MATEMATICKÉ ZNALOSTI DĚTÍ VE ČTVRTÉ TŘÍDĚ

Miroslav Rendl

OBSAH

ÚVOD

V závěru školního roku 1997/98 jsme pěti 4. třídám, tvořícím většinu souboru sledovaného v longitudinálním výzkumu Pražské skupiny školní etnografie (4 třídám základního souboru a 1 třídě souboru doplňkového) zadali jeden z testových sešitů mezinárodního srovnávacího výzkumu, který proběhl v r. 1995 ve 43 zemích celého světa včetně České republiky a je označován jako TIMSS - Third International Mathematics and Science Study. To, že jednou z populací, na níž byl výzkum proveden, byly 4. třídy, nám umožnilo využít příležitosti ke komparaci s naším souborem. Chtěli jsme se však také pokusit propojit data z tohoto výzkumu s našimi údaji a pokusit se proniknout pod povrch standardního formálně statistického popisu výsledků, charakteristického pro tento typ výzkumů.

Pokud se nám to do jisté míry podařilo, vděčíme za to nevšední ochotě pracovníků Ústavu pro informace ve vzdělávání, především pak dr. Janě Strakové, dále dr. Janě Palečkové a v neposlední řadě dr. Vladislavu Tomáškovi. V řadě seminářů i neformálních konzultací nám poskytli údaje a materiály, které nám umožnily realizovat sběr a základní zpracování dat. Pokud jsou v dalším textu či tabulkách odkazy na údaje o republikovém souboru, jde právě o citace jimi poskytnutých materiálů, z nichž některé nebyly publikovány a jdou za rámec obsahu publikací uvedených v seznamu literatury.

Náš výzkum měl ve srovnáním s výzkumem provedeným týmem ÚIV v ČR omezený charakter. Jak je patrné z charakteristiky republikového výzkumu, v pro nás relevantní populaci byly testové úlohy rozděleny do 8 testových sešitů tak, že každý sešit obsahoval zároveň úlohy matematické i přírodovědné. Úlohy byly nejprve rozřazeny do 26 různých "souborů (A až Z). (...) Soubor A byl zařazen do všech 8 testových sešitů, ostatní soubory se v testových sešitech pravidelně střídaly tak, aby úlohy z každého souboru řešil reprezentativní vzorek žáků a aby doba potřebná na vyplnění každého testového sešitu byla 64 minut."[1]

Z uvedených 8 testových sešitů, jejichž obtížnost byla předem pečlivě vyvažována a měla by tedy být zcela analogická, jsme pracovali s jediným. Měli jsme ovšem k dispozici celkové výsledky právě té části republikového souboru, která řešila právě tento sešit a byla v té době ve 4. třídě. Počet těchto dětí byl 405 oproti našemu souboru tvořenému 101 dětmi.

Náš sešit obsahoval kromě souboru otázek A soubory D, E, G, K, T a U. V jednotlivých položkách jsme pak výsledky mohli porovnat se všemi žáky 4. tříd v ČR, kteří danou položku řešili, ať byla součástí kteréhokoli testového sešitu. Jejich počet se pohyboval od 404 (v položkách souboru K) po 3267 (v položkách souboru A).

Veškeré naše pokusy o kvalitativní analýzu položek jsou tedy omezeny na položky testovacího sešitu uvedeného v příloze.

TEST TIMSS - POPIS VÝSLEDKŮ

Celkové výsledky

Celkové výsledky uvedeme především formou tabulek s případnými krátkými komentáři.

Test obsahuje 41 matematických položek, ve kterých však lze dosáhnout maxima 45 bodů, protože ve 4 položkách lze získat 2 body. Takto získaný skór pro stručnost často označujeme Math. Přírodovědnou část tvoří 19 položek hodnocených vždy jen alternativní jedním či žádným bodem, takže tu lze dosáhnout maximálně 19 bodů. Celkový skór tak může dosáhnout nejvýše 64 bodů.

Jaké byly charakteristiky rozložení výkonů v našem souboru ve srovnání s republikovým souborem ukazuje tabulka na s. 3. (U našeho souboru vzhledem k jeho počtu N=101 neuvádíme relativní frekvence, protože se prakticky kryjí s absolutními.) Republikový soubor značíme "ČR", náš soubor "LG".

V tabulce už vyznačujeme skupiny, se kterými dále pracujeme při popisu výsledků: 4 skupiny z hlediska skóru Science, zejména ale 5 skupin z hlediska skóru Math. Zároveň naznačujeme, jak by proporcionálně analogické členění přibližně vypadalo v republikovém souboru. V celkovém skóru pak graficky porovnáváme přibližné kvartily.

V této distribuci je patrný posun výsledků našeho souboru směrem nahoru, především v matematické části testu a v důsledku toho i v celkovém skóru. Souhrnně vypadá srovnání s republikovým souborem takto:

	Počet dětí	Průměr celk. skóru	Směr. odch. celk. skóru	Průměr Math	Směr. odch. Math	Průměr Science	Směr. odch. Science
LG	101	49,2	10,5	34,1	8,2	15,2	2,9
ČR	405	44,9	8,9	30	7,3	14,9	2,3

[1] Straková, J., Palečková, J., Tomášek, V.: Třetí mezinárodní výzkum matematického a přírodovědného vzdělávání. Souhrnné výsledky žáků 4. ročníku. Výzkumný ústav Pedagogický, Praha 1997, s. 8 - 9.

Math	LG-abs.	ČR-abs.	ČR-rel.	Celk.skór	LG-abs.	ČR-abs.	ČR-rel
8	-	1	0,2	15	-	2	0,5
9	-	1	0,2	16	-	1	0,2
10	-	2	0,5	18	1	-	-
11	-	1	0,2	20	-	1	0,2
12	2	3	0,7	22	-	2	0,5
13	-	-	-	23	-	1	0,2
14	-	3	0,7	24	-	2	0,5
15	-	1	0,2	25	1	3	0,7
16	-	6	1,5	26	1	2	0,5
17	1	7	1,7	27	-	2	0,5
18	-	8	2,0	28	3	3	0,7
19	3	6	1,5	29	2	4	1,0
20	4	9	2,2	30	2	-	-
21	4	8	2,0	31	2	6	1,5
22	1	13	3,2	32	-	11	2,7
23	2	13	3,2	33	-	5	1,2
24	-	15	3,7	34	-	10	2,5
25	3	9	2,2	35	-	9	2,2
26	-	15	3,7	36	1	14	3,5
27	1	16	4,0	37	3	10	2,5
28	2	16	4,0	38	1	6	1,5
29	2	22	5,4	39	1	11	2,7
30	3	23	5,7	40	2	14	3,5
31	4	17	4,2	41	1	12	3,0
32	5	18	4,4	42	1	12	3,0
33	2	23	5,7	43	4	17	4,2
34	5	21	5,2	44	3	15	3,7
35	4	20	4,9	45	3	18	4,4
36	1	20	4,9	46	-	21	5,2
37	6	27	6,7	47	6	15	3,7
38	6	17	4,2	48	3	18	4,4
39	7	15	3,7	49	1	15	3,7
40	8	12	3,0	50	3	19	4,7
41	2	11	2,7	51	3	21	5,2
42	11	6	1,5	52	3	13	3,2
43	6	-		53	2	17	4,2
44	6	-		54	4	16	4,0
Science				55	7	15	3,7
6	2	2	0,5	56	5	17	4,2
7	-	1	0,2	57	7	10	2,5
8	2	2	0,5	58	6	9	2,2
9	3	2	0,5	59	5	3	0,7
10	2	14	3,5	60	8	3	0,7
11	2	17	4,2	61	3	-	-
12	4	18	4,4	62	2	-	-
13	8	37	9,1	63	1	-	-
14	7	58	14,3				
15	12	78	19,3				
16	21	73	18,0				
17	23	60	14,8				
18	8	37	9,1				
19	7	6	1,5				

Další tabulky konkretizují tyto rozdíly ve výsledcích jednotlivých položek. Položky jsou uspořádány podle míry úspěšnosti řešení v našem souboru - procento značí relativní počet dětí, který v souboru položku řešil. V první tabulce jsou položky matematické části testu.

Položky Math	ČR	**LG**	LG - ČR
D7 (shodné obrazce)	93,2%	**99,0%**	5,8%
T1a (krabice mléka)	84,8%	**97,0%**	12,2%
G2 (hmotnost dospělého)	93,3%	**96,0%**	2,7%
D5 (láhve)	85,0%	**95,0%**	10,0%
A5 (největší obsah)	95,3%	**95,0%**	-0,3%
G3 (zápis čísla)	96,3%	**95,0%**	-1,3%
K2 (6971+5291)	92,6%	**93,1%**	0,5%
E2 (stovky)	87,1%	**92,1%**	5,0%
K5 (tužka)	91,1%	**92,1%**	1,0%
A1 (polovina teček)	93,4%	**89,1%**	-4,3%
A4 (obrázek čísla)	86,7%	**89,1%**	2,4%
K1 (průnik)	86,6%	**88,1%**	1,5%
U3c (kdo dříve)	83,7%	**88,1%**	4,4%
A3 (tužky v krabicích)	81,8%	**87,1%**	5,3%
E3 (zaokrouhlení)	79,6%	**86,1%**	6,5%
D6 (teplota)	71,4%	**85,1%**	13,7%
U5 (sčítání jako násobení)	82,5%	**83,2%**	0,7%
U1 (trojúhelníky)	74,6%	**82,2%**	7,6%
U4 (číselná řada)	65,1%	**82,2%**	17,1%
A2 (2x více dívek)	76,6%	**82,2%**	5,6%
T5 (stříhání)	63,5%	**81,2%**	17,7%
D8 (4,03-1,15)	68,5%	**79,2%**	10,7%
E1 (kalendář)	75,3%	**79,2%**	3,9%
K8 (části obdélníka)	81,6%	**83,2%**	1,6%
U3 a (Marie - za 10min 3km)	75,2%	**78,2%**	3,0%
T1b	64,0%	**77,2%**	13,2%
K9 (kuličky)	59,6%	**75,2%**	10,2%
K4 (body)	70,0%	**74,3%**	-3,0%
K6 (přibývání čtverečků)	72,1%	**72,3%**	0,2%
T4 a (Jana)	24,6%	**71,3%**	46,7%
K3 (pravidlo násobení)	56,1%	**71,3%**	15,2%
U2 (>2/7)	59,5%	**71,3%**	11,8%
T3 (procházka)	63,5%	**70,3%**	6,8%
T4b (Andrea)	17,8%	**70,3%**	52,5%
T2 (nejmenší číslo)	40,1%	**56,4%**	16,3%
G1 (vzdálenost na mapě)	63,5%	**67,3%**	3,8%
G4 (časopisy)	58,0%	**66,3%**	8,3%
U3b (Lída - 1 km za 3 min)	61,6%	**63,4%**	1,8%
D9 (tři ze čtveřice)	48,1%	**61,4%**	13,3%
K7 (obdélník z drátu)	16,1%	**18,8%**	2,7%
E4 (7/10)	13,3%	**12,9%**	-0,4%

Následující tabulka uvádí položky přírodovědné části testu, opět seřazené podle míry úspěšnosti v našem souboru.

Položky Science:	ČR	**LG**	LG - ČR
A7 (není na jídlo)	93,3%	**100,0%**	6,7%
G5 (vzduch do plic)	96,0%	**97,0%**	1,0%
G7 (stín)	85,8%	**96,0%**	10,2%
E6 (Slunce)	94,5%	**93,1%**	-1,4%
A6 (plovoucí tělesa)	89,3%	**90,1%**	0,8%
A10 (dinosauři)	83,9%	**90,1%**	6,2%
G6 (rostlina)	94,6%	**90,1%**	-4,5%
A9 (tloustnutí)	80,1%	**85,1%**	5,0%
G9 (duha)	95,0%	**87,1%**	-7,9%
D2 (zuby)	76,6%	**83,2%**	6,6%
D3 (vejce)	86,2%	**83,2%**	-3,0%
D4 (vrstvy Země)	75,5%	**81,2%**	5,7%
E8 (horká voda)	79,1%	**77,2%**	-1,9%
E5 (bubliny)	72,4%	**76,2%**	3,8%
E7 (puls)	68,1%	**74,3%**	6,2%
D1 (měď)	63,6%	**66,3%**	2,3%
A8 (zemský povrch)	58,7%	**57,4%**	-3,8%
G8 (ledovec)	30,9%	**56,4%**	25,5%
E9 (záplavy)	48,6%	**32,7%**	-15,9%

Výsledky přírodovědné části testu

Z tabulky na s. 3 je patrné, že distribuce výkonů je v přírodovědné části testu oproti části matematické výrazně odlišná. Matematickou část testu charakterizuje poněkud strmější pokles průměrné úspěšnosti mezi jednotlivými skupinami; dvě lepší skupiny (A, B - 46 dětí) tu produkují pouhých 16% všech chyb a 84% chyb připadá na zbylých 55 dětí.

V přírodovědné části testu nacházíme distribuci výkonů charakterizovanou tím, že do rozpětí skórů 13-17 bodů (z 19 možných) se vešlo 71 dětí, z nich pak plných 44 dosláho skóru 16-17. Tato kumulace není dána jen zhruba polovičním počtem položek oproti matematické části testu. Distribuce výkonů v matematické části je méně kumulována kolem průměru i relativně: když vezmeme za "široký průměr" skupiny B, C a D, které čítají dohromady 58 dětí (tedy méně početný průměr, než z hlediska skórů ve Science), je rozpětí jejich matematických skórů od 27 do 41, tedy 15 bodů oproti očekávaným 10,8, (odpovídajícím mechanické extrapolaci rozsahu škály). V republikovém souboru nacházíme přitom ve Science podobnou či spíše ještě větší kumulaci: skóru 13-17 bodů tu dosáhlo 75,5% dětí.

Předběžně se domníváme, že se zde odráží jiná povaha obsahu přírodovědných položek: 12 z nich má i podle autorů testu povahu "jednoduché informace" - a škála tak do značné míry charakterizuje "informovanost" našich čtvrťáků v přírodních vědách.

Ve snaze najít nějakou formuli zjednodušující či shrnující onu typickou znalost našich čtvrťáků v oblasti přírodních věd jsme nebyli příliš úspěšní. Pokud jsme nechtěli prostě reprodukovat počet chyb jednotlivých skupin v jednotlivých položkách, pak nám nezbylo než si pomoci přibližnými termíny. Kromě pojmu "většina" použijeme také termíny téměř polovina, "velká část" (budeme tím myslet část skupiny v rozpětí přibližně jedné třetiny až čtvrtiny - jinými slovy "každé třetí až čtvrté dítě"). Dále si pomůžeme termínem "několik", jímž budeme myslet "každé páté až sedmé dítě". Pak platí:

I (15 dětí):

Pro nejúspěšnější skupinu není v testu položka, kterou by nezvládla většina dětí. Pouze u jediné položky (E9 Záplavy) můžeme mluvit o tom, že ji velká část skupiny řeší špatně (4 chyby). Ve všech ostatních položkách pak u této skupiny najdeme jen 4 ojedinělé chyby. Průměrná úspěšnost skupiny v položkách Science tak činí 97,2%. (Každou položku řeší úspěšně v průměru 97,2% dětí.)

II (44 dětí):

Tutéž položku E9 řeší špatně většina (přesně 75%) dětí ze skupiny II (podobně jako v dalších skupinách). O souvislostech řešení této položky se ještě zmíníme.

Velká část této skupiny řeší dále chybně položky G8 (jak plove ledovec) a A8 (co pokrývá většinu zemského povrchu).

O dalších třech položkách pak můžeme říci, že je neřeší vždy několik (6-9) dětí: D1 (proč jsou konvice a pánve vyráběny z mědi),), E8 (co způsobí horká voda v řece) a E7 (změny pulsu a vdechů po závodě). (U každé položky však jde o jiné děti.)

Děti této skupiny dělají celkem 106 chyb, což představuje průměrnou úspěšnost 87,3%.

III (27 dětí):

Tři položky tu neřeší většina dětí: E9, G8 a A8.

Téměř polovina neřeší také položku D1.

Velká část dětí (7-9) neřeší další tři položky: E8, E7 (obě mezi problematickými už u předchozí skupiny) a E5 (co je uvnitř mýdlových bublin).

Dalších 5 položek pak neřeší vždy několik dětí (shodou okolností vždy 6): D2 (kterými zuby lidé rozmělňují potravu), D3 (kteří živočichové nesnášejí vejce), D4 (která vrstva Země je nejteplejší), A6 (obrázek souvislosti ponoru a hmotnosti) a A8 (co pokrývá většinu zemského povrchu).

Na celkovém počtu chyb se skupina podílí 133 chybami a dosahuje tak průměrné úspěšnosti řešení položek 74,1%.

Pokud bychom tedy široký průměr skupin II a III vzali za **typický standard** a zároveň považovali za **bezpečnou znalost** takovou, kde položku řeší alespoň 6 ze 7 dětí (jinak: kde náš "široký průměr" 71 dětí dělá nejvýše 11 chyb), pak problematických zůstává 6 položek:

E9 (záplavy) - 53 chyb, G8 (jak plove ledovec) - 32 chyb, A8 (co pokrývá většinu zemského povrchu) - 31 chyb, D1 (proč jsou konvice a pánve vyráběny z mědi) - 21 chyb, E8 (co způsobí horká voda v řece) - 16 chyb, E7 (změny pulsu a vdechů po závodě) - 15 chyb.

Naprostá **většina našich průměrných čtvrťáků tedy ví**, kterými zuby lidé rozmělňují potravu (D2), že vejce nesnášejí psi (D3), že nejteplejší je vnitřek Země (D4), že více ponořené těleso má větší hmotnost (A6), že na jídlo se nepěstuje bavlník (A7 - to ví ovšem všechny děti souboru), že přebytečná potrava se v těle ukládá jako tuk (A9), kde lze nalézt zkameněliny dinosaurů (A10), co je uvnitř mýdlových bublin (E5), že Slunce je nejteplejší (E6), že rostlina přijímá nejvíce vody kořeny (G6), jak se mění stín stromu během dne (G7), která kombinace může způsobit duhu (G9).

9 z těchto 12 položek řadí autoři testu mezi "jednoduché informace", přičemž o zařazení otázky G9 (duha) mezi "složitější informace" máme pochybnosti.

Jsou naopak některé **typické chyby**? Už bez rozlišení jednotlivých skupin lze uvést:

Většina chybujících (8 z 10) se domnívá, že největší hmotnost má těleso nejméně ponořené (A6), 10 z 19 chybných odpovědí považuje za nejteplejší vrstvu povrch Země (D4), 15 z 24 chybujících si myslí, že uvnitř mýdlových bublin je mýdlo (E5), 18 ze 34 chybných odpovědí se kloní k variantě, že konvice a pánve jsou vyráběny z mědi proto, že měď lze obtížně tvarovat.

25 ze 43 nesprávných odpovědí se domnívá, že většinu zemského povrchu tvoří zemědělská půda (14 pak velkoměsta a města - A8). 25 ze 44 chybujících považuje za správný obrázek ten, na němž je potopena asi polovina ledovce (dalších 10 pak ten, kde je potopen o něco méně než z poloviny - G8). Konečně v pro nás nejzajímavější položce E9 se 35 ze 69 chybujících dětí domnívá, že když byly břehy řeky zaplaveny pětkrát během 10 let a poslední záplava byla v roce 1993, pak příště budou zaplaveny v roce 1995. (Tato chyba je charakteristická tím, že je mnohem častější mezi dobrými matematiky.)

IV (15 dětí):

Kdybychom uplatnili stejné kritérium "bezpečné znalosti" (alespoň 6 ze 7 dětí - zde tedy méně než 3 chyby), pak v této skupině platí jen o 2 položkách: A7 (která rostlina se nepěstuje na jídlo) - bez chyb jako v celém souboru, dále pak G7 (stín stromu v průběhu dne) - 1 chyba.

Kritériu se blíží ještě další 2 položky se 3 chybujícími: G5 (kam vstupuje vzduch, když se člověk nadechne) a A6 - které ze zobrazených (různě ponořených) těles má největší hmotnost.

Naopak většina dětí řeší nesprávně 8 položek: E9 (záplavy) - 13 chyb, E5 (co je uvnitř mýdlových bublin) - 13 chyb, A8 (co pokrývá většinu zemského povrchu) - 12 chyb, D1 (proč (se konvice a pánve vyrábějí z mědi) 12 chyb, E7 (změny dechu a pulsu po závodě) - 11 chyb, G8 (jak plove ledovec) - 11 chyb, D4 (která vrstva Země je nejteplejší) - 9 chyb a G9 (duha) - 8 chyb.

Oproti oblasti "bezpečné znalosti" typické pro široký průměr souboru tu vidíme výrazně horší výsledky ve 3 položkách: E5 (co je uvnitř mýdlových bublin), D4 (která vrstva Země je nejteplejší) a G9 (která kombinace může způsobit duhu). Selhání v těchto položkách (zejména pak v E5?) jako by s vysokou pravděpodobností vyznačovalo příslušnost k nejhorší skupině.

Podobně skupinu charakterizují položky, v níž sice neselhává její většina, nýbrž jen "velká část" dětí, zato však chyby v nich představují většinu těch, které se vůbec v dané položce vyskytly - s nadsázkou: jsou to "chyby, které se mohou stát jen jim". Tak v této skupině najdeme všech 6 z 10 chybných řešení položky A10 (kde lze nalézt zkameněliny dinosaurů), 6 z 10 chyb v G6 (kterou částí přijímá rostlina nejvíce vody), 5 ze 7 chyb v E6 (které vesmírné těleso je nejteplejší) a všechny 3 chyby v G5 (kam po nadechnutí postupuje vzduch).

Velká část skupiny dělá chyby ještě v dalších položkách patřících k "bezpečným znalostem průměru": D3 (kteří z živočichů nesnášejí vejce) - 7 chyb, A9 (co se děje v těle s nadbytečnou potravou) - 7 chyb, D2 (kterými zuby lidé rozmělňují potravu) - 6 chyb.

Oblast **bezpečné znalosti** se tak u této skupiny zužuje na **nanejvýš 4 přírodovědné položky** testu oproti 12 položkám u "širokého průměru".

Přes svoji nepočetnost dělá skupina celkem 140 chyb v přírodovědných položkách a dosahuje tak průměrné úspěšnosti 50,9%.

Z uvedeného přehledu výsledků přírodovědné části je patrné, že nelze nijak jednoznačně a jednoduše charakterizovat podstatné obsahové parametry oblasti "bezpečných znalostí" našich čtvrťáků. Spíše se zdá, že je ji možno označit parametrem operačním jako různorodý soubor "jednoduchých informací". Také tři položky řazené autory testu mezi "složitější informace" - E7 (změny dechu a pulsu po závodě), G7 (stín stromu v průběhu dne) a G9 (která kombinace způsobuje duhu) mají pro děti nejspíše povahu právě jen "informací": jsou sice "složitější", protože jejich struktura má podobu "když x, tak y", uvádí do souvislosti více skutečností. Ale je to právě jen "informace", nikoli úvaha či dedukce. Podle našich zkušeností je např. správné řešení položky G7 (stín stromu) důsledkem znalosti poučky "v poledne jsou stíny nejkratší", nanejvýš pak analogie "poledne" jako středu mezi "ráno" (=východ slunce) a "večer" (=západ). Určitě však není dedukcí z obecného konceptu vztahu zdroje světla a stínu vrhaného tělesem, přičemž zdroj světla zde opisuje určitou, obecně známou dráhu. Důkazem je pro nás např. to, že v matematické úloze K7 (délka obdélníka), která vyžaduje úvahu s mnohem jednodušší strukturou, většina dětí (82 ze 101) selhává.

Výsledky matematické části testu

Můžeme z řečeného usoudit, že ovládnutí tohoto "souboru jednoduchých či - spíše výjimečně - složitějších informací", připomínající často napadané školní biflování a pouhé reprodukování znalostí, nemá nic společného s matematikou, která je tradičně spojována s nutností pochopit, rozumět, v níž se s memorováním znalostí nevystačí a jež ve výzkumech vykazuje ze všech školních předmětů nejtěsnější vazby s inteligencí?

Většinu naší analýzy jsme soustředili právě na výsledky matematické části testu a na rozdíly mezi 5 výše zmíněnými skupinami vyčleněnými podle jejích výsledků. Porovnáme-li obsazení těchto 5 skupin se skupinami podle přírodovědných znalostí, dostáváme následující kontingence:

Math \ Science	I	II	III	IV	Celkem
A	**7**	**11**	**5**	**-**	**23**
B	**6**	**15**	**2**	**-**	**23**
C	**2**	**6**	**6**	**2**	**16**
D	**-**	**8**	**9**	**2**	**19**
E	**-**	**4**	**5**	**11**	**20**
Celkem	**15**	**44**	**27**	**15**	**101**

Z rozložení četností vidíme na jedné straně zřetelnou souvislost: děti s lepšími výsledky v Math patřily častěji k těm s lepšími znalostmi v přírodovědné části. Nejvyhraněnější formulace by mohla znít, že mezi nejlepší matematiky se nedostal nikdo, kdo nedosáhl v přírodovědné části alespoň 13 bodů (z 19).

Na druhé straně průměrné a nadprůměrné přírodovědné znalosti nijak jednoznačně nevypovídaly o úspěchu v matematické části testu: 9 dětí ze "širokého průměru" ve Science (II+III) patří ke 20 nejhorším v Math, naopak 16 jich patří ke skupině nejlepších.

V distribuci hrubých skórů ovšem nacházíme v našem souboru izolovanou skupinu 12 dětí s nejnižšími výkony - nižšími než 32 bodů celkového skóru. Čím je tato skupina charakterizována? Jednak tím, že vesměs patří ke skupině nejhorších dětí v matematické části testu. V ní ovšem - až na jedinou výjimku netvoří izolovanou skupinu. Tou se tyto děti stávají tím, že k nízkému výkonu v Math přidávají nejnižší výkony také ve Science: 11 z 15 nejnižších výkonů ve Science (≤12) nacházíme v této skupině. Ve zbývajícím případě je mírně podprůměrný výkon ve Science (14 bodů) spojen s extrémně špatným (druhým nejhorším) skórem Math (12 bodů). Z těchto 12 dětí patří 10 do Hnědé třídy, 1 do Modré a 1 do Oranžové.

Zbývající 4 případy nízkých výkonů ve Science (≤12) nejsou už mezi nejhoršími matematiky, 2 z nich se dokonce pojí s průměrným výkonem v Math. Při charakteru položek Science (12 z 19 "jednoduchá informace") by bylo v těchto případech možno uvažovat o jakési "nízké informační nasycenosti rodinného prostředí" (nechceme použít obligátní "malou podnětnost" pro přílišnou globálnost tohoto pojmu).

Dovolme si spekulaci: Mají snad přírodovědné znalosti povahu jakéhosi "conditio sine qua non" vůči úspěchu v Math? Cítíme, že bychom těžko nalezli přímou souvislost mezi obsahem přírodovědných položek a položkami matematickými a intuitivně hledáme něco obecnějšího, čeho by přírodovědné položky byly výrazem, a co by zároveň zprostředkovalo souvislost s matematikou.

Je možná lákavé použít "nadání" - "nadané děti shromažďují a uchovávají více informací"? Tak se tato souvislost také objevuje v inteligenčních testech - otázky zjišťující rozsah jakési "povšechné informovanosti" či "orientovanosti ve světě" se běžně považují za relevantní pro zjištění inteligence. Co je však podstatou oné větší informovanosti? Je to jakási "aktivita" oproti "pasivitě"? Proti tomu ovšem stojí obraz dětí, které jsou aktivní nevhodně či nepřiměřeně, u nichž je "aktivita" naopak parametrem nežádoucí povahy.

Domníváme se, že "informovanost" je jakási předběžná strukturace okolního světa, která se do značné míry děje prostřednictvím jazyka, ale i dalších označovacích systémů. "Jednoduchá informace" o tom, ve které vrstvě Země je nejtepleji, tak vyžaduje např. pojem Země jako tvaru - (země)koule, a to takového, který má vnitřek, přičemž venku, na povrchu může být jiná teplota (pro děti "teplo") než uvnitř. Taková "informace" podobnou strukturu (představové schéma) nejen předpokládá, ale také ji nutně reprodukuje - a nejen to, může také stát u jejího zrodu. Představme si např., kolik zvědavých a z dospělého hlediska nesmyslných otázek by mohlo generovat malé dítě předškolního věku, kdyby ho zaujalo tvrzení, že "jádro Země je nejteplejší", a co všechno bychom mu museli "vysvětlit", než by opustilo svou výchozí strukturaci, chápající "jádro" jako lískový oříšek, "zem" jako půdu na zahrádce či na poli, a "teplo" jako příjemný stav kontrastní proti tomu, když je mu zima - a spojený tak např. automaticky do nediferencovaných dvojic "zima-venku" a "teplo-doma".

Informovanost jako "předběžná strukturovanost" by byla konzistentní s fungováním znalostí jako nutné podmínky pro vytváření obecnějších konceptů, jejichž existence pak se chápe jako příznačný výraz inteligence, nadání.

Takové chápání by ovšem zdůvodňovalo oprávněnost toho, co škola dělá, když odhaluje dětem stále nové oblasti strukturace světa, byť tápe (ovšem stejně jako věda, která ji nejčastěji kritizuje) v tom, jak přesně tento extenzivní pohyb transformovat také v pohyb ke stále obecnějším konceptům a hlubším souvislostem, který tak zůstává vymezen vágně jako "nadání".

Je tedy nutně ve vysokém výkonu v matematické části testu obsaženo "nadání"? Pokusíme se zjistit, jak je výkon v Math strukturován a co je jeho jádrem, pokud vůbec existuje. Bude pak možno prostřednictvím tohoto jádra stopovat povahu matematického nadání? Nevíme.

Distribuce výsledků v našem souboru vedla k rozčlenění souboru na 5 skupin.[2] Pokud za chybnou odpověď budeme považovat takovou, v níž nezíská dítě ani bod (tzn. jeden bod v položce, v níž je možno dosáhnout dva body, nepovažujeme za chybu), pak lze těchto 5 skupin popsat jejich podílem na množství chyb, kterého se děti našeho souboru dopustily:

		Math (matematická část)		Science (přírodovědná část)	
Skupina	Počet dětí	Počet chyb	Prům. úspěšnost	Počet chyb	Prům. úspěšnost
Celkem	101	911	78,1%	388	79,8%
A (skór 42-44)	23	46	95,1%	50	88,6%
B (skór 38-41)	23	100	89,4%	50	88,6%
C (skór 34-37)	16	119	81,9%	54	82,2%
D (skór 27-33)	19	223	71,4%	87	75,9%
E (skór 11-25)	20	423	48,4%	146	61,3%

Dále popíšeme výsledky jednotlivých skupin podle výsledků v Math.

[2] Porovnávali jsme jej také s možným rozčleněním do 4 skupin (které by se přibližně kryly s kvartily). Při rozčlenění do 5 skupin však poněkud ostřeji vystoupily rozdíly mezi lepší a horší "polovinou" dětí (při členění na 5 skupin byl větší rozdíl relativního počtu chyb, jakési individuální chybovosti, mezi horní a dolní částí pořadí).

Skupina A (skór Math 42-44, 23 dětí)

Z matematických 41 položek testu jsou jen 3 takové, které - kdybychom drželi výše zvolené kritérium "6 dětí ze 7" (které tu znamená nejvýše tři chybující v položce) - jsou pro tuto skupinu mimo oblast "bezpečného zvládnutí". Dvě z nich nezvládá většina dětí - totéž u těchto položek platí i pro zbytek souboru: E4 (převod zlomku 7/10 na desetinné číslo) - 88 chyb; dále pak položka K7 (délka obdélníka z 20 cm drátu při šířce 4cm) - 82 chyb.

U **položky E4** ("Které z následujících čísel vyjadřuje $\frac{7}{10}$?") jsme přesvědčeni, že nezvládnutí je důsledkem toho, že vztah zlomků a desetinných čísel nebyl před administrací testu vůbec probírán. Ve třídě, kterou sledujeme v rámci longitudinálního výzkumu, začala být desetinná čísla probírána teprve ve druhém čtvrtletí páté třídy. Do té doby zná zřejmě většina dětí desetinná čísla jako konkrétní případy jednotek - nejčastěji korun a haléřů, metrů a centimetrů apod. Jde-li např. o metry, budou děti nejčastěji číst číslo za desetinnou čárkou jako centimetry. Půjde-li o výraz 5,7 m, bude nejspíše čten jako 5 metrů 7 centimetrů. Struktura desetinných čísel je sice pro některé děti už dostupná, ale za pomoci učitele. Navíc není nijak propojena se zlomky. Úvod do učiva o zlomcích se v naší třídě odehrál v závěru čtvrté třídy. Mohli jsme mj. sledovat, jak nesamozřejmé byly i pro nejlepší žáky vztahy mezi číslem ve jmenovateli a názvem zlomku. To však poměrně rychle dokázali zvládnout. Příznakově, jako uplatnění explicitně řečené poučky s případnou názornou demonstrací, dokázaly děti zvládnout porovnání velikosti zlomků se stejným jmenovatelem. Zřetelná tu byla počáteční tendence považovat za větší ten zlomek, jehož "rodové jméno" je odvozeno od většího čísla - tedy čím větší jmenovatel, tím větší zlomek. Byť na začátku páté třídy pak děti v naší třídě se zlomky i počítaly (sčítaly a odčítaly zlomky se stejným jmenovatelem, násobily i dělily), je tato znalost zvládnuta jako soubor receptuálních, kanonických pravidel, "jak se to dělá". Chápání zlomku jako poměru, který lze "rozšiřovat" a krátit, jako vztahu dvou čísel, jeho ekvivalence s "nevypočítaným dělením", ekvivalence operací násobení a dělení při převrácení hodnoty čísla - to vše zůstává dětem prozatím nedostupné. Zlomky jsou pro ně nejspíše zvláštní čísla, s nimiž umějí pár kouzel.

Převod zlomku se jmenovatelem "10" na desetinná čísla je ovšem nenáročnou rutinní operací, k níž stačí bezpečné čtení čísla ve tvaru zlomku propojit se čtením čísla v desetinném tvaru a bezpečný převod mluveného tvaru čísla na písemný a naopak. Je to samozřejmě vnoření těchto donedávna nesamozřejmých převodů do složitější operace a lze očekávat, že děti budou zpočátku dělat chyby, přestože budou umět bezpečně na jedné straně zapsat "sedum desetin" a přečíst "7/10"[3] a na druhé straně zapsat "žádná celá sedum desetin" a přečíst "0,7". Bude však stačit poměrně krátké procvičování, aby většina dětí úlohy typu položky E4 zvládla. Nezvládnutí této položky většinou souboru nevypovídá o ničem jiném, než že toto učivo nebylo do doby administrace testu v našich třídách probíráno. Svědčí pro to nepřímo i tyto dvě skutečnosti. Položka nijak nediferencuje mezi skupinami různě úspěšných dětí v matematickém testu (ve skupině D ji např. plní 5 dětí stejně jako ve skupině A). Autoři testu ji také řadí z hlediska operací vždy na elementární úroveň: považují ji jednak za "komunikaci" a zde ji řadí na úroveň "používání slovníku a symboliky" (následují ještě tři vyšší úrovně "komunikace"), jednak za "znalost" - a to "předvedení" (následují ještě dvě vyšší úrovně).[4]

[3] Kvůli snadnějšímu psaní přepisujeme často zlomky v tomto tvaru se šikmým lomítkem - děti ovšem používají výhradně tvar s vodorovnou zlomkovou čárou.

[4] V písemce před pololetím 5. třídy - po napsání tohoto textu - počítá naše Modrá třídy mj. tyto 4 příklady: *"Převeď na desetinná čísla: 4/100 = ; 83/10 = . Převeď na zlomky: 0,25 = ; 4,058 = ."* Z 24 dětí jich 17 řeší všechny převody správně, 4 dělají drobnou chybu: 4,058 = $\frac{4058}{1000}$ - nikoli 4 $\frac{58}{1000}$, jak mělo být. Jen u 2 dětí nacházíme více něž 1 chybu, u 1 z nich jde zatím zřejmě o naprosté neporozumění.

Naopak za významné považujeme neřešení **položky K7** ("Z cínového drátu o délce 20 cm je vytvarován obdélník. Jaká je délka tohoto obdélníku, je-li jeho šířka 4 cm?"). K jejímu zvládnutí mají děti ve čtvrté třídě k dispozici dvě cesty. Jednak je to cesta zprostředkovaná názornou představou. Obdélník jako tvar děti bezpečně rozpoznávají už od první třídy, během třetí a čtvrté třídy opakovaně diferencují jako charakteristické znaky obdélníka mj. počet stran i shodnost vždy dvou protilehlých stran. Odhadujeme, že touto cestou by děti bezpečně zvládly úlohu na konstrukci délky obvodu, kdyby byly zadány dvě strany obdélníka. V čem je "opačná úloha" odlišná? Konstrukce obdélníka stejně jako pomyslná konstrukce jeho obvodu z číselných údajů má sukcesivní charakter, obvod je strukturován sukcesivně. K tomu postačuje to, co označujeme jako příznakové chápání pojmu. K opačnému postupu je však třeba, aby určitá délka jako celek byla zároveň vzata již strukturovaně. Délka i její struktura tu musí být vzaty simultánně, struktura se nekonstruuje posloupnými kroky, ale musí být vzata už jako východisko dekonstrukce délky. Tuto simultánní strukturu dvou dvojic shodných stran však řada dětí redukuje. Projevuje se to v řešení d) a c) položky K7.

Řešení "d) 16 centimetrů" představuje přitom větší redukci, odpovídající méně diferencovanému konceptu obvodu. "Délka" je tu vzata jako komplement "šířky", opomenuta je dvojitost jedné i druhé. Je příznačné, že toto řešení, které se celkem vyskytuje 29x, je výjimečné ve skupinách A (1x), B (3x), poněkud častější v dalších skupinách: C - 4x, ale ve skupině D (11x) už tvoří zhruba polovinu všech odpovědí (a většinu chyb). Je naopak překvapivé, že se vyskytuje jen jedinkrát ve skupině E (ve prospěch řešení "c").

Řešení "c) 12 centimetrů" představuje nižší redukci: je respektována dvojitost toho údaje, který je zadán - šířky. Délka pak je už nestrukturovaným doplňkem dvojité šířky.

Toto řešení je ještě výjimečné ve skupině A (2x), avšak ve skupině B je nejčastější (9x - z 19 chyb), ale podobně pak i ve skupině E (10x ze 17 chyb).

Problémem při analýze je, že nemáme žádnou kontrolu nad tím, nakolik v řešení interferuje druhá cesta. Druhou cestou je použití vzorce pro obvod, který má buď tvar o=2(a+b) nebo o= 2a+2b. Tato cesta se zdá příznačná pro skupinu A: většina jejích chyb (10 ze 13) spočívá v řešení "a) 5 centimetrů", které odpovídá záměně vzorce pro obvod za jednodušší strukturu vzorce pro obsah. Takové použití vzorce je možné nejspíše tehdy, není-li tu automatická, samozřejmá, nepříznaková korespondence algebraického výrazu se strukturou názorné představy. Spolehnutí na zprostředkování řešení vzorcem, které se zdá být řešením a) implikováno, postupně ubývá v dalších skupinách: B - 7x, C - 4x, D - 2x, avšak E - 6x.

Systematičnost obrazu tu narušují řešení skupiny E. Nelze tu vyloučit, ale ani potvrdit, že totéž řešení může být "motivováno" různě. Nemáme teď na mysli náhodné volby, "střílení od boku". Jde nám o rozpoznání nenáhodných tendencí, o logiku chyb. Je logika voleb skupiny E odlišná od ostatních? Je pro ně např. volba a) spíše intuitivním doplněním triády 20-4-(5), kterou z násobilky bezpečně znají, aniž by vůbec byly ve hře vzorce pro obvod a obsah, zatímco pro děti ze skupiny A jde o záměnu vzorců? To zde nejsme schopni zjistit.

Chceme zde však uvést příklad **položky Science E9**, v níž se podle našeho názoru projevuje odlišná logika téhož řešení - tentokrát správného. Položku řeší správně pouze 32 dětí souboru: ze skupiny A - 5 dětí, B - 9 dětí, C - 5 dětí, D - 6 dětí a E - 7 dětí! Na první pohled tato nejtěžší položka přírodovědné části testu vůbec nerozlišuje mezi skupinami děti různě úspěšných v matematice. To by samo o sobě nic neznamenalo - mohlo by to prostě svědčit o tom, že v přírodovědné části některé položky nemají s matematikou nic společného. Ale pohled na distribuci chyb nás vede k přesvědčení, že právě tato položka má s úspěšností v matematice společného nejvíc. Ve skupině A totiž nacházíme u 13 ze 16 chyb řešení "a) v roce 1995", které aplikuje matematickou pravidelnost násobení sugerovanou zadáním položky: "Břehy řeky byly

---

Přitom v testu položku E4 řešily ze třídy 3 děti, z toho 2 náležející podle výsledku Math do skupiny D.

pětkrát během posledních deseti let zaplaveny. Poslední záplava byla v roce 1993. Kdy budou břehy zaplaveny příště?" Také ve skupině B představuje řešení "a" 11 ze 14 chyb, avšak ve skupině C už jen 4 z 11, ve skupině D 6 ze 13 a ve skupině E 1 ze 13 chyb. Postupně přibývá chybných řešení "b" a "d", v nichž zřejmě žádná matematická pravidelnost obsažena není.

Pokud tedy můžeme předpokládat jistou homogennost vyčleněných skupin (a s tímto předpokladem pracujeme vlastně neustále, jinak bychom museli rezignovat na hledání nějakých pravidelností ve výkonech dětí vůbec), pak se zdá, že správná řešení položky ("c - někdy během několika příštích let, ale nevíme přesně kdy") ve skupině A a B se často vymezují oproti představě matematické pravidelnosti, jsou jejím překonáním, zatímco ve skupině E není tato pravidelnost vůbec ve hře a správná řešení jsou volbou jakési nediferencované neurčitosti. Tato hypotéza by pak dovolovala formulovat tři vývojové úrovně řešení položky E9: nediferencovaná neurčitost (nepravidelnost - resp. absence představy pravidelnosti, nestrukturovanost) - diferencovaná určitost (pravidelnost - jakési mechanické přecenění platnosti objevených možností pravidelné strukturace) - diferencovaná neurčitost (nikoli opuštění představy pravidelnosti, ale rozpoznání omezení její platnosti). Jsme v pokušení uvažovat o tom, že tato dialektická figura vývoje poznání má obecnější platnost.

Vrátíme se k popisu skupiny A. Zbylou položkou, kterou skupiny nezvládá bezpečně, je **položka G4** (" představuje počet časopisů, které Lenka přečte každý týden. Který z následujících zápisů představuje celkový počet časopisů, který Lenka přečte za 6 týdnů?") se 4 chybami.

Tato položka, která vyžaduje identifikovat korespondenci slovního zadání s matematickou operací, je komplikována nutností substituovat v "příkladu" za nevyjádřený počet obecný symbol ( ). Podle našich zkušeností by bez této nutnosti zdaleka takový počet dětí neudělal chybu, která zde vesměs spočívá v záměně operace násobení za sčítání (řešení a, c) nebo v konfuzi obou operací (d). Zadání položky by pak mělo ještě mnohem jednodušší strukturu (nejbanálnější "slovní úloha na násobení") než např. položka K9 a byla by nejspíše snadno dostupná i dětem ze skupiny E. Znamená to, že sama substituce komplikuje úlohu tak, že korespondenci slovního zadání s operací násobení neidentifikuje také 7 ze 46 dětí skupin A a B (9 ze skupiny C, 7 z D a 11 z E).

V dalších 38 matematických položkách dělá skupina A dohromady pouze 11 chyb. To představuje průměrnou úspěšnost 98,7%.

V přírodovědných položkách dosahuje skupina A téže úspěšnosti jako skupina B. Necháme-li stranou výsledky skupiny E, která vykazuje i v přírodovědných položkách výrazně nižší úspěšnost oproti ostatním skupinám, pak snad jedinou položkou, která odlišuje skupiny A a B výrazněji od C i D je položka E5, v níž obě úspěšnější skupiny dělají jen jedinou chybu, zatímco ve skupině C vidíme 3 a ve skupině D už 7 chyb, ve skupině E pak 13. Chybující se přitom domnívají (na otázku "Když děláš mýdlové bubliny, co je v jejich vnitřku?"), že uvnitř mýdlových bublin buď není nic ("d" - 7x) nebo je tam mýdlo ("b" - 15x). Odpověď "mýdlo" přitom výrazně převažuje u skupiny E (10 chyb ze 13), u ostatních jsou obě varianty v rovnováze.

Vzhledem k distribuci chyb v jednotlivých položkách se zdá, že snad vyjma zmíněných rozdílů v položce E9 (záplavy) nenacházíme v testu žádné argumenty pro domněnku, že děti úspěšné v Math mají systematicky lepší některé přírodovědné znalosti.

Chceme dále ukázat, byť jen velmi rámcově, pozice dětí jednotlivých skupin z dalších hledisek rozumového vývoje, k nimž máme k dispozici údaje. Využijeme k tomu také výsledků inteligenčního testu Stanford-Binet (4. revize), který jsme administrovali u celého souboru, bohužel však ve 3. třídě. Mezi výkony v něm a výkony v testu TIMSS je tedy časový odstup 14-

16 měsíců. Z poznatků v naší třídě, kde jsme test administrovali 3 roky po sobě (ve 2., 3. i 4. třídě), se však zdá, že pozice jednotlivých dětí vůči ostatním se z roku na rok příliš nemění, takže se snad dá s jistou opatrností předpokládat, že výsledky testu S-B ze třetí třídy odrážejí relativně stabilní pozice jednotlivých dětí v souboru.

Rámcové výsledky jednotlivých skupin pak popisuje tabulka:

\S-B TIMSS\	Celk. skór průměr	Stand. dev.	Minimální skór	Maximální skór	Počet dětí
A	**134,1**	**7,8**	**119**	**150**	**22**
B	**126,8**	**10,2**	**105**	**145**	**21**
C	**118,2**	**11,0**	**104**	**139**	**13**
D	**116,0**	**12,0**	**79 (100)**	**136**	**19**
E	**105,8**	**9,3**	**90**	**121**	**17**
Celkem	**121,2**	**14,1**	**79**	**150**	**92**

Opět tu máme obraz, který na jedné straně ukazuje jasnou statistickou tendenci, na straně druhé však ponechává souvislostem výsledkům velkou míru mnohoznačnosti. Setrváme-li zde u popisu skupiny A, pak zjišťujeme, že je z hlediska výkonů v S-B nejhomogennější. Přesto však v ní najdeme děti s překvapivě nízkým výkonem. Konkrétně jde o dva relativně nízké výkony - zejména onen nejnižší 119, dále pak 123. Obě tyto dívky z Bílé třídy dosahují skóru v Math 42. V Testu čtenářské gramotnosti, který zmíníme dále, nevykazují žádné nápadnosti, dosahují vesměs vysokých výkonů.

O Testu čtenářské gramotnosti, který byl u výzkumného souboru administrován jeden až dva měsíce před testem TIMSS, tedy také v průběhu posledního čtvrtletí 4. třídy, se podrobně píše na jiných místech této výzkumné zprávy (viz stati Kučery a Škaloudové). Zde jen rámcově využíváme jeho výsledků k popisu našich skupin a srovnáváme tak - byť jen v hrubých obrysech - výkony dětí v obou testech.

	Celkový skór				Vyprávění				Výklad				Dokument				
	Prům.	SD	Min	Max	Prům.	SD	Min	Max	Prům.	SD	Min	Max	Prům.	SD	Min	Max	N
A	**62,0**	**2,6**	**56**	**66**	**20,8**	**1,3**	**18**	**22**	**19,5**	**1,6**	**16**	**21**	**21,8**	**1,0**	**20**	**23**	**20**
B	**58,2**	**4,7**	**47**	**64**	**20,0**	**2,5**	**12**	**22**	**17,8**	**2,5**	**12**	**21**	**20,4**	**1,4**	**17**	**22**	**21**
C	**56,3**	**5,5**	**43**	**63**	**19,1**	**2,1**	**14**	**22**	**17,0**	**2,6**	**11**	**20**	**20,1**	**1,8**	**17**	**23**	**15**
D	**50,3**	**7,6**	**38**	**60**	**17,1**	**3,6**	**8**	**21**	**15,1**	**3,2**	**8**	**19**	**18,2**	**2,6**	**12**	**21**	**17**
E	**44,2**	**9,3**	**26**	**60**	**13,3**	**1,8**	**4**	**21**	**13,3**	**3,4**	**8**	**20**	**17,7**	**2,4**	**12**	**21**	**20**
Celek	**54,3**	**9,1**	**26**	**66**	**18,1**	**4,2**	**4**	**22**	**16,5**	**3,5**	**8**	**21**	**19,7**	**2,5**	**12**	**23**	**93**

Skupina A je jak v celkovém skóru tak v dílčích oblastech charakterizována největší homogenností výkonů. (Jsme si ovšem přitom vědomi, že směrodatná odchylka není vzhledem k nízkému stropu skórů a k charakteru distribuce výkonů příliš vhodným statistickým indexem - používáme ji spíše provizorně.) Tato homogennost je ovšem do značné míry efektem testu, v němž distribuce výkonů je výrazně šikmá, s průměry poměrně blízko maximálním skórům.

Přesto snad můžeme konstatovat následující:

Skupina A se odlišuje homogenností výkonů už od následující skupiny B. Přitom co všechny skupiny navzájem odlišuje, nejsou ani tak (a někde vůbec) maximální výkony, ale výkony minimální. Z porovnání průměrných skórů zjišťujeme, že relativně (vztaženo k velikosti směrodatné odchylky v souboru) největší náskok před ostatními má skupina A v Dokumentu (rozdíl průměrů 21,8-19,7=2,2 vztažený k SD=2,5) dále ve Výkladu (3:3,5) a nejmenší ve Vyprávění (2,7:4,2).

Zdá se, že ve Vyprávění jsou si skupiny A, B a C poměrně blízké a odlišují se mnohem více od dvou nejhorších skupin, zejména pak od skupiny E. Přesto ovšem pomyslnou "vstupenkou" do skupiny A jako by byl minimální skór 18, zatímco u zbylých dvou skupin stačí 12-14.

Jinak je tomu ve Výkladu: Tam skupiny B a C jako by tvořily jakýsi lepší průměr (s blízkými hodnotami také u minimálních a maximálních výkonů), od nějž se skupina A poměrně výrazně odlišuje směrem nahoru a skupiny D a E v rovnoměrných odstupech směrem dolů.

Podobně je tomu v Dokumentu - s tím rozdílem, že tady není přílišný rozdíl mezi skupinou D a E, které tu tvoří podprůměr jakoby společně.

Pokud bychom opět přijali jako hypotetické vysvětlení souvislostí vysvětlení typu "conditio sine qua non", že tedy maximální výkony v Math jsou spojeny s jistou nezbytnou úrovní čtenářské gramotnosti, jak ji zjišťuje test, a to ve všech třech oblastech, bylo by zajímavé analyzovat, zda Test čtenářské gramotnosti obsahuje některé kriteriální položky, které vymezují ono "sine qua non" a umožňují ho postihnout kvalitativně, jako popis konkrétní úrovně jazykové kompetence. V této naší zprávě už se k tomu bohužel nedostaneme.

Skupina B (skór Math 38-41, 23 dětí)

Z 41 položek Math je pro skupinu **mimo oblast bezpečné znalosti** (více než tři chybující) **8 položek**. Jde pochopitelně o položky E4 (převod 7/10 na desetinné číslo - 22 chyb) a K7 ((délka obdélníka z 20 cm drátu při šířce 4cm - 19 chyb). Podobně jako ve skupině jde o jediné dvě položky, které tu nezvládá většina dětí.

Velká část dětí pak chybuje v těchto položkách:

T2 : "Jaké nejmenší přirozené číslo můžeš sestavit z číslic 4, 3, 9 a 1? Každou číslici použij pouze jednou."

Skupina dělá 8 chyb. Počet chyb je tu relativně obdobný jako v další skupině - C (5 chyb ze 16 dětí). Navíc logiku, kterou se tu chyby vyznačují, najdeme zčásti i ve všech dalších skupinách. O jakou logiku jde?

Ve většině případů objevujících se ve skupinách A, B, C i D jako by šlo o nepochopení zadání - jako by byl posunut význam toho, co měl autor testu na mysli. "Nejrafinovanější" chyba přitom spočívá v řešení "13". Přísně vzato bylo řečeno, že každou číslici lze použít pouze jednou. Chyba tu spočívá jen v chápání "pouze" jako "nejvýše" - a mohlo by být sporné, zda jde o chybu řešení či zadání, které by bývalo muselo znít "právě jednou", aby zamezilo nejednoznačnosti. Řešení "13" se ovšem objevuje poměrně málo: 1x ve skupině B a 2x ve skupině D.

Částečně podobnou chybou je řešení "4", které k uvedené nejednoznačnosti přibírá ještě posun chápání významu - "sestavit" jako "sečíst" (podobně nejednoznačné je pro děti i slovo "složit"): sčítá tedy ze dvou nejmenší "číslic"="čísel". Je z toho patrné, že tu implicitně chybí také přesná diferenciace "číslice" vs. "číslo", resp. že užití výrazu "číslice" nijak přesně nediferencuje okruh operací (syntagmat), které mu přísluší, od operací příslušících výrazu "číslo". Toto řešení se vyskytlo 1x ve skupině A a 2x ve skupině B.

Nejčastější chyby představuje řešení "17" (celkem 8x: 2x ve skupině A a B, 3x ve skupině C, pak už jen 1x ve skupině E) a "1": celkem 11x - 2x ve skupině B a C, 1x v D, 6x v E. Jejich logika je jasná.

Řešení 17 prostě sčítá (=sestavuje=skládá) zadané "číslice" jako čísla, každou bere jednou. Stranou ponechává část zadání, kde se mluví o "nejmenším čísle, které lze", jež implikuje více možností sestavení. V logice tohoto řešení však žádná jiná možnost není. (Kdyby do sémantiky "sestavit" zahrnovali i odčítání, dostali by se k menšímu číslu, lépe vyhovujícímu právě zadání "nejmenší". To zjevně nebylo ve hře.)

Řešení "1" pak respektuje požadavek na "nejmenší přirozené číslo", ale nechává stranou to, že číslo se má sestavit. Jakoby si ono "lze" děti vyložily ve smyslu jakési libovolnosti, zda ho vezmou či nevezmou v úvahu. Ale s podobnou redukcí zadání na takové, které je jim dostupné, srozumitelné, se setkáváme u dětí i tehdy, když zadání podobné výrazy neobsahuje. Možná by děti k onomu výrazu odkázaly dodatečně, kdyby byly nuceny obhajovat své řešení.

Těmito čtyřmi typy řešení se vyčerpávají chybná řešení skupiny B (jednou odpověď chybí). Ve skupině A a B tak vidíme jen řešení, která v subjektivně posunuté logice zadání jsou správná.

V dalších skupinách pak postupně přibývají chyby, při nichž subjektivně přijatá logika řešení není uplatněna důsledně. Máme tím na mysli např. řešení "3", které je nejspíše subjektivně výběrem nejmenšího čísla, nebo řešení "7", které je zřejmě subjektivně součtem dvou nejmenších čísel.

Ojediněle se tu objevují řešení, která zadání nijak významově neposouvají, ale při sestavování čísla nepostupují důsledně, neřadí od nejmenší k největší všechny čtyři číslice - "1394", "349". Jiné děti číslice správně řadí, ale nesestavují z nich číslo: "1, 3, 4, 9". Některé děti pak sestavují číslo prostým opsáním pořadí číslic ze zadání: "4391".

Snad by bylo možno hledat společný rys "horších chybných řešení" ve stále větší sémantické redukci či posunu subjektivní logiky oproti zadání. Není ovšem jasné, zda tuto případnou tendenci interpretovat spíše jako pokusy "udělat aspoň něco, když tomu úplně nerozumím" nebo jako subjektivní přizpůsobování, jako snahu "chápat to tak, jak mi to vyhovuje".

Další položkou, v níž ze skupiny B chybuje velká část dětí, je **D9**: "Na kterém obrázku jsou tři z každé čtveřice čtverců šedé?".

Distribuce četnosti chyb je v této položce velmi podobná předchozí T2 s tím rozdílem, že děti ze skupiny A tu nedělají žádnou chybu: B - 7 chyb, C - 5 chyb, D - 9 chyb, E - 18 chyb. V chybných řešeních se "a" objevuje celkem 12x, "b" 6x, "d" 12x (ostatní chybná řešení zaškrtávají více možností), přičemž mezi skupinami tu nejsou patrné rozdíly. Otázku vzbuzuje skutečnost, že většina chybných řešení (vyjma "b"!) nerespektuje výraz "čtveřice". Neznají děti jeho význam? Nebo vztahují výraz "čtveřice" k počtu nabízených variant? Pak by četly zadání jako "na kterém ze čtyř (čtveřice) obrázků jsou tři čtverce šedé?" Tomu by odpovídalo poměrně časté kombinované řešení "a, d" - 5x.

Kromě nepřesného chápání jazykových výrazů však by taková interpretace zadání obcházela jeho podstatnou úvodní část, vzor, k němuž mají vytvořit analogii: "Na obrázku jsou dva z každé trojice čtverců šedé".

Zajímavé je porovnat tuto položku s položkou **A1** ("Na kterém obrázku je polovina teček černých?") V této položce chybují prakticky jen děti ze skupiny E (10 chyb, jinak už jen 1 chyba ve skupině D). V čem je tato položka snazší? Vždyť dokonce výraz "polovina" neurčuje ani přesný počet teček, ani poměr jako vztah dvou konkrétních počtů, jako je tomu v položce D9? Rozdíl v úspěšnosti v obou položkách podle nás dokazuje, že "polovina" či "polovina" není pro děti primárně jedním z případů poměru, ale případem zcela zvláštním, předcházejícím jakékoli chápání poměru a zlomku: jde pro ně o shodnost dvou částí celkového počtu, o stejnost dvou počtů, vyskytující se už od první třídy také v podobě oblíbených lehkých příkladů se dvěma shodnými sčítanci. Popsali jsme jinde, jak také násobení dvěma, jež stojí ve 2. třídě na počátku násobilky, není v tu chvíli pro děti násobením, ale jen jinou podobou klasické triadické formy příkladu na sčítání.[5]

[5] Rendl, M.: Násobení ve 2. třídě. In: Pražská skupina školní etnografie: 2. třída. (Příloha závěrečné zprávy o řešení grantového projektu GA ČR.) Praha 1997.

Někde na hranici naší zóny "bezpečné znalosti" jsou pro tuto skupinu položky U3b (5 chyb), U3a, K4 a K6 (ve všech třech 4 chyby). Domníváme se ovšem, že položky U3b a U3a mají oproti dvěma ostatním jiný status. Pokusíme se dále ukázat, že položky U3 - jak se domníváme - patří k jádru matematických znalostí ve čtvrté třídě.

Z distribuce chyb v jednotlivých skupinách je patrné, že **položka U3b** je jednou z nejostřeji rozlišujících v úspěšnosti jednotlivých skupin:

A: 1 chyba - úspěšnost 95,7%; B: 5 - 78,3%; C: 6 - 62,5%; D: 8 - 57,9%; E: 17 - 15%.

Její znění "Lída ujede 1 kilometr za 3 minuty. Za jak dlouho dojede do školy? (vzdálené 9 km)" vyžaduje identifikaci správného postupu matematické operace z paradigmatu "násobení/dělení" a správnou identifikaci jednotlivých členů. Právě to je podle našich zkušeností jádrem matematické kompetence ve 4. třídě. (Vrátíme se k tomu později, právě při pokusu analyzovat kvalitativně jeho obsah.)

Podobně je tomu ovšem u položky **U3a**, která vychází částečně ze stejného zadání - sestry "jedou na kole do školy vzdálené 9 km" - a rozvíjí je takto: "Marie ujede za 10 minut 3 kilometry. Za jak dlouho dojede do školy?". Jak je možné, že v obsahově podle nás tak podobné položce nacházíme tak odlišné výsledky? Celkem 22 chyb je navíc rozloženo dosti netypicky: bez chyby je tu skupina A a C, zatímco u skupin B a D chybují vždy 4 děti (kolem pětiny dětí).

Jinde (v poslední kapitole našeho textu) ukazujeme, že děti často postupují prostřednictvím zkusmého výpočtu, často takového, který představuje "triádu s dobrým tvarem". Shodou okolností (či spíše nešťastným zadáním, pokud jím chceme zjišťovat, nakolik děti skutečně dokáží řešit takovouto úlohu), dává tu správný číselný výsledek i zkusmé vynásobení 10 (minut) x 3 (kilometry). Jde sice o operaci "sémanticky prázdnou", ale sémantické obsazení výsledného čísla se pak řeší konzistentně se sémantikou otázky: otázce "za jak dlouho" odpovídají minuty. Z těchto důvodů vůbec nevíme, kolik z odpovědí na otázku U3a je skutečně, a kolik jen falešně správných. Vzhledem k tomu, že položka má reálně složitější strukturu než položka U3b (v té tu totiž vyjádřena přímo "jednotková hodnota vztažného členu" - totiž "**jeden** kilometr za 3 minuty", zatímco v U3a nikoli - "**tři** kilometry za 10 minut", je možno se domnívat, že počet chyb by byl vyšší.

K jádru matematických znalostí ve 4. třídě by dále patřily "složené úlohy", vyžadující identifikaci vícekrokového postupu, jehož jedna část má ovšem pro děti jednodušší strukturu sčítání/odčítání. Této struktuře se blíží např. výše analyzovaná položka K7, která je však spíše složitější. Naopak snadnější strukturu (protože neobsahuje paradigma násobení/dělení s problémem nejednoznačné korespondence jejích členů se slovním zadáním) složené úlohy představuje **položka K4**, jež je ovšem zase komplikována zadáním ve formě tabulky.

Je to možná tato komplikace, co vnáší obtížný moment do této úlohy, která ovšem nerozlišuje jednotlivé skupiny zdaleka tak ostře, takže ve skupinách B (4 chyby), C (4 chyby) a D (6 chyb) úspěšnost jejího řešení klesá jen pozvolna a teprve ve skupině E klesá pod polovinu (12 chyb). Ve hře jsou ovšem kromě porozumění tabulkové prezentaci další momenty, v nichž mohou děti dělat chybu: rutinní součet obou sloupců či dokonce v přiřazení zjištěného rozdílu vítězi (typicky řešení "c"?).

Při rozboru odpovědí zjišťujeme, že některé děti neprováděly součet sloupců písemně. Z 26 chybujících jde o 16 dětí. Jak tyto děti postupovaly? Dospělý počtář by mohl usoudit, že šly cestou sledování vývoje stavu a postupného kumulativního načítání výsledných součtů a rozdílů v jednotlivých řádcích. Pak se zdají stejně pravděpodobná všechna chybná řešení - a chyba není důsledkem nezvládnutí rutinního sčítání pod sebe, ale důsledkem nutnosti sledovat v každém okamžiku jednak posloupnost vývoje stavu, jednak výsledek v řádku a jeho vztah k dosavadnímu stavu (zda rozdíl přičíst - v případě, že kolo vyhrál hráč dosud vedoucí, nebo odečíst - v případě, že vedoucí hráč prohrál, a zda se tím vedoucí hráč mění). Tímto způsobem se úloha komplikuje i pro děti, které by ji prostřednictvím porovnání dvou rutinních součtů pod sebe bezpečně zvládly. Tento postup ovšem předpokládá v každém okamžiku jasný vhled do struktury tabulkových údajů. Přitom zaškrtnutí výsledku bez jakéhokoli písemného výpočtu se zdá typické pro skupinu E. Když pak vidíme, že nejčastěji se s absencí výpočtu pojí řešení "b - Petr vyhrál o 100 bodů", které odpovídá porovnání výsledků až ve 4. řádku (v jednom případě dokonce nacházíme vygumovaný zápis odčítání pod sebe "150-50|100"), napadají nás i jiné postupy, jak možná děti čtou tabulku. Co může znamenat, že se výsledek odvozuje pouze z posledního řádku tabulky? Jedna možnost je, že tabulka se čte jako příběh, jako text (s jeho strukturou řádků na stránce čtených zleva doprava), kde se líčí, jak to postupně vypadalo, a vyústění je na konci. Další možností je pochopení zadání takto: kde hráč získal největší počet bodů a o kolik přitom vyhrál?

O chybu v rutinních písemném počítání šlo v položce K4 prokazatelně pouze v 5 případech chyb (1x ve skupině B, 3x C a 1x E). K tomu ještě přistupují 2 případy, kdy po správných výpočtech následuje špatná odpověď. U zbylých tří chyb děti něco zapisovaly, ale není jasné co a k jakým výsledkům došly.

Z toho lze snad udělat dva opatrné závěry. Zdá se, že klíčovým momentem obtížnosti tu opravdu byla především tabulková prezentace dat, a to zejména pro nejslabší skupinu E. Odpovídalo by to tomu, že zvládnutí rutinních postupů sčítání pod sebe na konci čtvrté třídy necharakterizuje matematickou kompetenci - tak by tomu bylo podle našeho odhadu snad někdy v pololetí 3. třídy. Chyba v rutinním postupu může být stejně dobře výsledkem nepozornosti suverénního počtáře jako může - ale jen velmi nejednoznačně - naznačovat nezvládnutí decimální struktury víceciferného čísla. (Toto nezvládnutí lze na druhé straně velmi dobře překrýt dobrou pamětí pro receptuální postupy.)

Tento závěr potvrzuje **položka K2**. Jde v ní právě o sčítání pod sebe (6971+5921). V celém souboru dělá chybu jen 7 dětí s tímto rozložením ve skupinách: A - 1, B - 1, C - 2, D - 1, E - 2. Řešení "d" se nevyskytuje, řešení "a": 3x, "b": 4x. Řešení "a" "důsledně" nepřipočítává jedničku z předchozího sloupce, řešení "b" ji jednou nepřipočítá, podruhé ano.

Druhý závěr - nejen pro položku K4 - se týká gumování: Děti jako by často považovaly za nepatřičné, aby po jejich pomocných postupech zůstaly viditelné doklady. Banální interpretace, že je to důsledek tlaku učitelek na úpravu a hezké psaní v sešitech, se nám zdá příliš zjednodušená. S něčím podobným jsme se setkali i při řešení úloh v inteligenčním testu, kde speciálně pro pomocné výpočty děti dostaly papír a bylo zdůrazňováno, že si tam mohou psát či kreslit, co chtějí, že je to pro ně. Nelze např. vyloučit, že některé děti cítí, že tu jde o viditelnou stopu jejich vnitřních pochodů a považují je za intimní, cítí nepříjemně, když do nich někdo má možnost nahlížet.

Charakterističtější než předchozí položka K4 se pro matematické znalosti 4. třídy na první pohled zdá **položka K6**: "Kolik čtverečků bude na obrázku 6, jestliže bude řada obrázků pokračovat?" (na 3 obrázcích prezentovány 3 čtvercové sítě postupně se 3, 6 a 9 čtverečky).

Položka dává obraz jakoby tří úrovní úspěšnosti v souboru. Skupina A ji řeší s jedinou chybou, B a C se 4, resp. 3 chybami (82,6%, resp. 81,3%), skupiny D a E pak zhruba s 50% úspěšností (11, resp. 9 chyb). Kvalitativně jde ovšem převážně o stále tutéž chybu: řešení "a" se opakuje v celém souboru 20x a jeho relativní frekvence ve skupinách D a E jen mírně klesá. Pak ovšem obtížnost úlohy nespočívá ani tak v chápání nárůstu počtu čtverečků jako násobkové řady tří - a překvapilo by nás, kdyby tomu tak bylo. Otázkou pak je, zda tím podstatným je přerušení, skok v násobkovém rozvoji nebo spíše důslednost ve čtení zadání. Hypoteticky bychom mohli uvažovat o tom, zda děti s lepšími výsledky neporovnávají důsledněji postup řešení se zadáním, zda u nich nejsou častější návraty k textu, jimiž kontrolují svůj postup. Naše poznatky ovšem svědčí spíše o tom, že zpětná kontrola postupu prostřednictvím textu zadání není typická ani pro děti s nejlepšími výkony. Méně časté chyby by tu pak spíše svědčily pro strukturovanější, diferencovanější chápání textu zadání už při prvním čtení.

Ve zbylých 33 položkách Math dělá skupina B 27 chyb a dosahuje tak v nich průměrné úspěšnosti 96,4%.

Složení skupiny z hlediska výkonů v inteligenčním testu je méně homogenní než u skupiny A. Konkrétně tu nacházíme dva chlapce s velmi vysokým celkovým skórem (145 a 142, tedy přesahující průměr skupiny o víc než směrodatnou odchylku souboru) z Modré a Žluté třídy. Na druhé straně jsou tu tři nízké výkony: dívka z Bílé třídy (108) a chlapec a dívka z Oranžové třídy (105, resp. 107). Výkony zbylých 18 dětí se pohybují v poměrně úzkém rozpětí celkového skóru 122-136.

V Testu čtenářské gramotnosti dosahuje skupina výkonů velmi podobných skupině C. Nápadné jsou tu dva velmi nízké výkony - 47 v celkové skóru u chlapce ze Žluté třídy a dívky z Oranžové třídy (která dosáhla zároveň výše zmiňovaného nízkého skóru v inteligenčním testu - označme ji K.F.). Přitom ve struktuře těchto dvou nízkých celkových skórů nenacházíme žádnou podobnost - jednou je (v pořadí Vyprávění - Výklad - Dokument) 12-14-21 (u dívky K.F.), podruhé 14-16-17.

Skupina C (skór Math 34-37, 16 dětí)

Oblast **bezpečné znalosti** se u této skupiny zužuje (oproti skupině B) o dalších 11 položek a představuje ji tak už jen **22 položek**. Nepřibývají tu ani tak položky, které by nezvládla polovina či většina dětí - to platí jen v případě G4, kde však jako by šlo spíše o náhodný výkyv v celkové sestupné úspěšnosti jednotlivých skupin. V řadě položek tu však chybuje velká část (3-6) dětí.

O položce G4 (počet časopisů za 6 týdnů) se zmiňujeme výše. Distribuce chyb - A: 4, B: 3, C: 9, ale D: 7 a E: 11 - rozhodně nedává obraz nějaké kriteriální položky.

Kde všude vidíme u skupiny C onen mírný nárůst chyb a zároveň odlišnost vůči skupině B?

Jde o položky (od obecně nejobtížnějších k nejsnazším) G1, T4a, T4b, T3, K9, D8, E1, K8, (A3), (U3c), K1. (Položky A3 a U3c jsou pro skupinu C na hranici našeho kritéria bezpečné znalosti.)

G1: "Jeden centimetr na mapě představuje 8 km ve skutečnosti. Asi jak daleko jsou od sebe ve skutečnosti Kladno a Uhříněves?" (k zadání patří mapka):

Skupiny A a B dělají v této položce celkem 3 chyby (úspěšnost 93,5%), zde úspěšnost klesá - při 5 chybách - na 68,8% a pokles systematicky pokračuje i v dalších skupinách: D - 9 chyb (52,6%), E - 16 chyb (20%). Zdá se tak, že před sebou máme jednu z kriteriálních položek, indikujících s vysokou pravděpodobností úroveň matematických znalostí. V čem spočívá její obtížnost? Zdá se, že by tu mohl svou roli hrát i odhad prosté vzdálenosti dvou bodů na mapce. Porovnáme-li však výsledky jednotlivých dětí s položkou K5, v níž jde o odhad velikosti nakreslené tužky, najdeme jen 4 případy, kdy chyba v G1 je doprovázena chybou v K5 (1 ve skupině C, 1 v D a 2 v E). Nezdá se tedy, že by tu odhad reálné délky významněji intervenoval. Zdá se, že obsah položky vystihli autoři testu správně: "problémy na úměrnost". Děti musí prostou délku vzít ve vztahu k měřítku. I tady bychom asi při možnosti sledování jejich postupu našli rozdíly, které tu splývají: používají přitom zprostředkování aritmetickým výpočtem (odhad délky na mapě *8) nebo promítají měřítko rovnou na mapu a na silnici z Kladna do Uhříněvsi načítají "8-16-24-32 a kousek"?

Z rozboru chyb je patrné, že zatímco až do skupiny D (a:5x, b:10x, d:2x) je řešení "a" méně časté než ostatní (5 ze 17 chyb), ve skupině E převažuje (12 ze 16 chybných řešení). Je však řešení "a - 4km" nutně prostě přímým převodem odhadnutých centimetrů na kilometry - a je tedy zadání redukováno pouze na svou část? Nezdá se nám bohužel možné ani v tomto případě vyloučit interferenci měřítka, resp. čísla 8, v důsledku čehož může být výsledek "4" zprostředkován nějakým intuitivním zkusmým výpočtem. Není ani vyloučeno, že v nejasné struktuře výpočtu interferuje měřítko tak, že odhad délky na mapce, který by jako samostatný úkol nečinil problémy, je přizpůsobován, "zkreslován" tak, aby dával některou z "dobrých triád". Jedna z nejlepších žákyní naší třídy (ve skupině A) tak např. volí řešení poměrně časté "b - 16km". Může mít tento výsledek jinou strukturu než 2*8? A pokud ano, není odhad vzdálenosti "2 cm", když přitom měřítko je v rohu mapky znázorněno i graficky, přizpůsoben očekávání, že výsledek bude násobkem 8? Jednalo by se pak o podobné přecenění matematické pravidelnosti (v době, kdy se děti dosud nesetkaly s desetinnými čísly), jakou jsme našli i v přírodovědné položce o záplavách (E9 - viz výše). Přesto se zdá pravděpodobnější, že řešení "a" je častěji redukcí nerespektující vůbec zadání měřítka, zatímco v řešeních "b" a "d" je měřítko bránu v úvahu, ale struktura postupu je nejasně diferencovaná.

T4a: ve třídě 10 dívek a 20 chlapců - "připadá jedna dívka na dva chlapce"?

Ve skupinách A a B je jediná chyba (úspěšnost 97,8%), ve skupině C úspěšnost klesá na 81,3%, dramaticky ovšem klesá úspěšnost v dalších skupinách: D - 42,1% (11 chyb), E - 30% (14 chyb). Toto ostré rozlišení nastává v položce i přesto, že je typu "ano-ne" a je tu tedy vysoká pravděpodobnost náhodné správné odpovědi. (Svědčí zároveň spíše pro to, že děti náhodnou volbou řešení nepostupovaly.) Kdybychom za správné považovali jen dvoubodové odpovědi, tedy takové, kde děti dokáží svou odpověď také přijatelně vysvětlit, byl by pokles úspěšnosti ještě strmější: A: 95,7% (1 chyba) - B: 69,6% (7 chyb) - C: 37,5% (10 chyb) - D: 10,5% (17 chyb) - E: 0% (20 chyb).

Položka patří k těm, které postihují jádro matematické kompetence. Co je však jejím obsahem? Čistě matematická (početní) struktura zadání není to, co by samo o sobě způsobovalo dětem problémy (to by žádné z nich nemohlo být ve 4. třídě). Problémem se stává jednak její převedení na ekvivalentní poměr, který nepoužívá explicitně vyjádřené počty (jde přitom o poměr velmi jednoduchý, jehož struktura kopíruje strukturu desítek v původních počtech), jednak jeho jazykový popis, který je jedním z možných korespondujících jazykových vyjádření.

Podobný obraz uvidíme v **položce T4b**, vycházející ze stejného zadání a kladoucí problém, zda "$\frac{1}{2}$ všech dětí ve třídě jsou dívky". Úspěšnost, resp. distribuce chyb se tu liší od T4b jen málo: A: žádná chyba - B: 91,3% (2 chyby) - C: 75% (4 chyby) - D: 42,1% (11 chyb) - E: 35% (13 chyb). Zpřísníme-li kritérium úspěšnosti a uznáme pouze dvoubodovou odpověď s vysvětlením, jeví se položka výrazně obtížnější než T4a, a to zejména pro skupinu B: A: 87% (3 chyby) - B: 43,5% (13 chyb) - C: 25% (12 chyb) - D: 5,3% (18 chyb) - E: 0% (20 chyb).

V čem je ona větší obtížnost, která se potvrzuje i na úrovni republikového souboru (kde položky řešilo 819 dětí) byť celkově na mnohem nižší úrovni úspěšnosti - T4a: 24,6% oproti T4b: 17,8%? Domníváme se, že spočívá v nutnosti zvážit současně dva nabízející se (a interferující) vztahy počtů: počet dívek vůči počtu chlapců (který sugestivně nabízí právě onu zvažovanou "1/2") nebo vůči počtu všech dětí. Autoři přitom nechali děti připravit si stejné podmínky pro oba možné poměry při předběžné (a nebodované) úloze "kolik dětí je ve třídě", takže oba počty jsou ve chvíli řešení úlohy T4b k dispozici explicitně. Kdyby tomu tak nebylo, dá se předpokládat, že by se položka T4b stala svou strukturou ještě obtížnější, jakkoli je implicitní (přímo nezadaný) výpočet celkového počtu jednoduchý. Podobně by obtížnost úlohy narostla, možná až extrémně, kdyby zvažovaný poměr nebyl 1/2, nýbrž s jiným jmenovatelem, a tím spíše, kdyby jeden z členů poměru nebyl 1 (např. poměr 2 : 3).

Opět tu ovšem není ve hře pouze chápání matematické struktury samotné, nýbrž v korespondenci s jazykovým zadáním. Právě ta rozhoduje o tom, zda 1/2 je struktura dvou stejných částí v celkovém počtu (jako v položce A1, kde však jsou počty zadány názorně) nebo poměr dvou částí v celku, který tak se vlastně strukturován na třetiny. Interference těchto dvou strukturací patrně s růstem složitosti poměru na jedné straně a složitosti verbálního zadání na straně druhé můžeme očekávat i v dalším vývoji matematické kompetence.

T3: "... vrátil se zpět v 7^{00}. V kolik hodin vyšel, jestliže procházka trvala 1 hodinu a 30 minut?"

Můžeme říci, že v této položce se ve skupině C neodehrává žádný velký zlom, jde jen o mírný nárůst chyb: A je bez chyb - B: 87% (3 chyby) - C: 75% (4 chyby) - D: 68,4% (6 chyb). Odlišuje se až skupina E: 25% (16 chyb).

Chyba tu dvakrát spočívala v tom, že dotyční trvání procházky k údaji 7^{00} přičítali: 8,30.[6]

Jinak jde o následující chyby:

1. chyba "v hodině": "4,30", "půl páté" apod. (7x, častěji ve skupinách B, C a D - 4x); "6,30" (6x, pouze ve skupině E);

2. výsledek v "odpoledním čase": "17,30" (2x);

3. počítání v desítkové soustavě: "5 hodin 70 minut" - 1x, "4,5 h" - 1x.

4. kombinace předchozích chyb:

chyba v hodině v odpoledním čase: "15,30" (1x), chyba v hodině a počítání v desítkové soustavě: "6 hodin 70 minut" (1x).

Jedinkrát jsme zaznamenali odpověď prostřednictvím správného zobrazení časového údaje na obrázku klasického ciferníku (ve skupině D).

Skupinu E pak charakterizuje také jediný výsledek v celých hodinách ("Procházka trvala 5,00") a jediný případ, kdy výpočet a výsledek indikuje naprostou disparátnost slovního zadání a matematické operace: "30*7=210" (Jde zřejmě o "30 (minut)" * "7 (hodin)".)

(Zbylé chyby připadají na chybějící odpovědi - 3 z 5 ve skupině E.)

Domníváme se, že položka charakterizuje spíš okrajovou oblast matematické kompetence - zběhlost v pohybu v časových údajích, tedy i v nedesítkové soustavě. Většina této kompetence se patrně utváří spíše v každodenní zkušenosti než ve škole - tam se věnovala pozornost čtení časových údajů už mnohem dříve. Systematické převody časových jednotek se dosud neprobíraly. Je ovšem možné, že tu jedna poměrně podstatná souvislost je a projeví se později, při zacházení s desetinnými čísly a zlomky: totiž souvislost s tím, zda dítě chápe číselnou řadu jako kontinuum strukturované přirozenými čísly, které je dále členitelné i jinak, nebo jen jako jako u-si zajímavě, podle určitých (různě strukturovaných) pravidel uspořádanou sbírku čísel. To je ovšem v tuto chvíli z naší strany jen spekulativní hypotéza.

K9: "54 kuliček je rozděleno do 6 sáčků tak, že v každém sáčku je stejný počet kuliček. Kolik kuliček je ve 2 sáččích?"

Podporuje rozložení chyb naši domněnku, že právě slovní úlohy korespondující s postupem v paradigmatu násobení/dělení jsou tím podstatným, rozlišujícím míru matematické kompetence ve 4. třídě?: A a B: 95,7% (po 1 chybě) - C: 68,8% (5 chyb) - D: 68,4% (6 chyb) -E: 40% (12 chyb).

Toto rozložení jako by vyznačovalo 3 úrovně, v nichž jednak nadprůměr, jednak průměr splývají do velkých skupin. Nacházíme také rozdíly v kvalitě chyb. Řešení "a - 108 kuliček" se

[6] Jednou jde o chlapce z naší Modré třídy, ambiciózního, kerý se výrazně identifikuje s matematikou. Vysvětlení chyby může spočívat snad jen ve snaze být co nejrychlejší a v absenci jakéhokoli návratu k textu zadání. Jak je vidět z umístění ve skupině C, v testu nijak neuspěl, ačkoli patří v matematice jako školním předmětu k nejlepším, především jako počtář.

vyskytlo 6x, z toho 5x ve skupině E. Zdá se tu jednoznačné, že jde o redukci zadání, kdy 54 kuliček je vzato nedělené, jakoby v jednom sáčku. Řešení "e - 9 kuliček" (8x) je naproti tomu přibližně stejně časté ve všech skupinách. Také zde jde o redukci zadání, ale snáze ji lze přičíst spíše nepečlivému čtení otázky než nepochopení struktury zadání. (Ve skupině A dělá tuto chybu jeden chlapec z naší Modré třídy, u něhož nejsme na pochybách, že jde o chybu "z nep o-zornosti".) Zcela nejednoznačná je však logika řešení "d". Ačkoli na první pohled jde o sémanticky prázdné násobení "6 (sáčků) * 2 (sáčky)", domníváme se, že u mnoha dětí jde o něco jiného. Číslo 6 tu není vzato přímo ze zadání, ale je záměnou 6 a 9 v triádě 54-6-9, takže sémanticky pak nejde o sáčky, ale o kuličky, jimž je ale záměnou (v triádách dělení poměrně častou i tehdy, nejde-li o čísla tak podobná, jako je 6 a 9) přiřazen počet "6". Pak bychom rozuměli tomu, proč je (jinak sémanticky nesmyslné) řešení "d" stejně časté ve skupinách C, D i E (ve všech 2x), nejsme však schopni rozlišit logiku chyby v jednotlivých případech.

D8: odečíst 4,03-1,15 pod sebe.

Rozložení chyb má překvapivě rozlišující charakter: Skupina A bez chyby - B: 95,7% (1 chyba) - C: 75% (4 chyby) - D: 73,9% (5 chyb) - E: 55%. Skupiny C a D tu splývají. Bohužel není zcela zřejmé, resp. je dost nejednoznačné, o čem položka vypovídá. Autory nabídnutá řešení mají tuto logiku:

"a - 5,18" je součtem namísto rozdílem. Tuto chybu dělají jen 2 děti ze skupiny E.

"b - 4,45" - tady nejsme schopni logiku vysoudit. (Kdyby šlo o 3,45, mohlo by takové řešení vzniknout násobením 3 (poslední cifry horního čísla) *1,15.) Tuto chybu však nedělá nikdo! Je to další známka, že děti spíše nepostupovaly náhodnou volbou.

"c - 3,12". Chyba vznikne tehdy, když se ve sloupcích odčítá vždy menší číslo od většího. Je to klasická chyba z doby, kdy se probírá a není ještě zvládnuto počítání pod sebe - někdy ve 2. a 3. čtvrtletí 3. třídy. Tuto chybu dělá celkem 10 dětí - 5 ve skupině E, 3 ve skupině D, po 1 ve skupinách B a C. Jenže desetinná čárka sem vnáší nejasnost: nakolik narušuje tento neznámý prvek rutinní počítání, v němž by chybný postup, který předpokládá logika řešení, patřil ve čtvrté třídě ke skandálním chybám? Není pak číslo chápáno vlastně jako čísla dvě (dvě dvojice menšenec - menšitel) a neodčítá se pak v každé dvojici zvlášť menší od většího: 4-1, 15-03? Z 10 odpovědí "c" jich totiž 5 vzniká bez písemného počítání, jakýmsi intuitivním odhadem. Nejde tu právě o tohle? Na zmatenost desetinnou čárkou můžeme soudit také z toho, že dalších 6 dětí na odpověď rezignovalo (byť v jednom případě došel k výsledku 2,98 odpovídajícímu řešení "d").

"d - 2,98" vznikne, opomene-li se po odečtení "pět a kolik je třináct" a po zapsání "8" v prvním sloupci připočítat v následujícím sloupci "jednička". Naproti tomu řešení předpokládá správné připočítání v dalším přechodu z druhého sloupce do třetího. To snad má svou logiku - při zaznění "deset" je opomenutí jedničky patrně méně časté - logicky důslednější by však bylo řešení "3,98". Nedělaly by děti tuto chybu velmi často už proto, že právě tady narážejí na desetinnou čárku? (Ze 3 odpovědí "d" opravdu 2x vidíme v zápisu v původním výsledku "3".) [7]

Zmatenost toho, co položka ukazuje, je patrná v tom, jak ji klasifikují autoři testu: z hledi s-ka obsahu jde o "desetinná čísla", z hlediska operace pak o "rutinní postupy". Jenže ve 4. třídě české základní školy není žádné počítání s desetinnými čísly "rutinním postupem".

[7] Už po napsání txtu došla naše domněnka takovéhoto potvrzení: V už zmiňované písemce před pololetím 5. třídy prováděly děti v jedné slovní úloze výpočet 1000 - 609,70. Z 24 dětí jich přechod přes desetinnou čárku řeší správně 13 (některé z nich ovšem opravovaly původní výsledek 390,70). Další děti dělají chyby, které tu předpokládáme: 6 děti při přechodu přes desetinnou čárku nepřipočítává "jedničku" a docházejí tak k výsledku 391,30. 5 dětí pak čísla za desetinnou čárkou neodčítá, pouze je opisují (není jasné, zda subjektivně sčítají s nulou): 390,70.

Navíc se tu opět setkáváme s nedostatkem, jenž je v konstrukci položek testu dosti častý. Ve struktuře zadání položky je přítomno několik parametrů, ale ty jsou v nabídnutých variantách řešení variovány velmi nesystematicky. Někdy to vypadá, jako by autory vůbec nebyly rozlišeny, jindy se pak kombinují dost náhodně. Konkrétně pak v položce D8: Chci-li zkoumat, jak jsou zvládnuty rutinní postupy - jak by tomu nasvědčovaly varianty řešení, pak nemá smysl zavádět do položky desetinná čísla. Nový, neznámý element pak u některých dětí naruší i zcela zvládnuté operace - a zdaleka nemusí jít o nejhorší matematiky. Ti naopak často neznámý prvek ignorují, kdežto vyspělejší ho nějak interpretují a přisoudí mu např. nesprávný význam.

Domníváme se, že položka tak ve skutečnosti zkoumá nikoli zvládnutost rutinních postupů (v té bychom - vyjma několika výjimečně špatných počtářů, ale také případů nepozornosti i u počtářů dobrých - nenašli mezi skupinami výrazné rozdíly), nýbrž spíše to, nakolik děti vyvede z míry prezentace desetinného čísla. Uvedené rozdíly by pak mohly svědčit pro to, že u lepších matematiků jsou vypracovány koncepty, umožňující extrapolovat probírané rutinní postupy mimo obor čísel, v němž se děti ve škole dosud běžně pohybovaly - decimální soustavu přirozených čísel "do tisíce", případně "do miliónu". Uvažujeme o tom, zda řešení této položky nesouvisí s konceptem číselné řady jako kontinua, podobně jako jsme o tom uvažovali u položky T3. Ověření této hypotézy si vyžádá další analýzu (např. koincidence řešení obou položek u jednotlivých dětí). Znamenalo by pak její potvrzení identifikaci další "jaderné oblasti" matematické kompetence ve 4. třídě - oblasti, která předurčuje úspěšnost pozdějšího zvládnutí desetinných čísel a částečně také zlomků?

E1: "Marie má narozeniny ve čtvrtek 2. prosince. Na výlet jede přesně o 3 týdny později. Kolikátého pojede na výlet?" (prezentován též kalendář).

Položka má zcela netypické rozložení úspěšnosti, indikující jakoby jen dvě úrovně: A bez chyby - B: 91,3% (2 chyby) - C: 68,8% (5 chyb) - D: 68,4% (6 chyb) - E: 60% (8 chyb). Nejčastější chybou je přitom "a - 16. prosince" (12x - zhruba relativně stejně ve všech skupinách), dále pak "b - 21. prosince" - 7x (po 3 výskytech ve skupinách D a E).

Domníváme se, že k chybnému řešení "a" může dojít snad jen tam, kde děti nepostupují aritmetickým výpočtem. Ekvivalence "týden = 7 dní" je totiž podle našich zkušenosti zcela zažitá, někdy se dostává číslo 7 i neadekvátně do výpočtů ve slovních úlohách, v nichž nějak figurují "týdny". Další nepřímou podporou je naše zkušenost s úlohou ze subtestu "Absurdity" inteligenčního testu, kde na nesprávném obrázku kalendáře chyběla neděle ve 3. třídě jen 39% dětí (ze souboru 126 dětí) a v naší Modré třídě pak ve 4. třídě ještě 6 ze 22 dětí. Právě tady se však odehrál velký skok z předchozí úspěšnosti 35% ve 3. třídě na nynějších 73%. To je jen zdánlivě v rozporu s naší předchozí hypotézou o logice řešení "a": Předpokládáme, že při aritmetickém výpočtu dítě tuto chybu neudělá. To však neznamená ekvivalenci správných řešení a aritmetického postupu. Je-li orientace ve struktuře kalendáře jako tabulky právě v tomto období vývojově relevantním indikátorem, pak úspěšné řešení položky E1 může odpovídat právě zvládnutí této orientace a nikoli nutně zprostředkování řešení aritmetickým postupem.

Chybná řešení "a" by tak mohla znamenat špatnou orientaci v kalendáři jako tabulce. Je pak řešení "a - 16. prosince" výsledkem toho, že dítě napočítá 3 řádky jako 3 týdny, ale zahrnuje do nich už první řádek?

Méně častá chyba "b - 21. prosince" jako by naopak byla chybou ve složené struktuře aritmetického výpočtu, korespondujícího se zadáním. "21" jsou "tři týdny" - a tento mezivýpočet už se vezme za výsledek.

K8: "Který z následujících obdélníků NENÍ rozdělen na stejné části?"

Považujeme tuto položku za specificky "geometrickou" v tom smyslu, že postihuje rozlišování tvarů, identifikaci jejich shodnosti a různosti, včetně shodnosti obrazců symetricky převrácených v dvourozměrném prostoru. Chyby v této položce pak charakterizují spíše jen skupinu E, překročení námi stanoveného kritéria "bezpečné znalosti" u skupiny C se nám jeví v kontextu celkové distribuce jako náhodné: Skupiny A a B bez chyby - C: 81,3% (3 chyby) - D: 84,2% (3 chyby) - E: 45% (11 chyb).

To je ovšem jen argument pro to, abychom případně položku rozebrali až v souvislosti se skupinou E. Problém povahy souvislosti špatného rozlišování či chápání stejnosti tvarů s výkony nejhorší skupiny však zůstává. V této zprávě se bohužel nedostáváme k jeho bližší analýze.

A3: "Tužky jsou v 9 krabicích. V každé krabici je 125 tužek. Jaký je celkový počet tužek?"

Byť položka patří podle nás k jádru matematické kompetence čtvrťáků, jde zároveň o položku velmi snadnou, elementární "slovní úlohu na násobení". Autoři tím, jak konstruují nabídnuté varianty, zřejmě ani nepředpokládají, že by děti mohly takovou slovní úlohu řešit jinak než násobením. To na druhou stranu není tak jisté, u nejslabších matematiků se podle naší zkušenosti objevují chyby i v korespondenci verbálního zadání s matematickou operací, a to výjimečně i záměna paradigmatu násobení/dělení s paradigmatem sčítání/odčítání. Častěji se však vyskytuje záměna násobení za dělení. Zejména pokud by čísla v textu zadání vytvářela dobrou triádu sugerující doplnění dělením (např. "v každé z 9 krabic je 81 tužek, jaký je celkový počet tužek?"), pak při otevřené odpovědi bychom mohli část chyb tohoto druhu očekávat.

Při nabídnutých variantách výsledku však vypadá úspěšnost takto: skupina A bez chyby - B: 95,7% (1 chyba) - C: 81,3% (3 chyby) - D: 89,5% (2 chyby) - E: 65% (7 chyb).

Chyby v této položce tedy opět odlišují spíše skupinu E od zbytku souboru než ostatní skupiny navzájem. Při bližším pohledu zjistíme, že z 13 případů chyb chybí zápis u 8 - a z toho v 7 případech je to ve skupinách D a E, navíc pak u dětí z jediné - Hnědé - třídy. Pak tedy uvažujeme o tom, že opravdu není jisté, zda tyto děti chápou korespondenci slovního zadání s násobením. (U chybné jediné odpovědi - též bez zápisu výpočtu - ve skupině B bychom se spíše klonili k domněnce, že šlo o počítání zpaměti.). Zbylých 5 chyb se zápisem je pak velmi různorodých: výsledek opravdu vyšel chybně ("a", "e"), jednou výsledek vyšel správně, ale zaškrtnuta chybná odpověď, ve 2 případech je zápis nezřetelný.

Položka **U3c** se mezi položkami, v nichž chybuje více dětí ze skupiny C, ocitá nejspíše náhodně. Jde o položku navazující na zadání U3a, U3b (sestry jedou na kole do školy). Podle výsledků, k nimž v těchto položkách dítě dospělo, má říci "Kdo dojede do školy dříve". Z celkových 11 chyb jsou ovšem 3 takového druhu, že děti odpovídají bez toho, že v předchozích došly k nějakým časovým údajům - jakoby tedy výsledek jen "odhadly", jednou pak odpověď chybí. Tedy jen 7 chyb je toho druhu (4 ve skupině E), že vyššímu údaji je přiřazeno "dříve".

K1: "Které číslo je ve čtverci a zároveň v kruhu, ale NENÍ v trojúhelníku?" (prezentován obrázek).

V položce nacházíme velmi zvláštní distribuci chyb, která jako by se vymykala všem dosud popsaným průběhům: ve skupinách A, B bez chyb, zatímco v ostatních třech skupinách prakticky tatáž úspěšnost:. C: 75% (4 chyby) - D: 84,2% (3 chyby) - E: 75% (5 chyb).

Nejčastější chybou je přitom řešení "c". Jakou má povahu? Navrhujeme přitom hledat těžiště problému pro děti nikoli v rozlišování geometrických tvarů[8], které zvládají už na konci první třídy, nýbrž ve struktuře logických podmínek určujících umístění čísla ve vztahu k jed-

[8] Autoři testu kategorizují položku z hlediska obsahu jako "Geometrie v rovině: mnohoúhlníky a kružnice", z hlediska operací pak jako "Vybavování si matematických objektů a vlastností" a "Používání slovníku a symboliky".

notlivým oblastem strukturované plochy: "je ve čtverci **a zároveň** (je) v kruhu, **ale není** v trojúhelníku".

Pokud budeme zadání chápat jako trojici podmínek, můžeme řešení "c" považovat za takové, které splňuje pouze jednu podmínku (je ve čtverci) a ostatní zanedbává. Mělo by svou logiku, že splněna je právě první ze stanovených podmínek a další už děti nedokážou vzít simultánně v úvahu. Je však taková radikální redukce pravděpodobná i u dětí skupiny C, kde řešení nacházíme 2x, případně i D (také 2x)? Přitom ostatní dvě chyby ve skupině C spočívají v řešení "a", v němž jsou splněny **dvě ze tří** podmínek (je ve čtverci a zároveň v kruhu), a další chyba ve skupině D kombinuje řešení "a, d", přičemž obě tyto varianty kombinují právě pokaždé jiné dvě ze tří zadaných podmínek ("d" - je ve čtverci a není v trojúhelníku).

Řešení "c" umožňuje i jinou interpretaci - totiž takovou, kde struktura zadání je vzata jako struktura všech tří podmínek. Řešení "a" je potom záměnou kladného tvrzení a negace: číslo **není** ve čtverci a zároveň v kruhu (v jejich průniku), ale **je** v trojúhelníku. Taková interpretace chyby by umožňovala vidět její společný rys s ostatními (ve skupině C a D) v tom, že v zadané struktuře tří prostorových určení a alternativního predikátu děti dělají chybu v jednom ze čtyř zadaných elementů.

Skupinu C nakonec můžeme charakterizovat největším rozptylem přírodovědných znalostí. Najdeme tu jak dva nadprůměrné výkony, tak dva hluboce podprůměrné. Obdobně je tomu z hlediska výkonů v inteligenčním testu: 2 výkony výrazně přesahující průměr skupiny (v 1 případě koincidující s nadprůměrným výkonem ve Science), 2 výkony naopak výrazně pod průměrem (opět v 1 případě koincidující s podprůměrným výkonem v Science). Již jsme se zmiňovali, že v Testu čtenářské gramotnosti se výkony skupiny téměř neliší od skupiny B.

Skupina D (skór Math 27-33, 19 dětí)

Oblast bezpečné znalosti se u skupiny D zužuje na 11 položek (oproti 22 u skupiny C), dalších 7 můžeme při počtu 3 chyb považovat za hraniční. Mezi nimi rozlišíme podle průběhu distribuce v sousedních skupinách:

2 položky (G3, D5), kde jde zřejmě o náhodný výkyv k většímu počtu chyb a patří spíše k **oblasti bezpečné znalosti**. Ta se tak rozšiřuje na **13 položek**.

4 položky (D6, T5, T1b, K8), kde 3 chyby představují zřejmě rostoucí trend - ty jsou skutečně hraniční i v tomto smyslu;

1 položku (K1), kde jde zřejmě o náhodný výkyv počtu chyb dolů a k oblasti bezpečné znalosti nepatří ani ve skupině C.

K 8 položkám, kde tu chybuje velká část dětí podobně jako ve skupině C a kde tedy obě skupiny dosahují obdobné úrovně úspěšnosti, patří U3b, G4, T3, K4 (v těchto 4 jde dokonce o úroveň podobnou už skupině B) K9, D8, E1. Jejich výsledky už byly rozebrány výše.

V další skupině položek nastává oproti skupině C výrazný posun: zatímco tam v nich chybovala "velká část", tj. zřetelně méně než polovina, zde se chyb dopouští přinejmenším téměř polovina dětí. Jde o 8 položek, z nichž 6 už bylo rozebráno výše:

K6 (11 chyb oproti 3 u C, tj. 42,1% oproti 81,3%): "Kolik čtverečků bude na obrázku 6...?" (prezentována řada 3 obrázků). Položka poměrně ostře odlišuje poslední dvě skupiny od předchozích, ale ve skupině E už chyb nepřibývá.

T4a (11 chyb oproti 3 u C, tj. 42,1% oproti 81,3%): platí, při počtu 10 dívek a 20 chlapců, že "ve třídě připadá jedna dívka na každé dva chlapce"?

T4b (11 chyb oproti 4 u C, 42,1% oproti 75%): platí, že "1/2 všech dětí ve třídě jsou dívky"?

T2 (11 chyb oproti 5 u C, tj. 42,1% oproti 68,8%): "Jaké nejmenší přirozené číslo můžeš sestavit z číslic 4, 3, 9 a 1?" Položka je analyzována výše.

D9 (9 chyb oproti 5 u C, tj. 52,6% oproti 68,8%): "Na kterém obrázku jsou tři každé z čtveřice čtverců šedé"?

G1 (9 chyb oproti 5 u C, tj. 52,6% oproti 68,8%): "Asi jak daleko od sebe jsou ve skutečnosti Kladno a Uhříněves?" (prezentována mapka a měřítko)

Dvěma z těchto položek, jejichž výsledky jsme dosud nerozebírali, jsou:

K3: "Která dvojice je vytvořena podle pravidla 'Vynásobením prvního čísla číslem 5 dostaneme druhé číslo'?"

Celkově vypadá distribuce řešení této položky v jednotlivých skupinách takto: skupina A bez chyby - B: 1 chyba, úspěšnost 91,3% - C: 1 chyba, úspěšnost 93,4% - D: 13 chyb, úspěšnost 31,6% - E: 13 chyb, úspěšnost 35%.

V povaze chyb nenacházíme mezi skupinami velké rozdíly. V celkovém počtu 29 převažuje řešení "a" - 17x. Je opačným postupem v triádě, která respektuje paradigma násobení, explicitně uvedené v zadání: namísto správného "3 → 15" volí chybující "15 → 3". Řešení "b" a "c", která představují záměnu zadaného paradigmatu za sčítání/odčítání, se pak objevují ve skupině D ("b" i "c" 2x) i ve skupině E ("b" 2x, "c" 3x) zhruba stejně často.

Ve špatných řešeních tedy nacházíme jakoby dvě úrovně redukce či posunu zadání. Horší z nich (řešení "b", "c") nerespektuje ani paradigma zadané operace a spokojuje se s nalezením jakékoli dvojice, tvořící triádu s číslem 5 uvedeným v zadání.

Jednou ovšem nacházíme tuto chybu i ve skupině B - u chlapce s pro danou skupinu velmi nízkým celkovým skórem v Testu čtenářské gramotnosti. Při podrobnější analýze souvislostí položky K3 s výsledky tohoto testu jsme však nenalezli žádné jednoznačné souvislosti. Pokud v něm máme najít nějaká vodítka pro to, v čem spočívá "špatné čtení" zadání slovních úloh, bude zřejmě zapotřebí mnohem podrobnější analýzy souvislostí jednotlivých položek Testu čtenářské gramotnosti s výkony v Math.

U2: "Napiš zlomek, který je větší než 2/7."

Úspěšnost v této položce je rozložena takto: skupina A bez chyb - B: 2 chyby, úspěšnost 91,3% - C: 2 chyby, úspěšnost 87,5% - D: 9 chyb, úspěšnost 52,6% - E: 17 chyb, úspěšnost 15%.

Argumentovali jsme výše, že zlomky jsou jen okrajovou částí učiva 4. třídy a uvedli, že počáteční tendencí dětí je považovat za větší zlomek ten, který má větší číslo (přesněji kořen číslovky odpovídající většímu číslu) ve svém "druhovém jménu".

Všechna správná řešení skupiny A tu představuje 10x řešení "3/7", která představují jakési nejjednodušší překonání oné původní tendence. Ve 2 případech je řešením zlomek 1/2 či jeho ekvivalentem (4/8), v jednom případě pak jako by záruku mělo přinést zvětšení čitatele a jmenovatele na 3/8. Ostatní řešení se zdají prokazovat bezpečnou základní orientaci ve zlomcích z hlediska "větší - menší".

Dvě chyby ve skupině B spočívají jednou v nezodpovězení položky, jednou ve zmenšení čitatele i jmenovatele ("1/6"). Obraz správných řešení je tu hodně podobný skupině A. Největší počet úspěšných řešení tu představuje "3/7" (11x), dále "4/7" (1x). Dvakrát se tu objevuje zlomkový ekvivalent čísla 1 a jednou řešení se jmenovatelem 10, stejně jako "1/2". Méně kvalitní (protože trochu náhodné) řešení 3/8 tu najdeme jen jednou. Zbylá 4 řešení se zdají prokazovat bezpečné zvládnutí.

Ve skupině C najdeme také 2 chyby - obě spočívají v řešení "1/4". Také zde je nejčastější správné řešení 3/7 (10x). Kromě toho tu najdeme 2x ekvivalent "1", jedno řešení s desetinami a jednou "3/8".

Ve skupině D tedy narůstají chybná řešení nad námi zvolenou kritickou mez. Nejtěžší chybou je zřejmě řešení v podobě čísla "7" (1x), další pak zřejmě konfuzní "0,7". Nejčastěji vidíme snahu zvětšit zlomek zvětšením jmenovatele na "2/8" (4x), případně se současným zmenšením čitatele (pokud tak můžeme chápat řešení "1/4"). Jednou odpověď chybí, jedna je nejasná. Správným řešením je tu 5x "3/7", 1x "4/7" a 1x možná trochu náhodně "3/9" a podobně snad i „10/8“.

Ve skupině E nezvládá řešení položky 17 dětí. Nejčastěji odpověď chybí (9x), v 7 případech je jako řešení prezentováno celé číslo: "14" (4x), "9", "7" a "10" (vždy 1x). V tomto kontextu je chybné řešení "2/8" spíše světlou výjimkou. Tím spíše pak 3 správná řešení: "3/7", "10/10" či dokonce "3/7, 9/8, 10/9".

Většinu správných řešení představuje tedy "3/7" (37x) či jiné zvětšení čitatele, aby se zvýšil počet "sedmin" (11x - včetně 3 řešení "7/7"). Za poněkud náhodně správná můžeme možná považovat 6 řešení, kdy se zvětšuje čitatel i jmenovatel (nejčastěji "3/8").

Nejčastější chybou respektující tvar zlomku jsou chyby se zvětšením jmenovatele ("2/8" - 7x), snad podobné je "1/4" (2x), i když možná je spíš hledáním bezpečně známého tvaru podobně jako (náhodně?) správné "1/2". Ve slabších skupinách D a E narůstají pak především absence odpovědí (10x) a odpovědi ve tvaru celého čísla (8x), které snad svědčí o tom, že zlomek jim není znám ani v nejpovrchnější podobě jako určitý číselný tvar.

Od úspěšnější skupiny C dále odlišuje skupinu D šest položek, které tu přestávají patřit do oblasti bezpečné znalosti a začíná v nich dělat chyby velká část dětí:

U4 (7 chyb oproti žádné u skupiny C, ale také A a B, tj. 63,2% oproti 100%): „Co musíš udělat, abys získal následující číslo v řadě?“ (50, 46, 42, 38, 34, ...).

Zvládnutí takovéto pravidelnosti v řadě čísel patří k základním kompetencím a její nezvládnutí (pokud není náhodnou chybou) by mohlo indikovat absenci základní orientace v číselné řadě, resp. vůbec chybění konceptu číselné řady a její pravidelné strukturace. V inteligenčním testu se v jednom ze subtestů pracuje právě s číselnými řadami a systematičtěji se variuje jejich obtížnost. Řadu z položky U4 bychom mohli srovnat s následujícími, u nichž jde o pravidelný posun řady o určité číslo:

Řadu „45, 40, 35, 30, 25, 20, _, _“ řešily děti takto:

Modrá třída - 2. roč.	Modrá třída - 3. roč.	Modrá třída - 4. roč.	Celý soubor - 3. roč.
88%	100%	100%	96%

Přestože jde o sestupnou řadu, je lehká tím, že snadný interval „o 5“ sleduje navíc násobkovou řadu (jednu z nejlehčích).

Řadu „9, 13, 17, 21, 25, _ , _“ řešily děti takto:

Modrá třída - 2. roč.	Modrá třída - 3. roč.	Modrá třída - 4. roč.	Celý soubor - 3. roč.
67%	88%	100%	89%

Řada se shoduje s položkou U4 v tom, že jde o interval „o 4“ mimo násobkovou řadu 4, ale je snazší, protože je vzestupná, usnadňovat ji mohou i nižší čísla.

Řadu „27, 23, 19, 15, 21, _ , _“ řešily děti takto:

Modrá třída - 2. roč.	Modrá třída - 3. roč.	Modrá třída - 4. roč.	Celý soubor - 3. roč.
46%	73%	95%	80%

Tato řada se snad položce U4 blíží nejvíce. Na srovnání s předchozí řadou vidíme, jak rozdíl mezi úspěšností řešení vzestupných a sestupných řad s pokračující školní docházkou postupně mizí.

Pro srovnání uveďme, jak se úspěšnost mění, je-li do sestupné řady namísto pravidelného intervalu zaveden interval pravidelně klesající: „47, 41, 36, 32, 29, _, _“.

Modrá třída - 2. roč.	Modrá třída - 3. roč.	Modrá třída - 4. roč.	Celý soubor - 3. roč.

8%	29%	59%	23%

Úspěšnost v nižších ročnících je tu ovšem ovlivněna tím, že řada je v subtestu proponována jako obtížná a umístěna tak až ke konci škály, takže řadě dětí nebyla předložena k řešení s předpokladem, že by ji neřešily. Ve 2. ročníku tak byla v Modré třídě předložena jen 5 nejúspěšnějším dětem z 24 (2 ji vyřešily), ve 3. třídě 15 nejúspěšnějším z 26 (6 dětí vyřešilo; v celém souboru byla předložena 80 nejúspěšnějším ze 126, vyřešilo ji 29 dětí). Ve 4. ročníku už však údaj odpovídá úspěšnosti reálných řešení.

Vidíme tedy, jak se do oblasti relevantní pro rozlišování matematické kompetence ve 4. třídě posunula právě tato řada, v níž dítě musí simultánně sledovat průběhy dvou jednoduchých posloupností: změnu dalšího členu řady, ale současně s tím změnu intervalu.

Položka U4 by tak při nenáhodném selhání odlišovala opravdu ty, kdo mají **základní problémy s uspořádáním čísel v číselné řadě**. Odlišuje pak zejména skupinu E od ostatních skupin (11 chyb - úspěšnost 45%).

Při bližším pohledu chyb však zjišťujeme, že 5 z 18 chyb (2 v D a 3 v E) spočívá v absenci odpovědi, přičemž pak obě tyto absence ve skupině D a dvě ve skupině E jsou doprovázeny absencí odpovědi také v položce U5. Nenacházíme-li pak na příslušné straně (poslední v testu) jejich testových formulářů skutečně „ani čárku“, jsme si téměř jisti, že chyby vznikly přehlédnutím položek. Pak skutečný počet chyb je 5 ve skupině D a 9 ve skupině E. Jaká je jejich povaha?

Neurčitá je tam, kde se děti zcela vyhnuly konkrétním operacím: „nevím“, „spočítat si to“ (3 případy).

Několikrát je odpověď mimo paradigma „sčítání/odčítání“: „vinásobit 4“, „musím je seřadit“, možná i „opsat“ a řešení „34“ či „34, 38, 42, 46, 50“ (5 případů).

V několika případech je identifikována operace uvnitř paradigmatu „sčítání/odčítání“, ale se špatným řešením nebo bez konkrétního řešení: „mínus 4, plus 4“, „50. Musím si počítat na plus a mínus.“, „plus“ (3 případy).

Jednou je identifikováno jako klíčové číslo 4, ale bez uvedení operace: „4“.

Jednou jde zřejmě o špatný výpočet: „28“. Jde snad o podobnou konfuzi číselného intervalu s číslicemi v prvních členech řady jako u jednoho chlapce z naší třídy, který poté, co si mezi a nad členy řady vpisuje postupně (graficky jen přibližně) „50, $^{-4}$ 46, $^{-2}$ 42, $^{-4}$ 38 $^{-3}$ $^{(\text{přepsáno na } -4)}$ 34“, odpovídá: „to 1 číslo(.) odečtu 4 to druhé 2 a to se zvišuje o 2 vždycky“. [9]

Odhadujeme tedy, že dva poslední případy chyb jsou spíše náhodné. Pak by o poměrně **jednoznačné nezvládnutí položky šlo ve 4 případech u skupiny D a v 8 u skupiny E**.

U1 (6 chyb oproti žádným ve skupině C, případně jediné ve skupině B, tj. 68,4% oproti 100%): „Kolik dlaždic je potřeba na pokrytí následujícího obrazce?“ (prezentován tvar dlaždice=trojúhelníka a obrazce.)

Tato položka patří k těm, které se týkají chápání geometrických obrazců a jejich strukturace. Chybné odpovědi jsou následující: „7“ (2x ve skupině D, 4x v E), „15“ (1x v D, 1x v E), 4 (2x v E), pak už jen „individuální“ chyby:

ve skupině D: „9“ (jednou však toto řešení nacházíme i ve skupině B), „11“, „13“;

[9] Ve výpočtu rozdílu u něj jasně interferuje u „-2“ číslice ze „**42**“, u „-3“ číslice ze „**34**“ (tady však chybu opravil, ale možná mu v tom pomohla druhá číslice?). Tyto interference u něj rozhodně nejsou důsledkem nezvládnutí elementárního počítání s dvoucifernými čísly, nýbrž spíše toho, že byl v tu chvíli již dlouho jediným, kdo ještě nebyl s testem hotov. (Jeho extrémní pomalost při psaní a čtení ho značně handicapuje. Přitom v subtestu Počty, kde jsme mu dopřáli dostatek času, dosáhl ve 4. třídě pátého nejvyššího výkonu ve třídě (o pouhý bod hrubého skóru za nejlepšími) a v samotných Číselných řadách dosáhl ve třídě průměrného výsledku. (Z výše uvedených 4 řad subtestu neřešil poslední - 47, 41, 36, 32, 29, _, _ - a zdá se, že vyznačovala právě hranici jeho aktuální kompetence.)

ve skupině E: „2“, „10“, „12“, „60“.

Nejasný je postup dětí ve 2 případech, kdy po správně strukturovaném obrázku následuje chybná odpověď - 9, resp. 11. Přesto řešení jasně dokládá, že nejde o neschopnost obrazec správně členit.

Zřejmě podobně je tomu v případě, kdy členění na trojúhelníky dokládá pomocný obrázek, ač samotný obrazec pak zůstává nečleněn a odpověď je chybná: 9.

Jasně nesprávné chápání, jak má být obrazec členěn, dokládají naopak 3 nákresy, v nichž je členěn na 7 kosočtverců.

Ze zbylých 11 řešení, vesměs bez nákresu členění, se zdají správnou strukturaci vylučovat 4: „2“, „4“ (2x) a „60“.

Ostatní chyby jsou nejednoznačné - umožňují na jedné straně chybu vysvětlit nesprávným spočítáním - např. řešení „12“ jako "nahoře 6 (správně) a dole taky 6 (špatně)“; řešení „13“ jako „nahoře 6 (správně) a dole o 1 víc (špatně)“; řešení „15“ jako „dole 8 (správně) a nahoře o jednu méně (špatně)“; řešení „7“ jako počítání pouze těch „dlaždic“, které - stejně jako „vzor“ - mají dolní stranu vodorovně. Na druhé straně nás právě jiná možnost strukturace při řešení „7“ (kosočtverce), která by nás bez nákresu dětí nejspíše vůbec nenapadla, varuje před přílišným spoléháním na jednoznačnost takových spekulativních interpretací.

Ve skupině D nám tak zůstávají pouze 4 chyby, u nichž je nesprávné členění obrazce nejednoznačné, přičemž v žádném případě není prokázáno jednoznačně chybné členění. Ve skupině E naopak máme (téměř) jistotu nesprávného členění v 7 případech, u 3 chybných řešení pak není jednoznačné. To by svědčilo o tom, že samotná neschopnost správné strukturace je v souboru spíše ojedinělá a charakterizuje především nejhorší skupinu. Přitom i v ní se jedná o specifický a omezený fenomén. Ani ona 3 řešení strukturace na kosočtverce nepoukazují patrně ani tak na neschopnost čistě kognitivní dostupnosti rozčlenit plochu na pravidelné elementy, jako spíše na nerespektování textu zadání, jak se to má udělat. Jako by zde ony 3 dívky (jen 2 z nich z téže třídy) přizpůsobovaly řešení tak, aby dlaždice měla tvar blížící se jejich zkušenosti? Necharakterizuje nekompetentní matematiky často právě to, že „nedrží“, nerespektují text zadání, nýbrž impulsivně, zbrkle, předčasně do něho promítají první, co je napadne a co má charakter jejich nereflektované zkušenosti?

A2 (4 chyby oproti žádné ve skupině C, tj. 79% oproti 100%): „Ve třídě je 8 chlapců. Dívek je v této třídě dvakrát více než chlapců. Kolik je v této třídě chlapců a dívek dohromady?“

Nárůst počtu chyb ve skupině E (14 chyb - úspěšnost 30%) svědčí o tom, že jde o položku ostře odlišující nejhorší matematiky. Charakter chyb se přitom nemění, většinu jich tvoří 13 řešení „b - 16“, dvě pak řešení „c - 20“, jedno řešení je kombinované: „b, c“.

Obtížnost položky tedy nespočívá v korespondenci zadání „dvakrát více“ s násobením ani s konkrétním výpočtem 2*8=16. Složitost je tu ve složenosti úlohy: celek počtu třídy je strukturován jakoby hierarchicky - jedna z jeho částí je dále členěna na další 2 podčásti. Jde tu o obdobný problém, který jsme zmiňovali u položky T4 b: nepřesná diferenciace vztahu částí k sobě navzájem a vztahu k celku. Zde se postup výpočtu ukončuje předčasně, ačkoli vyžaduje další krok. Sémantickým kontextem zadání i číselným obsazením jde o velmi lehkou úlohu, přestože je relevantní jádru matematické kompetence čtvrťáků. Tyto „složené úlohy“ byly v naší Modré třídě typické snad na začátku 4. třídy. Sémantické i číselné obsazení struktury (a později i sama struktura) se však rychle stávalo obtížnějším, přinejmenším tak, aby úloha zahrnovala nutnost početních operací prováděných písemně („pod sebe“).

E2 (4 chyby oproti žádné v C, tj. 79% úspěšnost oproti 100%): „Jaká číslice je na místě stovek v čísle 2 345?“ Prakticky stejnou úspěšnost pak vykazuje skupina E (4 chyby). Tento počet chyb je u obou skupin těsně za hranicí oblasti bezpečné znalosti. Jen jednou je zvoleno řešení "d", které hledá stovky na pozici jednotek. Zbylá dvě řešení jsou posunem pozice stovek o jednu pozici - "a - 2" vlevo na tisíce, "b - 4" vpravo na desítky. Povaha chyby není bez sledování dětí jasná. Může jít o chybu v naučené posloupnosti (při současném počítání pozic zprava doleva) "jednotky - desítky - stovky - tisíce...". Děti by však mohly postupovat také tak, že si číslo přečtou a "odposlechnou", která číslovka se pojí s označením "sto", "sta" nebo "set". Chyba by pak mohla být i ve čtení čísla - mohla by pak mít souvislost s položkou G3 ("Který z následujících zápisů je zápisem čísla 9740?")? Nenašli jsme jediný případ koincidence chybného řešení obou položek. To by snad mohlo svědčit spíše pro první interpretaci. Zjevně se však pohybujeme už v oblasti chyb pro čtvrťáky netypických, kde chyby mohou mít ve značné míře náhodnou povahu.

U5 (5 chyb oproti žádné ve skupině C, tj. 73,7% oproti 100%): „Zapiš toto sčítání jako násobení.“ (4+4+4+4+4=20). U této položky je však také třeba zanést opravu, jejíž nutnost jsme zjistili u položky U4. Z 5 chyb tu 2 připadají na absenci odpovědi v důsledku přehlédnutí. Pak položka spadá mezi ony hraničící s oblastí bezpečné znalosti. Probereme ji v rámci popisu skupiny E.

U3a (4 chyby oproti žádné ve skupině C, avšak 4 ve skupině B, tj. 79% oproti 100%, resp. 82,6%): „Marie ujede za 10 minut 3 km. Za jak dlouho dojede do školy?“. Položku jsme prob í-rali výše. Patří nejspíš k jádru matematické kompetence, ale zároveň k lehkým položkám, jejichž nezvládnutí vyznačuje spíše až skupinu E.

Skupina D je z hlediska výkonů v inteligenčním testu složena velmi podobně jako skupina C, nevykazuje prakticky rozdíly. Malý posun průměrného celkového skóru by se ještě snížil, nebýt jediného případu extrémně nízkého výsledku (79), který navíc nebyl zřejmě zcela validním odhadem aktuálních schopností, protože tentýž chlapec ve čtvrté třídě dosáhl celkového skóru 96. Nápadný je tu kromě zmiňovaného chlapce jen jediný další nízký výkon (100), na druhé straně pak vysoký skór (136) jednoho chlapce z naší třídy, jehož umístění v této skupině výkonů v Math (stejně jako povaha jeho chyb v testu bylo pro nás překvapením). Je tu pak ještě skupina 4 dětí s poměrně vysokými výkony v inteligenčním testu (125-127, tj na úrovni průměru skupiny B). Tři z nich jsou z naší třídy a je pro nás výzvou porozumět hlouběji tomuto rozporu mezi celkovými intelektuálními předpoklady (jak by je měl postihovat inteligenční test) a neadekvátně slabým výkonem v Math.[10]

Skupinu také charakterizuje pokles průměru výkonů ve všech částech Testu čtenářské gramotnosti. Zejména markantní je pokles minimálních skórů. K zařazení do skupiny jako by stačilo 8 bodů (z 22) ve Vyprávění, 8 bodů (z 21) ve Výkladu a 12 bodů (z 23) v Dokumentu, ovšem při celkovém minimálním skóru 38 (ze 66). Zejména ve Vyprávění tu ovšem najdeme největší rozptyl výkonů z celého souboru.

Přírodovědné znalosti velké většiny dětí se tu vejdou do širokého průměru odpovídajícího ve Science skóru 13-17 (z maxima 19), pouze dvě děti patří i z tohoto hlediska k podprůměru.

Skupina E (skór Math 11-25, 20 dětí)

[10] Předběžně zjišťujeme, že subtesty Počty a Číselné řady patří ve 4. třídě v profilu jejich výkonu v inteligenčním testu k nejhorším. To ovšem ještě neposkytuje pro nás uspokojivé vysvětlení, signalizuje to jen nenáhodnost výkonu v testu TIMSS.

Oblast bezpečné znalosti tu vymezuje pouze 5 položek z testu, další dvě jsou (se 3 chybami) hraniční:

D7 (1 chyba): "Které dva z uvedených obrazců jsou shodné?"

G3 (1 chyba): "Který z následujících zápisů je zápisem čísla 9740?"

A5 (2 chyby): "Který z následujících obrazců má největší obsah?" (obsah strukturován na shodné čtverce)

D5 (2 chyby): "Které dvě třídy sebraly přesně 80 lahví?" (prezentován sloupcový graf)

K2 (2 chyby): "Sečti 6971+5291." (zapsáno pod sebou)

T1a (3 chyby): "Kolik krabic mléka se prodalo ve škole v pondělí?"

K5 (3 chyby): "Jak je přibližně dlouhá tužka na obrázku?"

Uveďme dále ty položky, v nichž skupina vykazuje výrazný pokles úspěšnosti oproti skupině D, přestože už tam v nich chybovala téměř či více než polovina dětí:

D9 (18 chyb oproti 9 u skupiny D, tj. úspěšnost 10% oproti 52,6%): "Na kterém obrázku jsou tři z každé čtveřice čtverců šedé?"

U2 (17 chyb oproti 9 u D, tj. 15% oproti 52,6%): "Napiš zlomek, který je větší než 2/7."

T2 (18 chyb oproti 11 u D, tj. 10% oproti 42,1%): "Jaké nejmenší přirozené číslo můžeš sestavit z číslic 4, 3, 9 a 1? Každou číslici použij pouze jednou."

G1 (16 chyb oproti 9 u D, tj. 20% oproti 52,6%): "Jeden centimetr na mapě představuje 8 km ve skutečnosti. Asi jak daleko jsou od sebe ve skutečnosti Kladno a Uhříněves?" (prezentována mapka s názorným měřítkem).

Skupinu lze ovšem dobře popsat následovně: na jedné straně prostřednictvím položek, které nezvládá polovina či většina dětí a v nichž se tím přitom liší od všech ostatních (tedy především od sousední skupiny D). Na druhé straně skupinu charakterizují položky, v nichž sice nechybuje její většina, ale v nichž jako by dělaly případné chyby pouze či především tyto děti. Jde tedy o chyby, které - s mírnou nadsázkou - "se mohou stát jen jim".

Najdeme přitom položky, které splňují obě kritéria a **vymezují tak rozdíly této skupiny vůči ostatním nejostřeji**:

T1b (17 chyb oproti 3 u D, tj. 15% oproti 84,2%): "Kolik krabic mléka se prodalo ve škole v tomto týdnu?"

Jde o zadání vycházející z prezentovaného grafu. Zatímco odečíst na grafu jednu z hodnot (položka T1a) zvládá naprostá většina dětí i v této skupině, v této úloze selhávají. Kromě dvou případů chybějícího řešení lze ještě u dalších 4 chyb předpokládat posun zadání: v jednom případě je odpověď "pá, st, po, út, čt" seřazením dnů v týdnu podle počtu prodaných krabic od nejvyššího k nejnižšímu prodeji. V dalších 3 případech pak děti uvádějí, jaký byl nejvyšší prodej: "40" nebo kdy byl dosažen: "v pátek".

V dalších případech jde patrně vždy o chybné součty. Blíže jsme tu postup dětí zatím nezkoumali, takže není jasné, zda potíže jim činí spíše sčítání více než dvou sčítanců nebo to, že nepočítaly pod sebe, případně to, že počítaly úplně zpaměti. Každopádně i tyto chyby nepřímo potvrzují, že samotný smysl grafu jim nečiní problémy.

E3 (14 chyb oproti 1 u D, tj. 35% oproti 94,7%): "Které z následujících čísel bude při zaokrouhlování na stovky zaokrouhleno na 600?".

Ze 14 chybných řešení se 10 dětí domnívá, že na 600 bude zaokrouhleno číslo 660 ("e"), 3 děti pak číslo 160. Jedna odpověď chybí. Převaha chybných řešení jako by vycházela k příslušnosti zaokrouhlovaného čísla ke stovce v jeho názvu. Je to typická chyba v době, kdy se zaokrouhlování začíná probírat, později se u většiny dětí bezpečně diferencuje od jakési jazykové příbuznosti. (Nemusí se asi nutně diferencovat jako vzdálenost od nejbližší desítky, stačí zvládnout použití receptuálního pravidla "od pětky nahoru".)

T5 (14 chyb oproti 3 u D, tj. 30% oproti 84,2%): "Nakresli obrázek, který znázorňuje vystřižený tvar, když ho rozložíme a narovnáme."

Z těchto 14 chyb se za naprosté nesplnění úlohy dá považovat 7: V jednom z nich je řešením odpověď "kuře" (zřejmě ho obrázek připomíná? - pak ovšem jako by dotyčný ppřece jen pracoval s představou adekvátního symetrického rozvinutí?). Jednou obrázek ani vzdáleně nepřipomíná předložený tvar a v 5 případech jde o překreslení obrázku z předlohy. Nelze ovšem vyloučit, že linie tu má znázorňovat už prostřižený papír, který však není rozložen. (V jednom případě je to evidentní: vystřižený tvar je jakoby vyňat, na jeho místě chybí levá svislá strana obdélníka papíru.)

Na to by pak mohla navazovat další 2 chybná řešení, která by vznikla tak (a patrně jsou tak i míněna?), že tvar se vystřihne či prostřihn jen ve vrchní polovině přeloženého papíru a vystřižená část se rozvine vlevo. Obrázek pak vypadá tak, že k obdélníku (analogického tvaru jako na předloze) je zleva napojen tvar symetrický k tvaru vyznačenému na předloze; na obdélníku samém není vyznačeno nic, není ani vyznačen sklad jako levá svislá strana obdélníka. Toto řešení bychom při přísných požadavcích na přesnost zadání mohli označit za korektní. Uvědomím si tak, že zadání zjevně počítá se sdílením nekterých předpokladů o tom, co je to vystřihování tvarů z papíru či v papíru. Zdá se však, že tyto děti takové předpoklady nesdílejí. Schopnost symetricky rozvinout daný tvar však jasně prokazují.

V jednom případě jde o symetrické rozvinutí adekvátní pro jinou než zadanou osu (jako by papír byl přeložen na opačné straně, než je vystřižený tvar. Zdá se, že jde spíše o redukci zadání.

Přibližné chápání symetrického rozvinutí tvaru lze předpokládat u dalších 3 dětí - tvar je však nepřesný, při rozvinutí je v místech dotyku obou polovin tvaru neadekvátní.

Hypoteticky lze tedy v úloze vyčlenit 2 linie problémů:

1. Chápání symetrie. Jsou-li naše úvahy správné, pak ze 14 chyb ve skupině E neprokazují děti pochopení symetrie v 7 případech (včetně jedné absence odpovědi), v dalších 4 případech můžeme předpokládat její přibližné chápání (včetně oné odpovědi "kuře").

2. Sdílení kulturního kontextu "vystřihování tvarů", jeho implicitních předpokladů. Poměrně jistě lze jeho absenci předpokládat ve 2 případech. Je však možné, že vstupuje do hry i v dalších 5 případech, které se zvenčí jeví jako pouhé překreslení tvaru z předlohy. Z pouhých odpovědí v testu je však nemožné odlišit tyto problémy od obecné tendence k nerespektování (redukci) textu zadání, které často vidíme u chybujících dětí.

A1 (10 chyb oproti 1 u skupiny D, tj. 50% oproti 94,7%): "Na kterém obrázku je polovina teček černých?"

Nejčastější chyba označuje řešení, kde je jedna tečka bílá a dvě černé ("c"- 4x). Interferuje tu tedy "polovina" s převráceným "dvojnásobkem", nelze ani vyloučit záměnu "černých" ze zadání za "bílé". Ostatní dvě chybná řešení ("d" se přitom vyskytuje jen v kombinaci s "c") vedou k otázce, jak je tu polovina chápána. Není tu vztažena vždy k jednomu číslu z výrazu "1/2" - k čitateli v řešení "a", kde je jedna kulička ze čtyř černá, a ke jmenovateli v řešení "c" a "d", kde jsou černé dvě ze tří, resp. pěti kuliček?

D6 (10 chyb oproti 3 u D, tj. 50% oproti 84,2%): "O kolik stupňů teplota vzrostla?" (jako součást zadání prezentovány 2 obrázky teploměru, na prvním je stav "mínus 3 stupně", na druhém "5 stupňů").

Převažující chybou je tu řešení "a - o 2 stupně", (6x - ve skupině D všechny 3 chyby) - zdá se být odečtením čísel ze zadání: 5-3. K podobnému postupu mají děti dvě vodítka - jednak poukaz na operaci odčítání prostřednictvím slova "mínus", jednak to, že číslo 5 je větší.

Méně častá jsou zbylá dvě řešení - "b - o 3 stupně" (2x), "c - o 5 stupňů" (2x). Řešení "b" by mohlo být vysvětlitelné jako dočtení tří dílků rozdílu mezi dvěma zobrazenými stavy, přičemž ovšem by v tom případě mylně byla dlouhá čárka označující na prvním obrázku 0° ztotožněna s tou, která na druhém obrázku označuje 5°. Řešení "c" pak jako by bylo prostě počtem stupňů nad nulou. Mohlo by to být konzistentní s chápáním, se kterým jsme se dříve setkávali i v naší třídě: že totiž směrem dolů končí číselná posloupnost na nule a pod ní není "nic", rovnající se početně pořád nule.

K8 (11 chyb oproti 3 chybám u skupiny D, tj. 45% oproti 84,2%): "Který z následujících obdélníků NENÍ rozdělen na stejné části?"

Položka má v určitém smyslu zvláštní postavení. Budeme-li úlohy, v nichž nějak figurují tvary či obrazce, považovat za specifické a analyzovat jejich výsledky zvlášť, zjištíme následující. Takových položek je v testu 7 (D7, A5, K5, U1, T5, K8 a K7). Zkoumáme-li, nakolik se výkon v těchto položkách podílí na skóru Math, zjišťujeme u řady dětí z skupiny E proporcionální nevyváženost - jenže většinou opačného směru, než u položky K8! Celkem 9 dětí skupiny boduje v těchto položkách pracujících s názornými tvary výrazně více, než by odpovídalo jejich skóru Math, jen 3 děti naopak výrazně méně. Úspěšné řešení položky K8 nevykazuje žádnou statistickou souvislost s ostatními položkami ani s jejich celkem, jakoby se položka zcela vymykala. Není však jasné. v čem její obtížnost spočívá a nenaznačuje to ani povaha chyb. Řešení "b", které převažuje mezi chybujícími celkově (7x) i ve skupině E (5x), by snad mohlo znamenat, že chybující nepovažují za "stejné" osově symetrické tvary. Jakou povahu však mají řešení "a" (2x), "c" (5x) a ostatní "kombinovaná" řešení? Jde např. o "nepozorné čtení" a odpovídají na opačnou otázku? Mohl by pro ně problém spočívat v negativní formulaci otázky? (Ale ani ve skórech Testu čtenářské gramotnosti u nich nenacházíme nějakou systematickou nápadnost.)

K těmto položkám by patřila snad i **položka U3a** (14 chyb oproti 4 u D, tj. 30% oproti 79%): "Marie ujede za 10 minut 3 kilometry. Za jak dlouho dojede do školy (vzdálené 9 km?)". Položku jsme výše již rozebírali.

Hraniční položkou ještě poměrně ostře vyznačující skupinu E je snad také **položka U5** (formálně 11 chyb oproti 5 u D, tj. 45% oproti 73,7%): „Zapiš toto sčítání jako násobení.“ (4+4+4+4+4=20). Reálně však tu jde o jiné počty chybujících, protože u obou skupin vždy 2 děti položku zcela přehlédly. Opravené relace by pak vypadaly takto: 9 chyb oproti 3 u skupiny D, tj. úspěšnost 50% (9 z 18 řešících) oproti 82,4% (14 ze 17 řešících). Ve dvou případech vypadá tato chyba jako snad náhodná: 4*4=20 (jedenkrát i ve skupině D), 5*20=20. V dalším případě zřejmě může jít o významový posun zadání: řešení "2*10=20" zřejmě zapisuje jako "násobení" pouze výsledek "sčítání", v logice ekvivalence výsledku je řešení správné.

Ostatní zápisy (či neřešení úlohy) však se zdají signalizovat nepochopení ekvivalence opakovaného sčítání a násobení, které pak nejspíše koresponduje s jejich chápáním jako zcela separovaných paradigmat zacházení s čísly. Zdá se, že to charakterizuje opravdu nízkou úroveň matematické kompetence. Skutečně je nacházíme u dětí se 6 nejhoršími výkony v matematické části testu (skór Math 11-19).

K chybám, které "se mohou stát jen jim", přesto však v nich chybuje jen velká část, nikoli většina skupiny, pak patří:

A4 (9 chyb oproti 2 chybám ve zbytku souboru, konkrétně v D, tj. 45% oproti 89,5% u D): "Jaké číslo znázorňuje celý obrázek?"

Logika chybných řešení "c" (5x) i "d" (4x) - "a" ¨se nevyskytlo - je tatáž: děti konstruují číslo podle počtu zobrazených "kusů" popořadě buď zleva doprava ("d - 835") nebo zprava doleva ("c - 538" - je to čtení ve směru "jednotky - desítky - stovky"?). Naprosto tu tedy nejde o neschopnost chápat vztah mezi číslem a počtem vůbec. Ale povaha chyby přesto není zcela zřetelná. Nelze tu vyloučit, že tento vztah je pro některé děti samozřejmý u malých čísel (určitě jednociferných, možná čísel "do 20"?), ale přitom velká čísla jsou pro ně už něčím, co se netvoří prostě přiřazováním rostoucímu počtu dalších čísel v řadě, nýbrž co se vytváří skládáním jednociferných čísel do nových tvarů. Velká čísla jsou pak jakési skládanky, přičemž z hlediska dospělého tu zůstává nediferencován vztah mezi číslem a číslicí (která se stává číslem teprve ve vztahu k pozici, kterou zaujímá), obojí pro děti splývá. Na druhé straně může chyba prostě jen na další způsob vypovídat o sklonu redukovat zadání a volit to řešení, která se jako první zdá vyhovovat.

G2 (4 chyby - úspěšnost 75% - oproti žádné chybě ve zbytku souboru): "Která z následujících hmotností by mohla být hmotností dospělého člověka?"

Dvakrát se setkáváme s odpovědí "b - 6 kg", dvakrát s řešení "d - 600 kg". Provádějí tu děti vůbec nějaký odhad, pomyslné poměřování vůči představě hmotnosti "1 kg"? Nebo jde spíše o jednoduchou informaci toho druhu jako ve většině položek přírodovědné části testu? Svědčila by pro to skutečnost, že 4 chybující děti patří k 8 dětem s nejhoršími výkony v přírodovědné části testu.

Většina dětí skupiny E dále chybuje v těchto položkách, ve kterých se ovšem už nedopouští chyb výlučně či téměř výlučně ona:

T3 (16 chyb oproti 6 u skupiny D, tj. 20% oproti 68,4%): "... vrátil se zpět v 7^{00}. V kolik hodin vyšel, jestliže procházka trvala 1 hodinu a 30 minut?".

U3b (17 chyb oproti 8 u D, tj. 15% oproti 57,92%): "Lída ujede 1 kilometr za 3 minuty. Za jak dlouho dojede do školy? (vzdálené 9 km)".

A2 (12 chyb oproti 4 u D, tj. 40% oproti 79%): „Ve třídě je 8 chlapců. Dívek je v této třídě dvakrát více než chlapců. Kolik je v této třídě chlapců a dívek dohromady?“

K4 (12 chyb oproti 6 u D, tj. 40% oproti 68,4%): "Kdo vyhrál a o kolik bodů?" (prezentována tabulka s výsledky jednotlivých kol).

K9 (12 chyb oproti 6 u D, tj. 40% oproti 68,4%): "54 kuliček je rozděleno do 6 sáčků tak, že v každém sáčku je stejný počet kuliček. Kolik kuliček je ve 2 sáčcích?"

D8 (11 chyb oproti 5 u D, tj. 45% oproti 73,7%): odečíst 4,03-1,15 pod sebe

U4 (11 chyb oproti 7 u D, tj. 45% oproti 63,2%): „Co musíš udělat, abys získal následující číslo v řadě?“ (50, 46, 42, 38, 34, ...). Také tady je třeba vnést do počtu chyb korekce: reálně jde o 9 chyb oproti 5 u D, tedy úspěšnost 50% (9 z 18 reálně řešících) oproti 70,6% (12 ze 17). Položce jsme se obsáhle věnovali výše.

U1 (10 chyb oproti 6 u D, tj. 50% oproti 68,4%): „Kolik dlaždic je potřeba na pokrytí následujícího obrazce.“ (Prezentován tvar dlaždice-trojúhelníka a obrazce.) Položku jsme rozebrali výše.

Skupina E se pochopitelně vyznačuje nejnižším průměrem výkonů v inteligenčním testu - má tu navíc nejvýraznější odstup od průměru sousední skupiny. 10 ze 17 celkových skórů je tu o více než 1 směrodatnou odchylku pod průměrem souboru. Relativně překvapivé jsou tu 3 výkony na úrovni průměru souboru dětí z Hnědé třídy, které by zasluhovaly bližší analýzu.

Ve výsledcích v Testu čtenářské gramotnosti lze konstatovat podobný rozdíl, jaký jsme viděli mezi skupinami D a C. Klesají především minimální výkony. Jde zejména o 6 ze 7 nejnižších výkonů ve Vyprávění (skór 4 -10 bodů), a 5 ze 7 nejnižších výkonů ve Výkladu (8-10 bodů).

Jádro matematické kompetence ve čtvrté třídě

Vyjdeme-li z distribuce chyb a úspěšnosti skupin v jednotlivých položkách, jak jsou prezentovány v tabulkách v Příloze 2, a z postupně ověřovaného předpokladu o tom, že jádro matematické kompetence ve 4. třídě tvoří korespondence slovního zadání s paradigmatem násobení/dělení a elementárním problematiky poměru (navazující na postupně vznikající samozřejmost a tím simultánní chápání vztahů čísel při násobení a dělení a jim odpovídajících členů slovního zadání), pak k položkám, které obsahem odpovídají a zároveň výrazně rozlišují mezi skupinami, patří:

K9: "54 kuliček je rozděleno do 6 sáčků tak, že v každém sáčku je stejný počet kuliček. Kolik kuliček je ve 2 sáčcích.")

T4a, T4b: ve třídě 10 dívek a 20 chlapců - "připadá jedna dívka na dva chlapce"?, je pravda, že "jedna 1/2 všech dětí ve třídě jsou dívky"?

G1: prezentována mapka a měřítko - "Asi jak daleko od sebe jsou ve skutečnosti Kladno a Uhříněves?"

U3b, a částečně U3a: sestry "jedou na kole do školy vzdálené 9km" "Lída ujede 1 kil ometr za 3 minuty. Za jak dlouho dojede do školy?" "Marie ujede za 10 minut 3 kilometry. Za jak dlouho dojede do školy?"

D9: "Na kterém obrázku jsou tři každé z čtveřice čtverců šedé"?

Skupiny s nejhoršími výkony pak odlišují položky:

A2: „Ve třídě je 8 chlapců. Dívek je v této třídě dvakrát více než chlapců. Kolik je v této třídě chlapců a dívek dohromady?“

A1: "Na kterém obrázku je polovina teček černých?"

Jak vypadá úspěšnost jednotlivých skupin v agregovaných výsledcích těchto položek?

	Počet chyb	Úspěšnost
A	**5**	**97,3 %**
B	**22**	**88%**
C	**28**	**78,1%**
D	**63**	**58,6%**
E	**127**	**20,6%**

Rozložení se ještě zvýrazní, pokud v položkách T4a a T4b vezmeme jako správné jen dvoubodové odpovědi, které uvádějí i správné vysvětlení.

	Počet chyb	Úspěšnost
A	**9**	**95,1%**
B	**39**	**78,8%**
C	**43**	**66,4%**
D	**76**	**50%**
E	**139**	**13,1%**

Porovnáme-li ono jádro kompetence, charakterizované jednak jeho obsahem, jednak mírou obtížnosti, kterou jsme se ovšem při analýze odpovědí snažili postihnout kvalitativně, nikoli jen kvantitativně (to bychom se dostali do tautologické pasti), se zbývajícími položkami, dostaneme následující obraz:

	Počet chyb	Úspěšnost
A	**41**	**94,4%**
B	**78**	**89,4%**
C	**91**	**82,3%**
D	**160**	**73,7%**
E	**294**	**54,1%**

Agregací výsledků položek, které považujeme za jádro matematické kompetence ve 4. třídě, dostaneme tedy mnohem ostřejší rozlišení úspěšnosti jednotlivých skupin než ve zbývajících položkách. To by mělo svědčit ve prospěch naší hypotézy, jíž je ovšem třeba dále verifikovat, především kvalitativní analýzou dat z běžných školních hodin.

ŘEŠENÍ SLOVNÍCH ÚLOH INTELIGENČNÍHO TESTU

Tuto kapitolu textu spíše volně připojujeme k předchozímu. Obsahuje některé pojmy a závěry, na které jsme výše při analýze testu TIMSS navazovali či přímo odkazovali.

Učitelé a didaktikové matematiky si občas stěžují, že děti "umějí počítat, ale neumějí to ve slovních úlohách používat", že u nich "nemyslí". Na co si vlastně stěžují, co tím říkají?

Předmětem stížnosti přece nemůže být, že rozpoznání správné aritmetické operace není samozřejmostí, že tu děti dělají chyby. Chyby jsou při učení běžné a učitelé si přece nestěžují na to, že musí učit. Co je na chybách ve slovních úlohách tak zvláštní, že vyvolávají tyto nespokojené povzdechy?

Je zřejmé, že naučené správné přiřazení jednoho jazykového kontextu a matematické operace nezaručuje správné přiřazení jiného kontextu, které se neprobíralo. Slovní úlohy nejsou jen zpestřením procvičování početních operací nebo jejich rutinního sledu, které se tu jen balí do různých obalů. Je zjevné, že tu děti musí pochopit něco, co učitelé ve své stížnosti pojmenovávají jen velmi obecně: že musí "myslet". Za jejich stížností cítíme tedy možná rozpaky, v čem spočívá obtížnost slovních úloh, co vlastně by měli děti naučit. Řeč o tom většinou končí u vágního "nadání pro matematiku".

Uvedeme hned na začátku , co se nám zdá snad nejdůležitější. Možná, že část nespokojenosti skryté ve stížnostech učitelů matematiky by mohla pramenit z jejich perspektivy dospělých specialistů. To, čemu tady děti nerozumějí, spočívá z velké části v sémantice jazyka. Dospělý matematik ale možná vychází z tichého předpokladu, že chápání sémantiky textu je samozřejmým východiskem řešení úlohy - a pokud dítě nechápe, nespadá to do jeho oboru.

Chceme ukázat, že ve skutečnosti je tomu jinak.

Materiálem, ze kterého vycházíme, jsou řešení několika slovních úloh obsažených v subtestu IV. revize Stanford-Binetova inteligenčního testu. (Viz přílohu na konci kapitoly.) Test jsme administrovali u dětí ze třídy, kterou sledujeme v rámci longitudinálního výzkumu a kde dobře známe jak jednotlivé děti, tak učitelky, i průběh vyučovacích hodin, zejména matematiky.

Čím se situace testu a výuky liší?

1. Přítomností či absencí intervencí učitele do postupu žáka při řešení úlohy.

2. Škálou úloh použitých v testu od snadných k obtížným, přičemž jejich struktura nerespektuje "co se probíralo".

3. Rozdíl je i mezi situací písemky a testem: Kromě odlišného charakteru úloh (v písemce často reprodukují, "jak to dělali", resp. "jak se to dělá", zvýšeně tedy apeluje na pamětné uchování receptuálních postupů) jde především o to, že v testu dostáváme od většiny dětí nějaké

vysvětlení (často jen náznakové, nejasné), jak postupovaly, a to i v případě objektivně nesprávných postupů.

Ze srovnání obou situací pak vystupují na jedné straně spontánní, intuitivní postupy dětí při řešení testových úloh, na druhé straně povaha intervencí učitele. Řešení testových úloh poskytuje oproti vyučovacím hodinám větší prostor k chybám a k odchylkám od standardních postupů a tedy i k našemu vhledu do nich. V jakém vztahu k povaze těchto chyb jsou běžné intervence učitele, ve kterých bodech působí?

Podívejme se, jakých chyb se děti dopouštěly. Naznačili jsme, že za základní charakteristiku slovních úloh považujeme korespondenci textu a matematického postupu, jinak řečeno nalezení vazeb mezi strukturou jazykového a matematického kontextu.

Budeme-li nejdříve hledat různou obtížnost jednotlivých zadaných úloh (viz Přílohu 3) v různosti matematického kontextu, zjistíme, že ve všech úlohách jde o operace sčítání/odčítání, násobení/dělení. Struktura úloh se liší tím, že

- tyto operace jsou různě kombinovány, jsou různě složité a v důsledku toho se liší počet kroků postupu;
- jsou použita různě velká čísla, ve dvou případech i čísla desetinná ("Hubnutí" a "Máslo").

Složitost zadání činí složitým **první krok postupu**. Jak děti začínají? Podle toho, k čemu jsou vedeny učitelkou, by měly udělat zápis a podle něho sestavit "rovnici" (obecnou formuli postupu výpočtu). Ve skutečnosti nic takového nedělají - k důvodům se vrátíme níže. Buď začínají hned počítat nebo chvíli přemýšlejí a poté počítají. V některých případech uvažovaly nahlas (což přičítáme poměrně neformálním vztahům, které s nimi máme) - a obsah těchto úvah považujeme za příznačný.

"Co je to za blbost?" (po násobení 7*60 v Hubnutí), *"To bysme museli 275*24", "Mám to přičíst? Nebo násobit?" "10:4* (Člun), *to je čtyřikrát... ne, dvakrát... ale co tím zjistím?" "To je divný..."* (po výpočtu 2625:30 v úloze Pan Lipták). *"Možná že kdybych vypočítal začátek, už by to šlo."*

Děti často nejprve dávají dohromady některá čísla ze zadání a pak teprve ověřují, zda to dává nějaký smysl. V těchto případech nevysuzují postup ze sémantiky textu, naopak teprve prostřednictvím vztahů mezi čísly objevují sémantické vztahy mezi výrazy v textu, zejména pak objevují jednak sémantiku explicitně **nevyjádřených členů**, jednak další kroky postupu.

Co je to "nevyjádřený člen"? V případě s "Nábytkem" celková suma, kterou zaplatili ve splátkách. U "Autopůjčovny" suma zaplacená za ujeté kilometry. Dále ukážeme, že struktura zadání je tím složenější, čím více nevyjádřených členů obsahuje. (Obtížnost zadání ovšem variuje také podle formy, kterou mají vyjádřené členy, resp. podle jazykové formy popisu dílčích kontextů.)

Děti velmi často identifikují hledaný nevyjádřený člen jako člen doplňující triádu čísel, tedy jako výsledek zkusmého příkladu. Vztah k objektivně korespondujícímu jazykovému výrazu může přitom být různý:

1. Matematický příklad je jen rychlejším vyjádřením chápaného významu hledaného členu a dítě je schopné stejně dobře (samozřejmě, nepříznakově) dodat jazykový výraz.

2. Příklad je nepříznakovým vyjádřením chápaného konceptu, pro nějž však jazykový výraz musí dítě konstruovat dodatečně, jako zvláštní úkol (příznakově).

Reprezentace nevyjádřeného členu prostřednictvím příkladu je dobře patrná v hodinách: Položí-li učitelka po odeznění úlohy otázku "co musíme vypočítat nejdřív", je jí odpovědí příklad. Chce-li se doptat, co je ale jazykovým korespondentem výsledku, setkává se s potížemi - děti spíše dodají výpočet a výsledek sám; "jazykové pojmenování" či vyjádření, co číslo ale znamená (rozuměj: jakou sémantiku nese v kontextu dané úlohy) je pro ně obtížné a rozhodně ve většině případů sekundární. Nežádá-li učitel jinak, dítě popisuje postup např. ukazováním: "todle vynásobim timdle..."

Intervence učitele tu spočívá jednak v otázce po korespondenci výpočtu a hledaného členu, jednak v pomoci při konstrukci jazykového výrazu.

3. Příklad je jen zkusmou operací - význam příkladu i hledaného třetího členu je sám příznakový. Dítě nevychází z pochopeného konceptu, poskytujícího simultánní strukturaci zadání nebo jeho části, nýbrž takový koncept teprve hledá, v úloze ho teprve ustavuje. Pak můžeme uvažovat o dvou možnostech. Buď je jeho zkusmý krok chybný a pak ovšem nemůže najít žádnou reálnou korespondenci s textem. Děti jsou ovšem schopny i takovéto "falešné korespondence" dotáhnout ke konečnému výpočtu a považovat příklad za vyřešený, ale pro ustavení trvalejších konceptů to nemá žádný význam. Nebo je zkusmý krok správný a dítě se tak - dospělý by řekl náhodně - dostává ke správnému mezivýsledku.

Náhodné nalezení korespondence může mít různý efekt:

V příznivém případě se zkusmým výpočtem dodatečně zpřesňuje význam pojmů užitých v zadání, teprve v korespondenci se strukturou matematické operace si dosud sémanticky i syntakticky vágní struktura textu zadání "sedne" a případné tušení významu se změní v jeho přesné rozpoznání.

V nepříznivém případě dochází dítě ke správnému výsledku, ale "neví jak", nechápe korespondenci o nic více než předtím a může si dokonce vytvářet falešné indikátory či "klíče" k použití té či oné aritmetické operace. To je fenomén, kterého se didaktici matematiky obávají a označují ho za mechanické osvojení, bacil formalismu apod.

Děti hledají první krok řešení složitější úlohy **zkusmým výpočtem**, který v příznivém případě strukturuje část textu zadání - identifikuje v celkovém kontextu kontext dílčí. Z blízkosti čísel je dedukována i sémantická blízkost, příslušnost ke společnému dílčímu kontextu. K hypotéze, že čísla jsou si nějak blízká, patří k sobě, jdou dohromady, vedou často "dobré triády", "triády s dobrým tvarem", zejména takové, kde doplnění je pro dítě viditelné naráz. Budou-li např. v zadání čísla 2, 16, 50, bude dítě hledat první chybějící člen v příkladech 16:2, 50:2. 2*50, případně i 2*16 spíše než v 16*50, 2:16, 50:16 či snad dokonce 16:50. Bude-li v příkladu zadáno 27, 11 a 4, bude pravděpodobnější zkusmé 27-11, protože pak lze 16:4. A nikoli 27+11, protože co pak třeba s 38:4. A už vůbec ne 27:4, 11:4 či dokonce 27:11. Tady je důvod, proč jsou dobří počtáři ve výhodě i při slovních úlohách.

Jak úlohy zde (v testu), tak v učebnicích a ve sbírkách "dobré triády" většinou respektují. Zároveň je to ze strany některých předmětem kritiky, obav, že to děti vede k mechanickým postupům: lze-li čísla dobře dělit, pak je vydělím (bez ohledu na korespondenci se zadáním).

Jestliže jsme ale vyslovili hypotézu, že děti prostřednictvím vztahů čísel vnikají do souvislostí textu, a tímto postupem mohou dojít k žádoucímu pochopení korespondence, jak zjistit, která z možností nastala?

Při řešení testových úloh jsme v mnoha případech po sdělení výsledku od dětí chtěli, aby vysvětlily, jak k němu došly, a co jednotlivé výpočty a jejich výsledky znamenají. Je to poměrně spolehlivý způsob, jak zjistit pochopení úlohy. V některých případech ovšem děti při této rekonstrukci dělaly korekce předchozího postupu. Bylo patrné, že při explicitní rekonstrukci pro druhého dochází k další aktivní práci, ke zvědomění předchozích intuitivních postupů a jejich korespondence se zadáním.

Co tedy rozhoduje o produktivnosti či neproduktivnosti oné náhody, kdy se zkusmý výpočet "náhodou potká" se souvislostmi zadání? Nevíme - hypoteticky lze ale uvažovat o již zmíněné důsledné rekonstrukci a jejím prostřednictvím explicitaci korespondence jednotlivých členů, sémantiky dějů, procesů, vztahů a operací, do nichž vstupují. O dalším možném vlivu se zmíníme později: jde existenci či neexistenci a o možný vliv názorných zobrazení či modelů, zprostředkujících korespondenci textu zadání a postupu výpočtu.

Posledním dílčím důkazem toho, že děti často postupují od rozpoznání číselných vztahů, jaké si "číselné sémantiky" k sémantice textu, jsou případy, kdy děti nejsou schopny popsat další postup, jestliže nejsou schopny dokončit dílčí výpočet. Nejsou schopny říci, co by se získaným číslem dál dělaly, dokud ho nevidí. Možná je to podstatná charakteristika "předalgebraického období"? Mohlo by to naznačovat, že sestavení obecných postupů pro řešení úlohy za použití algebraických výrazů je možné až tehdy, když velmi pokročil strukturální vhled do sémantiky slovního zadání.

Nyní se dostáváme k problematice **zápisu**. Zápis úlohy by přece měl - tak jak je ve škole učen - identifikovat strukturu zadání tak, aby byl postup výpočtu jasný? Jenže podíváme-li se blíže, zjistíme, že požadavky na zápis jsou rozporné. Měl by jednak zaznamenat údaje, jak jsou uvedeny v textu, jednak text strukturovat. Zaznamenání údajů z textu má redukovat text na členy, které jsou nositeli kvantit a na některé vztahy mezi nimi. Ale tato redukce je bez dalšího vhledu pouze lineárním přepisem posloupnosti textu, zaznamenává údaje v tom pořadí, jak je text nabízí. Jenže aby ze zápisu bylo možno odvodit postup, je nutno najít strukturu dílčích kontextů textu a vazeb uvnitř a mezi nimi. Tato struktura není shodná s linearitou textu. Převezme-li tedy zápis lineární strukturu textu, je jeho jedinou výhodou pro hledání struktury to, že děti vidí relevantní údaje naráz, simultánně. Ve čtvrté třídě však jsou děti už natolik dobrými čtenáři, že tuto výhodu zřejmě odmítají jako nepodstatnou.[11]

Možná, že proto neochota dělat zápis handicapuje především špatné čtenáře.

Dospělá logika při stanovení postupu, kterou dětem nabízí učitelka, vychází ze závěrečné otázky úlohy a jakoby opakuje tyto sekvence: "jaká je otázka - co k tomu potřebujeme vědět - co z toho víme - co nevíme = jaká je otázka...", až dojde k místu, kde známe dva údaje a hledáme třetí. Tam začíná postup výpočtu, který v opačném směru sleduje strukturu posloupnosti předchozích otázek. Co se tím děje? Celkový text zadání je postupně strukturován do dílčích kontextů a vztahů mezi nimi. Při dokončení strukturace tvoří každý kontext trojice údajů, z nichž jeden či více hledáme (přitom nemusí být v textu vyjádřeny). Na "konci" či spíše okraji struktury jsou vždy takové "triadické" kontexty, v nichž dva členy známe a třetí hledáme. Prostřednictvím jednotlivých členů jsou kontexty propojeny, takže kompletace triády údajů v jednom kontextu zvyšuje počet údajů v kontextu navazujícím. V každém dílčím kontextu je pak třeba najít také korespondující matematickou operaci.

Už jsme argumentovali, že děti často postupují jinak: Dílčí kontexty hledají prostřednictvím zkusmých výpočtů a k nim hledají korespondující textový kontext. Pokud ho objeví, udělaly jeden krok ve strukturaci textu. Výsledkem pro ně může restrukturace zadání, která už postačuje k vhledu do celkové struktury korespondence. Nebo zkoušejí formulovat alespoň navazující dílčí kontext, třeba dalším zkusmým výpočtem: "co by teď šlo počítat". Jejich postup je tedy: "co můžu vypočítat (rozuměj: který příklad s konkrétními čísly) - co to znamená - k čemu mi to je = co můžu vypočítat dál". Ovšem otázky po korespondenci s jazykovým vyjádřením nejsou vždy důsledné a postup se může zvrhnout i v nekontrolované řazení několika aritmetických operací.

Proč se děti neuchýlí k zápisu po vzoru dospělých? Protože jejich porozumění jazyku zdaleka není samozřejmé. Protože korespondující sémantika kontextů jazyka je nekonečně bohatší, než sémantika číselných vztahů a operací, které ovládly. Děti tu postupují od známého k neznámému, prostřednictvím čísel se učí rozumět jazyku. Už jsme poukazovali na těžkosti, mají-li najít jazykový výraz pro hledaný člen, který předtím vyjádřily a vypočítaly příkladem.

[11] Např. Lada si odmítá něco zapisovat, protože ji to ruší - prý by "to" zapomněla.

Jen dospělý si na základě své jazykové zběhlosti udělá představu o struktuře zadání - ale jen v případě, že jazykové významy jsou u něj dávno poučeny a obohaceny matematikou. Nevidí-li ale strukturu zadání a výpočtu naráz, je před stejným problémem jako dítě: nedokáže napsat pořádný zápis, z něhož by tato struktura byla zřejmá. Lineární zápis kopírující linearitu zadání není prostředkem hledání struktury. Pokud strukturu zadání vyjadřuje, je to buď náhoda nebo výsledek vhledu do struktury - při němž ale už zápis k postupu nepotřebuje. Nabízí-li dospělý dítěti zápis, pak nejde o prostředek hledání struktury. Buď ji zápis obsahuje a je výsledkem bez hledání (dítě pak neobjevuje strukturu textu, nýbrž má ji rozpoznat v zápise, jak mu ho připravený postuluje učitel) nebo neobsahuje o nic víc než sám text.

Jestliže se děti v úlohách vyhýbaly psaní zápisu, bylo to vlastně logické. Buď měly vhled do struktury zadání naráz, předem, a pak byly schopny zkonstruovat správný klasický zápis (který byl pak ovšem pro ně skoro zbytečný), nebo musely strukturu úlohy teprve hledat, ale v tom by jim nestrukturovaný zápis nepomohl.

Ve skutečnosti ovšem učitel tyto problémy cítí a spokojuje se se zápisem v nedokonalé podobě, která často indukuje právě jen první krok. Jeho další práce pak spočívá v tom, že pomáhá dětem objevovat dílčí kontexty a korespondenci jazykových a textových výrazů v nich a že tyto dílčí kontexty řadí do celkové posloupnosti postupu tak, aby se dospělo k výpočtu korespondujícímu s nalezením členu, jehož jazykový korespondent je v otázce. Zkráceně řečeno, učitel dává číslům a matematickým operacím jména ze zadání, pojmenovává ty členy, které nejsou v zadání vyjádřeny, a dbá na to, aby úloha byla vyřešena celá.

Tímto způsobem **se děti ve slovních úlohách učí**:

1. rozumět stále novým jazykovým kontextům jako korespondujícím se základními aritmetickými operacemi;

2. rozumět této korespondenci posléze naráz, vhledem, bez vysvětlování a ujasňování, jako simultánní struktuře (strukturovanému Gestaltu);

3. rozpoznávat tyto kontexty ve složitějším zadání, kombinujícím původní dílčí kontexty tak, že tvoří elementy složitější struktury, a v této struktuře opět porozumět korespondenci jazykových výrazů a posloupnosti aritmetických operací.

Spokojíme se zatím s tímto provizorním závěrem a upozorníme na další fenomén. Právě ve složitějších či složených zadáních se projevuje **nepevnost, vratkost, příznakovost zvládnutí některých dílčích kontextů**. Objevují se tu chyby, ke kterým by v zadáních omezujících se na prezentaci dílčího kontextu jako jednoduchého, nekombinovaného s jinými, většinou nedošlo.

Některé z chyb ovšem jsou důsledkem toho, že přítomnost více dílčích kontextů umožňuje kontexty mísit, sestavovat zkusmé příklady přes jejich hranice. Např. když Slávek a Vanda v příkladu s nábytkem odčítají 6000-275, nerozlišují dva různé triadické kontexty a člen, který je spojuje: mohli bychom ho označit jako "suma zaplacená prostřednictvím splátek", většina ostatních dětí ho identifikuje jako "275*24". Kdyby tu byl jen jeden kontext - např. zadání "každý měsíc zaplatí splátky 275 Kč, kolik zaplatí za 24 měsíců", nebo "namístě stál nábytek 6000 Kč, ve splátkách zaplatili 6600, o kolik zaplatili víc", kde jsou všechny členy kontextu vyjádřeny, s největší pravděpodobností by k takové chybě nedošlo.

Podobně když v úloze s "Autopůjčovnou" 4 děti redukují postup na 590:2. Stačilo by možná vložit otázku identifikující zde nevyjádřený člen: "Kolik Kč z 590 mu zbylo na jízdu po zaplacení denního poplatku?", aby k takové redukci nedošlo.

Ale kromě těchto chyb se objevují i chyby jiného druhu, při kterých je špatně volena matematická operace odpovídající dílčímu kontextu. Už v úloze s autopůjčovnou vidíme, že něco jiného je, když Luděk nejen redukuje kontext na vztah 590 a 2, ale navíc mu přiřazuje operaci 590*2. Eda dokonce neví, co počít s 240. Připočítat? Násobit? Podobně neví Marcel, co s 350 a 2: krát? děleno? - nakonec to nechává být.

Pokud budeme rekapitulovat, pak v úloze s Nábytkem:

- 8 dětí řeší správně bez problémů, dalších 5 postupuje správně, ale dělají chybu ve výpočtu (v násobení);
- 2 děti v prvním kroku násobí, ale nezvládají výpočet a končí, neví, jak by pokračovaly;
- 5 dětí neví, jak postupovat - a my nevíme, kde přesně byl zdroj obtíží.

V úloze s Autopůjčovnou:

- 9 dětí správně bez problémů, 2 správný postup s početními chybami.
- 2 děti postupují správně, ale nezvládnutí početních operací je takové, že není jisté, nakolik drží korespondenci postupu s textem;
- 4 děti redukují postup na 590:2;
- 3 děti chybně přiřazují korespondenci;
- 1 tipla výsledek 4, interpretace případné logiky jsou tu zcela nejisté;
- jednomu nebyla úloha předložena.

V úloze s Hubnutím:

- 8 dětí správně bez problémů;
- 3 děti (u jednoho si nejsme jisti) správně postup, ale dělají chyby, když načítají násobky 1,5;
- 8 (možná až 10, u dvou si nejsme jisti) dalších dětí pracuje samozřejmě s rozdílem 15, resp. s postupem mezi 60 a 75, ale buď si neví vůbec rady nebo chybně přiřazují operaci s čísly 15 a 1,5 - to znamená korespondenci operace v rámci dílčího kontextu.
- Jen 1 tu mísí kontexty a zkouší 1,5*7; 60*1,5; 7*60; 75:1,5. (Vidíme, že vtahuje do nepatřičný kontext: týden jako 7 dní. Možná právě tohle mu kontext zkomplikovalo.)

Na postupu nejlepších dětí v nejsložitějších úlohách byla dobře patrná postupná strukturace úlohy, postupné objevování struktury a postupu po prvních výpočtech.

V úloze s Panem Liptákem, kterou jsme předložili jen 10 dětem:

- 5 dětí neví, takže nevíme nic o jejich úvahách;
- 2 správně;
- 2 počítaly jen s jedním týdnem pracovní doby (hrálo tu roli slovní vyjádření číslovky a pomohl by tak přece jen klasický zápis?). Jeden z nich pak postup dokončil, byť s početními chybami. Druhá nevěděla, jak dál. Když porovnáme její nezvládnutí, když měla pokračovat s číslem 1425, s tím, jak hledal další postup chlapec, který pracoval se správným rozdílem 225, je patrné, jak správné číslo dávalo v dalším postupu lepší triádu a tím i lepší možnost jeho prostřednictvím objevit další postup.
- 1 se pokusila pouze o první krok "2625:30", pak se slovy "to je divný" rezignovala na další postup.

U úlohy s Člunem (předložena 10 dětem):

- 5 neví. (Míťa neví jak začít. *"Pak by to možná už šlo."*)
- 1 správně,
- 1 redukoval postup na 2 krát první cesta;
- 1 úmyslně zanedbala rychlost proudu, výpočet odhadem (který ovšem dokazuje přibližné chápání funkční závislosti rychlosti a času);
- 1 zahrnul do výpočtu pouze rychlost proudu a obě cesty počítal stejně;
- 1 dospěla k výsledku 8 hodin, bohužel jsme nezjišťovali postup, kterým k němu dospěla. Ale možné kombinace zadaných čísel, jimiž lze dospět k 8, svědčí pro nepochopení korespondence kontextu dráhy, rychlosti a času s operací násobení/dělení.

Zdá se tu patrné, že dokonce i korespondence operace sčítání a odčítání, která je v kontextech zadání pracujících s kusy bezpečně zvládnuta, může při prezentaci nových kontextů, pracujících s veličinami méně konkrétní, bezprostředně nepočitatelné povahy, činit dětem potíže.

Ještě více problémů však činí vzájemná diferenciace operací násobení/dělení. Hezké příklady toho poskytuje úloha s Jablky.

Byla předložena 11 dětem, z toho:

- 2 nevědí nebo jen hádají (jeden při odhadu "tak 20" podle vlastního vyjádření nic nepočítal);
- 5 dochází k výsledku 23, a to shodným postupem, v němž považují "zisk" 30 Kč za "peníze získané prodejem". Postup pak je 30 Kč : 2 Kč/jablko + 8 zbylých jablek = 23 jablek. Kromě celkové sémantické redukce kontextu je ovšem korespondence postupu správná.
- 1 použil redukci na jiný dílčí kontext při shodné redukci sémantických předpokladů (že totiž Iveta koupila jablka za stejnou cenu, jako je pak prodávala) a uvažoval takto: 50 Kč (za bednu) : 2 Kč/jablko = 25 jablek.
- Ve 3 případech dostáváme tyto zajímavé postupy:

Pepík: 50 Kč * 2 Kč/ jablko = 100 jablek;

Vilém: 2 Kč/ jablko * 30 Kč = 60 jablek;
Milena: (30 Kč : 2 Kč/jablko) + (8 jablek * 2 Kč/ jablko) = 15 jablek + 16 jablek = 31 jablek.

Všechny tři děti patří ke skupině s nejlepšími výsledky v inteligenčním testu, Milena je považována za nejlepší žákyni. Úlohy "s penězi" jsou přitom učitelkou považovány za takové, které děti chápou nejlépe: co nepochopí jinak, pochopí prostřednictvím příkladu s penězi.

Chceme tu poukázat na dvě věci. Jednak jsou tyto chyby příkladem toho, jak začlenění do složitěji strukturovaného kontextu ukáže nesamozřejmost chápání vztahů, které se v jednoduché struktuře zdají už zcela zvládnuty. Přičítáme to tomu, že zřejmě zůstávají pro dítě příliš "rozvinuté" (rozbalené) v sukcesivních zprostředkováních textových a matematických výrazů, nejsou dostatečně simultaneizovány.

Kromě toho tu ale vystupuje **sémantická obtížnost (nejednoznačnost) operace násobení/dělení**. V čem spočívá?

Při sčítání/odčítání čísla v zadání reprezentují vždy dva soubory předmětů téže sémantické kvality, téže třídy, s nimiž se provádí operace. Jde o rozpoznání operace, sémantický obsah výsledku je jasně dán.

Násobení/dělení přináší mnohem složitější strukturu:

- Jeden činitel vyjadřuje počet předmětů, ale nikoli sám o sobě, ale vždy vztažen k předmětu jiné kvality, jiné povahy, který první předměty nějak obsahuje, je jejich souborem. První činitel nazýváme **vztažným činitelem** (případně členem; je nutně vyjádřen vztažně - jako "ptáci v krmítkách", "děti v lavicích", "tužky na jedno dítě", "týdny za měsíc", "kilometry v hodině"). Druhý činitel pak je počtem souborů, počtem opakování jednoho souboru v prostoru či čase. Celkový počet (celek, součin) pak vyjadřuje druhou kvalitu, která už byla přítomna v sémantice vztažného členu. Jde tedy o dvě kvality, dvě veličiny, uvedené do vztahu vztažným členem.

V našem případě je vztažným činitelem cena 2 Kč/jablko, počtem souborů je počet jablek. Celek jako součin těchto dvou činitelů může být sémanticky obsazen pouze "korunami" - ovšem ve významu "tržby", "utržených peněz", nikoli ceny!

Vidíme, že vedle matematické operace samotné musí být správně identifikováno obsazení jejích jednotlivých členů. V tom ovšem není rozdíl oproti sčítání/odčítání. Ten je v tom, že zde v případě nesprávného obsazení hrozí sémanticky prázdná konstrukce, která neodpovídá nejen kontextu zadání, nýbrž vůbec žádnému potenciálnímu kontextu. Zdá se, že rozpoznání nesprávnosti operace dodatečným ověřením korespondence s textem je pak obtížnější, nesprávnost neexistujícího, nemožného jako by neměla svůj zjevný protiklad? Mísení sémantiky vztažného členu se sémantikou obou zbývajících počtů (souborů i celku) a jejich záměny vytvářejí situaci, kde sémantika výsledku je jakoby libovolná. Násobením i dělením jablek a korun jako bychom se mohli dostat i k jablkům, i ke korunám.

Zkusmý závěr by mohl znít: Zatímco didaktika matematiky (především autoři učebnic) vede děti ve slovních úlohách patrně k pochopení stále složitějších případů funkční závislosti, k postupnému chápání matematické funkce jako souvislosti dvou kontinuí kvantitativních hodnot, děti mají problém se sémantickou identifikací těchto veličin a jejich vztahu, vyjádřeného vztažným členem.

Ale možná se tento rozpor řeší ve škole spontánně, sám od sebe? Postupným probíráním jednotlivých případů či sémantických typů funkční závislosti a procvičováním příslušného sémantického obsazení členů příkladu?

Ovšem není-li k dispozici formalizace rozlišení těchto sémantických pozic, kterou jsme zde museli vytvořit, abychom vůbec problém popsali, vytvoří děti obecnější koncept, shrnující jednotlivé sémantické kontexty do obecnějšího typu? Nebudou bez něj tyto kontexty brány odděleně a úloha, v níž 2 traktory zorají za den 5 hektarů tak bude navždy chápána jako podobnější úloze, v níž 3 traktory zorají pole za 4 dny, než úloze, kde 3 housky stojí 6 korun?

Nespoléhá škola příliš právě na bezprostřední přiřazení jazykového (textového) a matematického kontextu? A pokud se takové přiřazení při řešení úlohy vytvoří, není vzhledem k potenciální mnohoznačnosti obou příliš nestabilním útvarem než aby mohlo sloužit jako koncept zobecňující logiku vzájemných souvislostí? Klademe si tu otázku, jakou povahu by mohly mít obecnější koncepty, když pochybujeme o tom, že se vytvářejí bezprostředním zobecněním mnohonásobně vytvořených korespondencí násobení/dělení na jedné straně a různých sémantických podob textového zadání na straně druhé.

1. Když učitel vysvětluje korepondenci zadání s matematickou operací, která (korespondence) není dítěti jasná, kreslí schémata, ukazuje, nechává přehrávat scénky apod. V našem případě by možná říkal:

"Já ti tam ti jabka nakreslím, podívej: jedno jabko - dvě koruny." A kreslí jablko a do něj dvoukorunu: jablko jako soubor dvou korun, dvě koruny v jednom jablku. Nakreslí ještě čtyři jablka a bude s ptát: "Když prodám pět jablek, kolik je to korun? A když šest? (už bez kreslení) Deset? Dvacet? Padesát? Tak co mám, když prodám padesát jablek? Sto čeho? Jablek nebo korun?"

Učitel při vysvětlování korespondence (tzn. pokud se nespokojí jen se zamítnutím nesprávné a potvrzením správné korespondence) vytváří ad hoc modely (grafické, gestické, ale také scénické či dramatické, ale většinou různě smíšené). Jsou jen provizorní, nestálé, závislé na situaci, nejsou zakotveny ve stabilním a diferencovaném znakovém systému, a jsou opuštěny jako nepotřebná opora ve chvíli, kdy dojde k momentálnímu přiřazení textového a matematického kontextu.

Neskrývají však tyto modely potenciál logických konceptů, který některé děti objevují spontánně, zatímco jiným zůstává utajen, protože není ve škole systematicky používán a kultivován?

2. Když se děti v první třídě začínají učit příklady na sčítání a odčítání, je mnoho pozornosti věnováno systematickému zobrazování počtů a operací s nimi. Ukázali jsme jinde[12], že vývoj chápání příkladu je možno považovat za vývoj logiky těchto "pomocných nástrojů", která se projevuje i ve způsobu počítání na prstech. Jak tady tak při pozdější analýze sčítání/odčítání dvouciferných čísel[13] jsme zpětně dospěli k pochybnostem, zda tento vývoj názorného zobrazování příkladu nebyl u některých dětí opuštěn - ve prospěch kanonicky naučených "příkladů do dvaceti" - příliš brzy a zda to nevedlo k některým obtížím, kdy příklad jako by se řešil v logice symbolické skládanky.

Naproti tomu u násobení/dělení byla fáze používání pomocných zobrazení velmi krátká.[14] Žádné z nich pak nenabylo statutu techniky počítání, kterou je možno spolehlivě použít, selže-li paměť. Nic podobného jako používání počítadla či prstů se děti při násobení neučily systematicky, bylo to víceméně ponecháno jejich objevování. Nejsou tedy potíže se sémantickou korespondencí násobení/dělení ozvěnou toho, že děti neumějí násobit a už vůbec ne dělit na prstech? Že tu oproti sčítání/odčítání chybí stabilní "nástroj" počítání, logika jehož používání vede ke vzniku zprostředkujícího obecného konceptu?

ZÁVĚR

[12] Rendl, M.: Vývoj počítání v první třídě. In: Pražská skupina školní etnografie: První třída. PedF UK, Praha 1998, s. 171 - 228.

[13] Rendl, M.: Sčítání a odčítání dvouciferných čísel. In: Pražská skupina školní etnografie: 3. třída. (Příloha dílčí zprávy o řešení grantového projektu GA ČR.) Praha 1998.

[14] Srv. Rendl, M.: Násobení ve 2. třídě. In: Pražská skupina školní etnografie: 2. třída. (Příloha závěrečné zprávy o řešení grantového projektu GA ČR.) Praha 1997.

Pokud slovní úlohy vycházející ze zadání, která vyžadují identifikovat a diferencovat korespondenci s paradigmatem "násobení/dělení", opravdu tvoří jádro matematické kompetence či alespoň jeho podstatnou část, pak navrhujeme následující hypotetické závěry jako relevantní pro celou kapitolu.

1. Při matematických slovních úlohách se děti učí identifikovat strukturu v textu: strukturovat text jako simultánní strukturu dílčích kontextů a vztahy uvnitř jednotlivých dílčích kontextů, tak vzájemné souvislosti mezi nimi. Slovní úlohy redukují subjektivní libovůli asociací, nutí hledat takovou strukturu sémantických souvislostí, která vede k výpočtu. Na druhé straně matematika redukuje sémantické souvislosti každého dílčího kontextu na pouhé hledání třetího členu triády a celkový kontext strukturuje právě do těchto dílčích triád.

2. V matematických slovních úlohách se děti učí identifikovat strukturu textu: musí strukturovat text jako simultánní strukturu dílčích kontextů se vztahy jak uvnitř těchto kontextů tak mezi nimi. Slovní úlohy redukují subjektivní arbitrárnost asociací, vyžadují hledat takovou strukturu sémantických vazeb, která vede k výpočtu. Na druhé straně matematika redukuje sémantické vazby každého dílčího kontextu na pouhé hledání třetího triadického členu a strukturuje celý kontext právě do těchto dílčích triád.

3. Slovní úlohy zpřesňují vágní povahu původních (subjektivně percipovaných) sémantických souvislostí (i když jen jedné jejich roviny - ovšem té, kterou text prezentuje jako podstatnou) vytvořením korespondence s matematickými operacemi a číselnými vztahy. Matematizuje tak sémantiku textového kontextu a jednotlivých výrazů.

Je to vlastně možná především matematika, která takto pracuje na diferenciaci sémantiky více a soustavněji než čeština. Čeština se soustřeďuje na analýzu a teoretizaci především paradigmatických vazeb (a to hlavně v rámci metajazyka gramatiky, a jen částečně lexikografické sémantiky: synonyma, antonyma a hypero-hyponyma) a sémantiky se snad ještě dotýká v posledních letech školní docházky analýzou formální stránky syntaxe. Je to matematika, která zprostředkovaně analyzuje sémantiku různých syntagmat a uvádí ji do korespondence se svými operacemi.

4. Máme-li pravdu se svou domněnkou, pak na jedné straně tlak sémantické šíře variující v textech úloh a na straně druhé nabídka obsažená ve vysvětlovacích postupech učitele přispívají k vytvoření tichých, skrytých konceptů zobecňujících logiku přesahující jednotlivé, původně separované sémantické kontexty. Je však možné, že existují i jiné formy a jiné způsoby vzniku obecných konceptů.

5. Pohyb ve struktuře textu a jeho matematických korespondencí se děje jako neustálé přechody mezi simultánními strukturacemi, v nichž kterýkoli výraz kterékoli z korespondujících rovin (jazykové, matematické, názorné) jednoduchého kontextu může zastupovat celý kontext jako jeho synekdocha, a sukcesivními strukturacemi, v nichž je každý dílčí kontext či jeho synekdocha rozepsán do plného obsazení pozic v posloupnosti operace směřující k nalezení chybějícího členu.

LITERATURA:

Straková, J., Palečková, J., Tomášek, V.: Třetí mezinárodní výzkum matematického a přírodovědného vzdělávání. Souhrnné výsledky žáků 4. ročníku. Výzkumný ústav Pedagogický, Praha 1997.

Straková, J., Palečková, J., Tomášek, V.: Třetí mezinárodní výzkum matematického a přírodovědného vzdělávání. Výsledky žáků 7. a 8. ročníků: Matematika. Ústav pro informace ve vzděláván, Praha 1997.

Straková, J., Palečková, J., Tomášek, V.: Třetí mezinárodní výzkum matematického a přírodovědného vzdělávání. Výsledky žáků 7. a 8. ročníků: Přírodovědné předměty. Ústav pro informace ve vzděláván, Praha 1997.

PŘÍLOHA 1 - SLOVNÍ ÚLOHY ZADÁVANÉ V RÁMCI INTELIGENČNÍHO TESTU

Pan Lipták

Pan Lipták dostává pravidelný plat 30 Kč za hodinu při čtyřicetihodinovém pracovním týdnu a za každou přesčasovou hodinu dostává 1 a 1/2 svého hodinového platu. Za minulé dva týdny pan Lipták nevynechal ani jeden pracovní den. Odpracoval několik hodin přesčas. Jeho hrubý plat činil 2 625 Kč. Kolik přesčasových hodin pan Lipták za minulé dva týdny odpracoval?

Máslo

V místní prodejně mají na prodej dvě balení másla. Balení A o váze 20 dkg stojí 18 Kč, balení B o váze 15 dkg stojí 10,80 Kč. Které máslo je lacinější?

Nábytek

Kus nábytku stojí 6000 Kč. Majitelé ho budou splácet 24 měsíců v měsíčních splátkách po 275 Kč. O kolik víc musí zaplatit v měsíčních splátkách za tento kus nábytku, než by zaplatili, kdyby hned při nákupu uhradili plnou cenu?

Hubnutí

Jedna žena vážící 75 kg chce zhubnout na 60 kg. Zhubne-li za týden o 1,5 kg, kolik týdnů bude potřebovat k tomu, aby dosáhla vytčeného cíle?

Autopůjčovna

V půjčovně aut požadují za zapůjčení auta 240 Kč za den plus 2 Kč za každý ujetý kilometr. Pan Novák si půjčil auto na jeden den. Jeho účet zněl na 590 Kč. Kolik najezdil kilometrů?

Člun

Monika vlastní motorový člun, který jede rychlostí 10 km za hodinu. Pojede navštívit svého přítele 4 km proti proudu řeky a pak se vrátí domů. Běžná rychlost proudu je 2 km za hodinu. Jaký bude výsledný čas, který musí Monika strávit na cestě k příteli a zpět?

Jablka

Iveta koupila bednu jablek za 50 Kč. Jablka prodávala divákům na sportovním stadióně po 2 Kč za jeden kus. Po zápasu jí zůstalo 8 jablek. Měla-li z prodaných jablek čistý zisk 30 Kč, kolik jablek bylo v bedně na začátku?

PŘÍLOHA 2 - ÚSPĚŠNOST SKUPIN V MATEMATICKÝCH POLOŽKÁCH

Uvádíme souhrnnou distribuci počtu chyb se snahou uspořádat položky tak, aby zóny obtížnosti vytvářely pokud možno co nejsouvislejší oblasti. Ne vždy se to ovšem daří, přesto tabulky podávají přehled o oblastech bezpečné znalosti jednotlivých skupin (bílé pozadí), oblastech velké části chybujících (šrafovány vodorovně) a oblastech, kde selhává většina skupiny (šrafovány svisle).

sk.\pol.	D7	G3	A5	D5	K2	T1a	K5	G2	A4	U3c	A3	A1	E3	K8
A	-	-	1	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-
B	-	-	-	-	1	-	1	-	-	-	1	-	-	-
C	-	1	2	-	2	-	2	-	-	3	3	-	-	3
D	-	3	-	3	1	-	2	-	2	2	2	1	1	3
E	1	1	1	2	2	3	3	4	9	6	7	10	14	11

sk.\pol.	E2	K1	D6	T5	T1b	U3a	U1	U5	A2	U4	K3	U2	E1	T3
A	-	-	-	-	-	-	-	-	1	-	-	-	-	-
B	-	-	-	1	2	4	1	1	1	-	2	2	2	3
C	-	4	2	1	1	-	-	-	-	-	1	2	5	4
D	4	3	3	3	3	4	6	5	4	7	13	9	6	6
E	4	5	10	14	17	14	10	11	12	11	13	17	8	16

sk.\pol.	D8	K9	K4	G4	U3b	G1	D9	K6	T4a	T4b	T2	K7	E4	
A	-	1	-	4	1	2	-	1	-	-	3	13	18	
B	1	1	4	3	5	1	7	4	1	2	8	19	22	
C	4	5	4	9	6	5	5	3	3	4	5	14	16	
D	5	6	6	7	8	9	9	11	11	11	11	19	14	
E	11	12	12	11	17	16	18	9	14	13	18	17	18	

Další 3 tabulky jsou obdobou předchozích, místo počtu chyb je však uvedeno procento úspěšnosti řešení.

sk.\pol.	D7	G3	A5	D5	K2	T1a	K5	G2	A4	U3c	A3	A1	E3	K8
A	100	100	96	100	95,7	100	100	100	100	100	100	100	100	100
B	100	100	100	100	95,7	100	95,7	100	100	100	95,7	100	100	100
C	100	93,4	87,5	100	87,5	100	87,5	100	100	81,3	81,3	100	100	81,3
D	100	84,2	100	84,2	94,7	100	89,5	100	89,5	89,5	89,5	94,7	94,7	84,2
E	95	95	95	90	90	85	58	80	55	70	65	50	35	45

sk.\pol.	E2	K1	D6	T5	T1b	U3a	U1	U5	A2	U4	K3	U2	E1	T3
A	100	100	100	100	100	100	100	100	95,7	100	100	100	100	100
B	100	100	100	95,7	91,3	82,6	95,7	95,7	95,7	100	91,3	91,3	91,3	87
C	100	75	87,5	93,4	93,4	100	100	100	100	100	93,4	87,5	68,8	75
D	79	84,2	84,3	84,2	84,2	79	68,4	73,7	79	67,2	31,6	52,6	68,4	68,4
E	80	75	50	30	15	30	50	45	40	45	35	15	60	20

sk.\pol.	D8	K9	K4	G4	U3b	G1	D9	K6	T4a	T4b	T2	K7	E4	
A	100	95,7	100	82,6	95,7	91,3	100	95,7	100	100	87	43,5	21,7	
B	95,7	95,7	82,6	87	78,3	95,7	69,6	82,6	95,7	91,3	65,2	17,4	4,3	
C	75	68,8	75	43,8	62,5	68,8	68,8	81,3	81,3	75	68,8	12,5	0	
D	73,7	68,4	68,4	63,2	57,9	52,6	52,6	42,1	42,1	42,1	42,1	0	26,3	

E	45	40	40	45	15	20	10	55	30	35	10	15	10	

PŘÍLOHA 1 - TEST TIMSS