntagma vytváří zvláštní matematickou operaci písemného "počítání pod sebe", existující jakoby vedle sčítání a odčítání vedle sebe (zpaměti).

Tyto děti jsou pak patrně mnohem více závislé na neustálém procvičování počítání pod sebe jako speciálního kontextu, nepříznakovost sčítání a odčítání sama o sobě jim nepostačuje.

Takto chápaný verbalismus, kdy se z verbální cesty zavedení nové formy, nového syntagmatu, stává jeho konečný vývojový produkt, ovšem podle našeho názoru není nijak nutným důsledkem kanonické formy učení.

Také uzavřenost kontextu počítání pod sebe se samozřejmě může změnit, když výlučnost vzájemné zprostředkovanosti formule a procedury zmizí třeba tím, že se takto oklikou např. právě prostřednictvím počítání pod sebe ustaví logika dočítání jako konkrétní formy pohybu v triádě nebo se dokonce logika dočítání diferencuje ve vztahu k ostatním formám pohybu mezi členy triády jako ekvivalentní i odlišná zároveň.

Tato hypotetická možnost dodatečné rekonstrukce kanonicky naučeného se však také nemusí realizovat. Možná, že právě u počítání pod sebe je to typické, aniž by to bylo pociťováno jako problém: zřejmě i u dospělých běžně může fungovat uzavřené samo v sobě, jakoby bez vztahu k logice matematických operací. Globální korespondence s počítáním vedle sebe pak postačuje k případným korekcím "příliš velkých" chyb.

K dodatečné rekonstrukci, ustavení logiky jako nové posloupnosti, nové souvislosti, nové podoby známých kroků (tedy k pochopení formulí řízeného dočítání jako "doplňování" příkladu na sčítání a případně jeho ekvivalence s "obyčejným" příkladem na odčítání) není tedy dítě nuceno, jejich totožnost zůstává v novém neznámém kontextu nerozpoznána.[12]

Úloha ze 4. třídy

Jistou možnost prověření toho nám poskytlo zajímavé zadání v rámci písemné práce ve 4. třídě (4.11.97). Dětem byla zadána takováto úloha:

Doplň správné číslice:

62 5
\- 87
2 57

Úloha se ukázala pro děti jako velmi těžká, z 20 dětí ji správně vyřešily jen 4. Bohužel některé z dětí, u kterých jsme ve třetí třídě často registrovali problémy při počítání pod sebe, písemnou práci nepsaly - buď už odešly ze třídy (na jinou školu) nebo ten den chyběly. Příznačný se nám však zdá výsledek u Dariny. Pokusila se vyplnit jedinou číslici - ve výsledku napsala "5", ale sama ji škrtla, nic jiného nevyplnila. Podobně tomu bylo u Edy a Evžena. Eda vyplnil pouze "0" v menšenci. Vypadá to jako pokus o libovolné doplnění, o němž ale zjistil, že nefunguje, a na úlohu rezignoval. Také Evžen (který ovšem z předcházejících dvou měsíců 7 či 8 týdnů chyběl a psal písemku jen "mimo soutěž") jen „tápavě" doplnil dva střední sloupečky způsobem, u něhož nejsme s to identifikovat nějakou logiku ("1" ve druhém a "8" ve třetím sloupku zprava).

---

[12] Navíc v těchto případech možná didaktika opravdu příliš verbalizuje, resp. neví si rady s ukazováním souvislostí s dřívějším učivem tak, jak existují pro děti. Ukazuje je tak, jak existují pro dospělé nebo dokonce pro dospělé matematiky. Napadlo by např. někoho ve 3. třídě při počítání pod sebe znovu důkladně probrat přechod přes desítku a desítkovou restrukturaci a ukázat ji v těchto nových souvislostech? Pro řadu dětí je to přitom zbytečné (protože samozřejmé) a ti ostatní se proti nim jeví jen jako zapomnětlivci a popletové.

Navíc časem učivo kanonicky zvládnou a zvenku vypadá vše v pořádku - dokud se nepřejde k tzv. aplikaci, tedy k zadání s nutností nepříznakového užití ve složitějším kontextu. Potom se říká: "on to umí, ale neumí to použít". Tak kanonické zvládnutí zakrývá strukturální zdroje problémů. Možná, že pak stále složitější látka činí obtížnější případnou rekonstrukci dříve vzniklých "děr" (vlastně nepropojení, mezer mezi jednotlivými kontexty) - individuálními prostředky dítěte a to se tak stává závislejším na pomoci učitele. Ten se však o nich nedozvídá ani z didaktiky a už vůbec ne od dítěte samého. Je-li totiž existence nepříznakových souvislostí obtížně uvědomitelná, pak jejich chybění se nemůže stát vůbec předmětem vědomí dítěte jinak než prostřednictvím druhého.)

U Denisy najdeme jiný postup (doplněné číslice tučnou kurzívou):

  6 2 ***3*** 5
<u>- ***8*** 8 7 ***12***</u>
  2 ***6*** 5 7

Všechny číslice jsou doplněny jako doplnění příkladů na odčítání ve směru závazném pro počítání pod sebe: (12)-5=7, 8-(3)=5: zde se "3" jeví jako správné řešení, ale ve skutečnosti tu není za "13", jak by tomu bylo při logicky správném doplnění procedury odpovídajícím formuli "osum a kolik je třináct?" (zde ovšem známe ono "kolik" a neznáme "13"). Denisa "připočítala jedničku" také jen zdánlivě správně - ve skutečnosti je to jednička z jejího předchozího doplnění "12" do menšitele. Další postup je 8-2=(6), (8)-6=2.

U všech ostatních dětí jsme našli přinejmenším správné doplnění prvního sloupku (zprava). Některé z nich však měnily princip doplnění, takže chybu spočívající v inverzním doplnění některého z dalších sloupků jsme našli ještě u Kišky, Jindry a patrně Luďka (zde po přepisování číslice není úplně jistá).

Ve všech ostatních případech (9) děti správně doplnily jednotlivé sloupky, ale přitom nebraly v úvahu (vůbec či aspoň jednou) ony jedničky, se kterými bylo třeba počítat z předchozích sloupků, případně s nimi provedly inverzní operaci.

Co je příčinou této převažující chyby? Docházíme k závěru, že "přidání jedničky" nenabývá v rámci počítání pod sebe logickou korespondenci, resp. nabývá ji nejobtížněji. Korespondence s "půjčením a vrácením" je dosti arbitrární a dalo by dost práce např. vysvětlit, proč ji vracíme k menšiteli, když předtím jsme si ji sice půjčili pro menšence, ale z menšitele tím nic neubylo. Arbitrárnost používané jazykové formule a její čistě formální význam jakožto vnější opory posloupnosti procedury (jako kanonické mnemotechniky) jsou patrné např. z následujícího.

29.1.97:

Slávek: 37 <u>*29*</u> *Devět a sedum je šestnáct - jednu jsme si vypůjčili, musíme ji vrátit. Tři plus tři je šest.*	*Ještě předtím se uč. ptá, jak poznáme, že máme sčítat, a připomíná se, že u příkladu na sčítání pod sebe se nepíše znaménko.*

Ve skutečnosti jsme si od menšitele nic nepůjčili, nýbrž zvětšujeme oba členy příkladu o hodnotu šiftu pro vytvoření modelové situace počítání do 20 jako obecného typu přechodu přes desítku. Tak recept postupu objektivně převádí přechod mezi jakýmikoli dvěma desítkami na "přechod přes desítku při počítání do 20", ale tato logika, která se pro řadu dětí v rámci příkladů IV. typu stává postupně zjevnou, je zde překryta procedurou s čísly fragmentovanými do jednotlivých sloupečků. Když děti v příkladu

 84
<u>-28</u> pronášejí formuli a pak připočítávají jedničku, nepřecházejí v tu chvíli ani od 84 k 76 (tedy přes 80) ani od 64 k 56 (přes 60).

Zvládnutí připočítávání jedničky se tak jeví spíše jako důsledek akcentu učitelky na vyčlenění tohoto kroku nejen v rovině jazyka, ale i v podobě paralelního "držení palečku", a dále na okamžité připočítání ještě před výpočtem v následujícím sloupci, aby se držené neztratilo. Připočítat jedničku je patrně bráno jako závazný procedurální krok, když je ve sloupci použit desítkový šift, když se ozve šiftová přípona "-náct". Když se - jako výše zmíněné úlohy ze 4. třídy - tato posloupnost převrací (doplňované číslo je třeba poté, co je dočtením zjištěno, naopak o "půjčenou" jedničku zmenšit), působí to problémy.

Tak se zdá, že posun, který způsobuje počítání pod sebe ve vývoji počítání s dvoucifernými čísly, lze charakterizovat jako korespondenci kroků procedury v rámci jednotlivých sloupků s různými formami příkladů na "sčítání a odčítání do dvaceti", v optimálním případě dospívající k ekvivalenci typu a-c=( ) <=> a+( )=c. Nezdá se tedy, že by šlo o posun, který je nezbytným předpokladem pro řešení příkladů V. a VI. typu. Z tohoto hlediska mohlo probírání těchto příkladů stejně dobře počítání pod sebe předcházet.

Zavedení trojciferných čísel pak zřejmě neznamená pro počítání pod sebe větší složitost. Procedura se sice prodlužuje, ale je to jen opakování stejných kroků, aniž by je bylo nutno držet jako celek, stačí vždy jen přejít v písemném zadání k dalšímu sloupečku. Tato procedura, pokud nebyla komplikována nějakým nestandardním zadáním, byla ke konci školního roku dostatečně zvládnuta, snad až na jednu výjimku, všemi dětmi.

Vyšší typy příkladů

Příklady na sčítání a odčítání dvouciferných čísel, které jsme vyčlenili jako příklady vyššího typu, nepředstavovaly nový typ jen v didaktické posloupnosti probírané látky. Přinejmenším u některých dětí bylo patrné, že jde opravdu o složitější typ příkladů.

23.10.96:

Když jsem se se Slávkem bavil, bylo jasné, že už tomu rozumí - když jsem se k němu obracel, zrovna vysvětloval Fandovi, jak se počítá pod sebe, když je součet dvojice čísel přes desítku - tu desítku si ukážeš takle (na prstech) a pak se přidá k součtu další dvojice. Ptal jsem se Slávka, jestli tedy už ví, že je to stejné, jako kdyby to počítal v řádku. Věděl to, ale příklad 38+41 vedle sebe vypočítat neuměl. Ale 38+40 ano, takže pak už jsme jen přidali jedničku.

Někdy jsme mohli pozorovat, jako by tyto příklady vytvářely i subjektivně odlišený nový kontext počítání. Zdá se nám ovšem pravděpodobné, že k tomu přispělo předřazení "písemného" počítání pod sebe, vůči němuž se tyto příklady pak odlišují především, a to jako počítání "zpaměti".

11.12.96:

Sčítání vedle sebe: *(43) + (2)7* *|_________|*	*Číslice byly v kroužku a spojeny obloučkem (viz fieldnotes s.6). Naznačovaly počítání nejdříve 43+20.*
Vilík modelově na tabuli: 43+20... - uč.: a mohla bych 40+20? Ne, pak se dětem stávalo, že na tu trojku zapomněly.	
Vilík: 43+20=63 a 63+7=70.	
Příklady na tabuli - zároveň do školních sešitů.	
Martin: 35+24: začal "35+2=7" - uč.: co mi to říkáš? cos měl loni za známku? To neni dva, to jsou desítky.	

Martin: 35+20=55, 55+4=56... 59 *Uč.: horší než na dvojku.*	*Je tady 6 v 5***6** *sečtením 2+4 z druhého členu 24? Pak by Martin byl schopen složit hledaný dvouciferný výsledek z jakékoli kombinace zadaných čísel: 35+24= (hledám dvě čísla): 35+20=7 (= první číslo), 2+4=6 (= druhé číslo), výsledek může klidně být 76?* *Uč. naznačuje Martinovi, že takhle to dvojka nebude.*

Martin tu předvádí, že desítková konstrukce jmen a znaků čísel (kterou bezpečně zvládá) není vůbec automaticky desítkovou strukturací čísla samého. Postup, který slouží k označování čísel, ke konstrukci jejich jmen a znaků, není nijak vztažen k počítání. Dokonce ani průprava s počítáním pod sebe nevede nutně k počítání "desítky s desítkami, jednotky s jednotkami". Možná dokonce tu první Martinova chyba vzniká interferencí s postupem "odzadu", závazným pro počítání pod sebe.

Pokračování téže hodiny:

67+30=97 (Marcel)	
Vráťa: 16+77= *uč. mu vyčinila za ruce v kapsách - viděla to i v TV.* *Vráťa: 86+7=93*	*Exposé o neslušnosti mít ruce v kapsách, když mluví s uč., a vůbec s někým. Teď se tenhle neslušný zvyk rozmáhá, viděla to i v televizi - je tím pobouřena.* *Myslel jsem, že po tomhle přerušení Péťa tím spíš příklad nezvládne, ale on ho klidně dokončil, a správně. 16+70 musel spočítat už před tím (nebo při tom), co uč. držela kázání, a mezivýsledek celou dobu držet. Znamená to, že je tak dobrý nebo že kázání nevěnoval pozornost? Ale i kdyby ji neposlouchal, přinejmenším ho zarazila, zdržela a rušila. Je to pro mě od něj překvapení.*
Evžen (uč.: to mám radost) - 52+39: *52+30=82, 82+9=91.*	*Evžen taky bez váhání.* *Možná, že je jim logika tohohle počítán bližší, než počítání pod sebe.*
Eda: 55+36=91. *Uč.: nechci výsledek, chci to rozložené.*	*Eda řekl rovnou výsledek, a to téměř okamžitě po přečtení příkladu.*
55+6= 61 (koktá a neví, jak dál). *Ještě jeden příklad: 76+18→ 76+10=86 a plus 8 se rovná 94.*	*Když jsem se ho po hodině ptal, jak to počítá, opravdu počítal příklady naráz - dal jsem mu myslím mj. 28+19, řekl téměř bez rozmýšlení 47. Vypadá to, jako by se pohyboval v číselné řadě velmi rychle intuitivně. Původně jsem si myslel, že je nějaký počtářský samorost (což není vyloučeno) a počítá nějak zvláštně, naráz, bez předchozího rozkladu. Ale pak mi došlo, že Eda přišel z jiné třídy a že se tam sčítání vedle sebe učili.*
Uč.: Eduard trošku pomaleji různé věci chápe, ale pak, když se to naučí, tak to umí.	

23+67= Kiška bez potíží správně. *Řeč o vlasech v očích.*	*Kiška si má udělat něco s vlasy, aby jí nepadaly do očí. Holky polohlasem vykřikují "nebo čelenku, pani učitelko, nebo čelenku".*
Lada: 47+53 - zarazila se na "devadesát... sedum".	*Je možné, že takhle přece jen rozkládá pohyb v desítkovém registru: "**čtyřicet**sedum plus **padesát** je **devadesát**... sedum".*
Vilík: 54+27 - výborně (nenechal se splést)	*Už nevím, čím se mohl nechat splést, myslím, že nějaké děti v jednu chvíli vyjekly, jako by udělal chybu?*
Marcel škemrá o vyvolání - uč. vyvolává Čendu: 29+31= *29+30 je 59 +1 je šedesát.*	*Kolísám v zápisech mezi číslicemi a slovy - hlavně proto, že slovy bych to nestihl. Slovy se to snažím zapsat tam, kde mi formulace připadá nějak důležitá.*
Zapsat příklad s názvy členů - sčítanec, sčítanec, součet. - Řada dětí se sešitem za uč., jak to mají psát.	
Měli to rozepsat na celý řádek, aby se jim popisky vešly: *43 + 27 = 70* *sčítanec sčítanec součet*	*Čenda to tak neudělal a řada dětí asi taky ne, protože to uč. řekla pozdě a samotné je to nenapadlo. Když začali zapsáním příkladu, psali ho bez ohledu na délku popisků pod ním.*
Opětovně dotazy na podtrhávání a kroužkování jako na tabuli.	*Je to onen modelový příklad z tabule, kde bylo naznačeno, jaký je u těchto příkladů postup.*
Čenda kroužkuje (<u>43</u>) + 27 = (<u>7</u>)0 *|_________|* *- vzápětí "co to zas dělám?" a shání gumu.*	*Dneska zapomněl penál a musí si věci půjčovat.* *Jeho reakce zní, jako by se okřikl, že nedává pozor. Je možné, že se přistihl, jak při tom myslí na něco jiného a v úkolu kontrolovaném jen periferně udělal chybu?*
S.39 - žlutý puntík. Zkusíme počítat. - Napomíná je, jak jim to trvá. Luděk po jedné stránce.	*Uč. se jeví, že Luděk listuje po jedné stránce. Ale může to být tak, že už dojíždí ke stránce.*
Slávek: 28+54 - s malým zadrháváním dobře, po "78" se podívá do knížky a zjišťuje tam zbylé jednotky.	*Při počítání se totiž dívá mírně nahoru do prázdna. Rád bych věděl, zda tam jsou nějaké zřetelné obrazné představy.*

Z průběhu hodiny můžeme vyčlenit jako zajímavé tyto momenty:

Čenda, který se okřikuje za nepozornost, udělal možná chybu podobnou Martinovi - ovšem při nedostatečném soustředění. Spojuje do triády číslice, které k sobě ve správném postupu nepatří: 4 - 3 - 7 (?).

Většina dětí proceduru, v níž není kladen důraz na rychlost a jsou navíc pod kontrolou závazného postupu ze strany učitelky, zvládá. Všimněme si, že ačkoli je nový typ příkladů označen jako počítání zpaměti, ve skutečnosti pracují s písemným zadáním, "zpaměti" se týká jen mezikroků procedury. To platí v průběhu celého dalšího roku: tyto příklady nejsou zadávány jinak než v písemné podobě, ústně zadávány nejsou. Přestože některé děti říkají velmi brzy výsledky "naráz", aniž by prováděly postupný výpočet, jsou ve stejné situaci, kterou dobře ilustruje Slávek: po prvním kroku mají možnost se vrátit k zadání a teprve potom konstruovat druhý krok. Mohou to dokonce dělat i opakovaně, pokud v průběhu druhého kroku neudrží výsledek prvního, takže nemohou konstruovat výsledek. Tak je tomu tehdy, není-li celá procedura dostatečně rychlá. K tomu patrně dochází, nejsou-li její jednotlivé kroky akty prováděnými naráz, nýbrž jsou samy ještě posloupnou procedurou. To můžeme výše vidět u Lady: posun desítkového registru probíhá ve dvou krocích. Podobně může ve dvou krocích probíhat i konstrukce jednotkové cifry. Nejsou-li pak jednotlivé kroky dostatečně simultaneizovány, je zřejmě celá procedura citlivější na rušení, jak to možná vidíme u Lady v následující citaci záznamu:

18.12.96:

Lada si předepisuje příklady.	*Po prvním, který hned spočítala, si další tři nejdříve předepisuje a pak je teprve počítá.*
44-24 (přemýšlí, skoro jakoby náznak prstů?)	*S prsty to asi byl jen dojem. Možná se spíš soustřeďuje než přemýšlí?*
86-24=62	
70-24 (Kývá se, jako by krokovala postup, ale je to nějak dlouhé - opakuje?)	*I kdyby si kývla na každé číslo a operaci, bylo toho kývání moc. Přitom šlo evidentně o krokování při počítání, nešlo jen tak o bezděčné kývání zepředu dozadu. Mám dojem, že by to opravdu mohlo souviset se soustředěním, že jak je nesoustředěná, začíná příklad počítat několikrát.*
Další série (mezi výpočty dost přestávky).	*Zase si předepsala snad čtyři příklady. To šlo rychle, ale samotné počítání pak ne - jakoby jí pozornost pořád odbíhala k něčemu jinému, k dění ve třídě.*
95-24 (Lada sleduje Gitu, která říká učitelce o vystoupení Valáška - uč. se rozplývá.)	*Uč. projevuje velký zájem, říká, že by se snad i šla dnes večer na vystoupení podívat, přestože jí není dobře.*
Lada si šeptá.	*Už ale nevím co, zda se to týká počítání, ale asi ano, jinak bych to nezaznamenával. Snaží se přimět mozek k počítání tím, že si příklady předříkává? (Držím se tu ovšem pořád předpokladu, že má potíže se soustředit, ale nic jiného mě nenapadá.)*

Vrátíme-li se k předchozího záznamu z 11.12., vidíme ještě jeden zajímavý moment. Eda umí říci výsledek naráz, ale neumí zkonstruovat posloupnost kroků, jak ji chce učitelka. Podobné problémy má i Jindra, a to ještě mnohem později:

29.1.97

<table>
<tr><td>66+25=
Počítá to odzadu, jako pod sebe, tvrdí, že umí jen výsledek, jinak to neumí.</td><td></td></tr>
<tr><td>Milena: prý se učili 66+25= 60+20=80, 6+5=11, 80+11=91.</td><td>Tenhle postup uč. striktně odmítá, že takhle ne, pak se právě stává, že děti zapomenou (nevím už které číslo řekla). Takhle to dělat nebudou.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Když jsem s ním o tom o přestávce mluvil, znovu argumentoval, že na jejich škole museli rychle (měli nějaké soutěže) rovnou výsledek. Jindra mi vlastně nepotvrdil, že to počítal odzadu - neví, jak to počítal. Jenom mi ukázal, jak sčítá pod sebe i víc čísel. Zkusil jsem mu</td></tr>
</table>

dát součet dvou trojciferných čísel, aby viděl, že to vlastně musí skládat, i když u dvouciferných to dělá tak rychle, že o tom neví. Ale byl soustředěn na zjištění výsledku. Trvalo mu to jasně nějakou chvíli, neřekl ho hned, ale neměl zase náhled, co při tom dělal. Koukal na mě spíš nedůvěřivě, když jsem mu tvrdil, že to vlastně počítá tak, jak chce paní učitelka, že si to rozkládá. Doporučil jsem mu, aby si počítal ten samý příklad pod sebe i vedle sebe, aby viděl, že počítání pod sebe (a odzadu) a vedle sebe (odpředu) je vlastně to samé. Ale žádný pocit objevu jsem z toho neměl - ani u něj, ani u sebe. Je to jako spontánní pohyb ve známých, ale nereflektovaných strukturách - jako by se k nim dostal opačně než jiné děti. Ty nejdříve musí vědět, jak se to dělá, aby to pak mohly dělat. Kdežto on to dělá, ale neví jak?

Při analýze postupů dětí jsme dospěli k závěru, že reakce Mileny na počítání Jindry není náhodná, že Milena rozpoznala v jeho počítání postup, kterým sama předtím používala. Ona, Jindra i Eda přitom patří k dětem, které přišly z jiných škol a tyto příklady se učily počítat už ve druhé třídě.

Znamená to tedy, že celý problém je v jiném předpisu, který jim učitelka předkládá jako závazný, přičemž jejich původní postup je odmítnut, zakázán? Nebo je tu přítomno ještě něco jiného?

18.12.96:

49-16 (Martin: "49+10= ... já to počítám jako zpaměti" - uč.: Martine, pozor, ta matematika u tebe, ty desetiminutovky...)	*Martin tady potvrzuje, co si poznamenávám o pár řádek výš: že totiž takhle ještě nepočítali a že pojem "počítání zpaměti" mu netvoří přesný binární člen k "počítání pod sebe", ale popisuje izolovaný předpis práce s dvoucifernými čísly, který zůstává izolovaný natolik, že do něj neproniká ani inverzní povaha sčítání a odčítání, kterou jinde určitě chápe - aspoň na té úrovni, že s ní samozřejmě pracuje.*

Chceme si tu blíže všimnout Martinovy reakce "já to počítám jako zpaměti". Není sice jasné, zda se "podivila" učitelka nebo to je reakce na projevy dětí, které se "děsí" nad tím, co Martin dělá, ale to na podstatě jeho námitky, která má obhájit jeho postup, nic nemění.

Nejdříve zpochybníme naši vlastní interpretaci, vzniklou při zpracování záznamu: kdyby tomu bylo z Martinova subjektivního hlediska tak, že takhle ještě nepočítali a příklad by tvořil zcela nový kontext, neodkazoval by Martin k postupu "zpaměti", který se právě váže na kontext už probíraný minulý týden u sčítání. Konzistentní s jeho argumentem je interpretace právě opačná: Martin právě rozlišuje "zpaměti" jako binární člen, opozitum k "písemně". V tom případě možná věta znamená "počítám zpaměti, tzn. nepočítám to, jako bych to počítal písemně". V tom případě by tedy nedělal první krok 49+10, přičemž ale nemůže mít na mysli, že by počítal 49-10, protože žádný protiklad ke "zpaměti" neodkazuje ke znaménku, k tomu, že by se zaměnilo "mínus" za "plus".

Co by tedy dělal? Nemíří tu Martin k postupu, který jsme nazvali skládankou, ke znakovému skládání výsledku? Proč ji ale v tom případě považuje za protiklad "zpaměti"? Patrně proto, že skládanka pro něj koresponduje s počítáním "písemně", "pod sebe". Martin tu odlišuje dva způsoby konstrukce dvouciferného výsledku: 49-16=49-10-6 jako postup "zpaměti" oproti 49-16 = (4-1) a (9-6) jako "písemně".

Žádná z těchto struktur neobsahuje pro něj implicitně znaménko, aby mu to zabránilo zaměnit sčítání s odčítáním. Z toho soudíme, že nepracuje s logikou operátora, s představou pohybu, který má implicitně svůj směr.

Porovnáme-li tuto interpretaci s tím, co jsme viděli výše u Edy a Jindry, je tu patrná shoda v existenci dvou strukturací procedury složitějších příkladů. Také Eda zprvu neumí rozložit proceduru na kroky, jak si je představuje učitelka, a soudíme tedy, že postupuje jinak. Pokud odmítneme představu, že Eda má už od počátku schopnost vidět výsledek okamžitě, naráz, a budeme předpokládat, že tato schopnost je zrychlením, simultaneizací původní posloupné procedury, jsou ve hře patrně tytéž dva způsoby postupu. Když Eda neumí rozložit proceduru, jíž dospívá k výsledku příkladu 55+36=91, neumí to na kroky vyžadované učitelkou:

55+36= 55+(30+6)= (55+30)+6=85+6=91.

Tento postup vlastně rozkládá příklad VI. typu na posloupnost příkladu III. typu (55+30) a IV. typu (85+6). Analogicky je příklad V. typu, např. 55+32, rozložen na příklad III. typu a II. typu (85+2).

Naproti tomu postup, o kterém referuje Milena a který předpokládáme jako alternativní a interferující u Edy a Jindry, rozkládá příklad na jiné typy jednodušších příkladů:

55+36 = (50+5)+(30+6) = (50+30)+(6+5) = 80+11 = 91.

Je to postup, který zachází s posloupností jednodušších typů příkladů: s počítáním do 20, které jsme typ počítání dvouciferných čísel vůbec neklasifikovali, s příklady 0. typu (50+30). (O takovém spojení těchto dvou typů příkladů jsme se již zmiňovali, protože se vyskytovaly v rámci dlouhých příkladů.)

Tato struktura se snad může jevit jako delší, ale jen zdánlivě, protože v předchozí proceduře bychom mohli desítkový posun (55+30) také rozepsat do dvou kroků. Navíc nám Eda i Jindra ukazují, jak je integrovatelná do zjištění výsledku "naráz".

V čem jsou tedy problémy? Je potřebné nutit děti, aby používaly závazný postup, který jim působí potíže, když "po svém" jsou schopny výsledek bezpečně a rychle zjistit?

Podívejme se na postup při odčítání - je tato strukturace procedury při něm nemožná?

55-36= (50-30) - (5-6): čistě matematicky to nedává smysl. Ovšem při skládance, kdy se znaménko mezi kroky rozkladu nahrazuje syntagmatem "spojit", už to řešení má:

55-36= (50-30) a (5-6) = 20 a (-1).

Jenže takové řešení zachází s konceptem záporného čísla. K tomu některé děti dospívají a na zadání "5-6" by dokázaly dát správnou odpověď. Avšak pokud jde o použití záporného čísla ve výpočtu, zdá se zcela nepravděpodobné.

Není však možný ještě jiný postup, který by využíval postupů dosavadních?

55-36= (50-30) a (15-6) = (20 -10) a 9. Vypadá to příliš složitě, ale ve skutečnosti se to podobá tomu, co jsme viděli u odčítání pod sebe: kombinace jednoduchých příkladů 0. typu a "do dvaceti" se komplikuje jen jedním pravidlem: "5-6 nemohu, takže počítám 15-6. Ale jedničku jsem si půjčil, musím ji vrátit." Toto pravidlo je méně komplikované, než u odčítání pod sebe - znaménko operací ve všech dílčích krocích skládanky je tu shodné, odpovídá znaménku celkového příkladu a v tomto smyslu koresponduje s celkem procedury. Integrovat tento šiftový posun do procedury skládanky jako nepříznakovou součást je tak možná snazší než u odčítání pod sebe, kde naopak, jak jsme viděli, zůstává práce s „jedničkou“ většinou receptuálním krokem. Možná, že právě to přispívá k možnosti integrace postupu do simultánní struktury, v níž Jindra a Eda vidí výsledek okamžitě.

To tedy vytváří možnost řešit vyšší příklady jinou strukturací procedury, která jako by vzcházela vstříc logice skládanek. Pokud je to ona, kterou má Martin na mysli při svém implicitním rozlišení „zpaměti“ a „písemně“, znamená to, že kontext počítání pod sebe a vedle sebe mu spojuje právě možnost chápat obojí jako skládanky. Korespondence mezi počítáním pod sebe a vedle sebe se tak vytváří po zcela jiné linii, než bychom čekali.

Bohužel nemáme z naší třídy dostatek materiálu, který by dával jasné odpovědi na možné otázky. Není tedy např. jasné, zda na jiných školách ve výuce ve druhé třídě probírali i odčítání "zpaměti" a zda to v tom případě bylo se stejnou strukturací procedury či se změnila.

U Edy vidíme následující týden, že pro odčítání přejímá bez potíží postup, vyžadovaný učitelkou u příkladu 53-33 i 32-14. (Podobně Jindra řeší bez potíží příklad 57-14, ten je ovšem řešitelný oběma postupy a Jindra říká výsledek rovnou.)

Nejsme zde schopni dále doložit, jakým způsobem zvládá odčítání Jindra - zda také pro odčítání přejímá postup učitelky a u sčítání setrvává u svého původního (jak vidíme v záznamu z 29.1.) nebo zda nachází pro odčítání postup, který je nějakým rozvinutím jeho původní strukturace[13], ať už jde o strukturaci, kterou si osvojil při výuce ve druhé třídě a později ji dobře diferencoval od postupů při odčítání pod sebe, nebo o nějakou individuální variantu.

Přes tyto nedořešené otázky můžeme uvažovat o dvou liniích vývoje počítání s dvoucifernými čísly, které se v chápání příkladů vyššího typu setkávají a ovlivňují. Jde o

1. strukturaci procedury řešení vyšších příkladů, kterou můžeme provizorně charakterizovat přítomností či nepřítomností příkladu III. typu (posunu registru při zachování jednotek) v posloupnosti procedury,

2. existenci konceptu operátora, tedy chápání příkladů jako pohybu v číselné řadě nebo jako znakově triadické skládanky.

Prolínáním těchto dvou linií nastávají patrně odlišné vývojové situace:

1. Pro děti, které chápou příklad jako pohyb v číselné řadě, jsou obě strukturace procedury ekvivalencí různých forem v zásadě téže operace, variantami téhož kontextu. Lze předpokládat, že pro ně není obtížné přizpůsobit se požadavkům učitelky. K takovým dětem by v citovaných záznamech mohla patřit Milena. Na druhé straně bychom předpokládali, že tyto děti nebudou lpět na přesné posloupnosti postupu, budou ho častěji variovat, relativizovat jeho závaznost. Procedura počítání vedle sebe je pro ně nejspíš něčím odlišným od počítání pod sebe: zatímco počítání pod sebe zůstává ve svém celku (nikoli v rámci jednotlivých sloupců) receptuální skládankou, zde je pro ně korespondence jednotlivých kroků procedury s pohybem v číselné řadě zřejmá: jde vždy o pohyb od jednoho čísla k druhému, ať je tento pohyb jakkoli dělen, krokován.

2. Pro děti, které chápou příklad s dvoucifernými čísly jako skládanku, představují různé strukturace procedury dva odlišné postupy, které korespondují s dvěma odlišnými kontexty, nepropojenými společným, obecnějším kontextem. V počáteční fázi diferenciace těchto odlišných kontextů budou pro ně typické interference a záměny jednotlivých kroků.

Je ovšem třeba říci, že pro většinu dětí z naší třídy situace, v níž by byly konfrontovány se dvěma různými postupy, nemusela nastat: k novému kontextu počítání "zpaměti" (vlastně počítání vyššího typu příkladů) byl zaveden nový závazný postup, který je pro ně novou formou skládanky určenou pro nový kontext. U dětí, které nepřišly do 3. třídy z jiných škol, jsme tak mohli pozorovat jen občasné váhání nad známými nižšími formami příkladů, které jsou včleněny do složitějších příkladů nebo jsou zadávány spolu s nimi.

Tak se tyto děti patrně učí každou novou variantu příkladů - včetně přechodu od sčítání k odčítání - jako nový kontext, jemuž je kanonicky přiřazen nový předpis. V extrémním případě by se tak byly nuceny přecházet mezi velkým množstvím parciálních kontextů, které nemají nic společného. Ve skutečnosti ovšem pro ně situace není tak dramatická. I na bázi skládanek je možno objevit různé analogie. Přechody k vyšším typům příkladů znamenají i při logice skládanky kombinaci nižších typů skládanek.

Všimněme si např., že pokud děti jako Jindra a Eda skutečně vybudovaly ve druhé třídě sčítání dvouciferných čísel jako postupné doplňování triád "do 20" a jejich skládání do

---

[13] Jindra má zřejmě také osobnostní důvody k setrvání u "svých" způsobů. Nejsme schopni je dobře interpretovat, ale faktem je, že se v průběhu roku občas - a poté v prvních měsících 4. třídy velmi často - dostával do situací vzdoru, trucování, když se např. zdálo, že nechápe smysl dění ve třídě, smysl požadavků učitele. Mohlo to směřovat k vyhnutí se selhání v postupech, které bezpečně neovládá, není si jimi jist.

výsledku, pak v počítání pod sebe snadno nacházejí analogii téhož. Pak bychom i u těchto dětí mohli po diferenciaci postupů sčítání a odčítání, které jim korespondují s doplňováním izolovaných triád "do 20", nalézt bezpečné zvládnutí počítání pod sebe, ačkoli z hlediska "dospělé matematiky" nepracují s elementární logikou počítání. Problém nastává tehdy, když se standardně zadaný příklad variuje.

ZÁVĚR

Přestože nás řada nepřímých náznaků vede k závěru o existenci těchto dvou forem vývoje počítání s dvoucifernými čísly, je velmi obtížné do vnitřní struktury počítání jednotlivých dětí proniknout. Navenek všechny děti respektují dospělou logiku počítání. Chyby vypadají jako drobná opomenutí, přeřeknutí, nepozornost - a také jimi mohou být. Teprve opakované chyby upozorňují, že u dítěte není něco v pořádku. Ale vnitřní logika jeho chyb je obtížně přístupná. Často je dítě opraveno hned na začátku chybné procedury a nevíme tedy, jak by ji rozvíjelo dál. Přímé dotazy dětem, jak počítají, jsou většinou neúčinné: vede-li jejich logika k chybě, může jednak dítě cítit, že jeho postup je nesprávný a směšný[14], jednak - a to je podstatnější - plně této logice samo nerozumí, nemá pro ni "řeč". Tam, kde jsou výsledky správné, není odlišnost logiky patrná vůbec.

Navíc ony dvě logiky počítání představují popis krajních typů, založených na rozvíjení kanonické a generativní linie učení. Tyto dvě linie nejsou nijak fatálně nepropojitelné: generativní učení se završuje mechanikou zpaměti naučených postupů (např. triád), které integrují logiku postupu při generování správného řešení, ale odstraňují jeho zdlouhavost. V některých případech se také zdá, že k postupu prostřednictvím skládanek se mohou uchylovat i děti, jimž je logika pohybu v číselné řadě jasná, pokud totiž jde o pohodlnější postup při rutinním řešení. Logika je suspendována a evokována např. až při chybě.

Kanonické naučení zase vytváří možnost předem známou formu následně rekonstruovat, dodatečně objevit její souvislosti a logiku.[15] Tento vstřícný pohyb nemusí být dokončen - vzájemná korespondence různých kontextových formulí a procedur nemusí být úplná, mohou se vytvářet dílčí analogie, které umožňují chápat logiku některých kroků, a mezery v celku jsou překlenuty kanonickou znalostí, "jak se to dělá".

Formulace závěru o dvou formách počítání, korespondujících s dvěma formami učení, ovšem, jakkoli je hypotetická, upozorňuje na možné souvislosti vývoje počítání s jeho základy v první třídě - s tím, jakým způsobem dítě zvládlo a v důsledku toho jak pochopilo restrukturaci při přechodu přes desítku, zda byl dokončen vstřícný pohyb mezi kanonickými a generativními postupy doplňování triád apod.

---

[14] Nedávno autor statě suploval v jedné hodině matematiku. Když chtěl s jedním dítětem probrat jeho chybu a uklidňoval ostatní slovy, že chyby jsou zajímavé, reagovala třída bouří smíchu.

[15] Rozdíl mezi oběma formami osvojení počítání je v tom, že při generativně osvojené logice pohybu v číselné řadě má dítě v každém okamžiku počítání představu, ve kterém místě se tento pohyb nachází, každý krok počítání pro něj nabývá zřetelný význam jako část celkového pohybu. Naproti tomu kanonické osvojení skládanek nechává dílčí kroky bez korespondence s celkovým pohybem, ví se jen, že to na konci vyjde. Hypoteticky můžeme předpokládat, že budou-li registry pochopeny jako třídy, může být vytvořen model číselného prostoru nikoli jako řady, ale jako dvou či vícerozměrného prostoru, přičemž pozice v dvouciferném čísle korespondují se souřadnicemi. Tak by pak mohlo být chápáno počítání s nimi jako pohyb analogický pohybu na počítadle. Skládanky by pak mohly nabýt pro dítě významu jakožto pohyby korespondující s pohybem v ortogonálním systému.)

LITERATURA

Stať má charakter čistě empirické analýzy a její závěry nebyly dostatečně konzultovány s literaturou. Proto se omezujeme, kromě odkazů na výzkumné zprávy Pražské skupiny školní etnografie, uváděné pod čarou, na uvedení učebnic.

Ve třídě, kterou jsme navštěvovali, se pro výuku matematiky používaly tyto učebnice:

Jana Coufalová, Šárka Pěchoučková, Jiří Hejl, Jaroslav Hervert: Matematika pro třetí ročník základní školy. (Části první a druhá.) Praha, Fortuna 1994.

Jana Coufalová, Šárka Pěchoučková, Jiří Hejl, Jaroslav Hervert: Pracovní sešit I a II. Matematika pro třetí ročník základní školy. Praha, Fortuna 1994.