“MATEMATICKÉ MYŠLENÍ” V TESTU STANFORD-BINET: OD 2. DO 5. TŘÍDY

Miroslav Rendl

OBSAH

Předkládáme výsledky dvou subtestů testu Stanford-Binet v jedné ze tříd (Modré) základního souboru sledovaného v longitudinálním výzkumu. Test byl ve třídě administrován opakovaně od druhé zatím do páté třídy ZŠ. Navazujeme tím na naše předchozí zprávy ze druhé až čtvrté třídy, které jsou součástí každoročních zpráv Pražské skupiny školní etnografie.

V subtestech Počty a Číselné řady jsme mj. sledovali stabilitu řešení úloh při opakovaném zadávání. U každé úlohy jsme sledovali, v kolika případech při zadání jednotlivým dětem dojde k tomu, že po řešení v jednom roce není v následujícím roce úloha řešena. Tato non-reliabilita v čase může být výrazem různých okolností - toho, že úloha byla řešena náhodně, řešení není výrazem trvalé kompetence, u slovních úloh k ní může dojít v důsledku banální numerické chyby, může však být také výrazem nespolehlivého skórování úlohy. To vše snižuje výpovědní hodnotu údaje o úspěšnosti řešení.

Kvantitativní hodnota údaje o reliabilitě v čase je do jisté míry uměle zvýšena tím, že jsme často nezadávali úlohy, jež byly v předchozím roce dítětem řešeny - prostě proto, že by se tím čas testování prodloužil vysoko nad únosnou mez. Přesto je počet opakovaných zadání téže úlohy ve dvou či více po sobě následujících letech většinou dostatečný k tomu, abychom mohli úlohy srovnat navzájem mezi sebou. Procento pak udává poměr případů, v nichž nedošlo k inkonzistenci, k celkovému počtu případů opakovaného zadání úlohy.

V textu vycházíme z reálného pořadí úloh a zkoumáme, které úlohy jsou dostupné pro jednotlivé ročníky ZŠ. Vývoj výkonů přitom sledujeme nikoli jen prostřednictvím kvantitativních údajů za celou třídu, nýbrž diferencujeme jednotlivé skupiny dětí podle jejich dlouhodobé úspěšnosti v celém testu Stanford-Binet. Zároveň kontrolujeme, nakolik se nárůst úspěšnosti řešení týká téže skupiny dětí - nakolik totiž nárůst počtu řešitelů znamená, že k těm, kteří úlohu řešili už v předchozím roce, přibývají další řešitelé. Řeší-li totiž v jenom roce úlohu 46% dětí a v dalším 60%, neznamená to nijak automaticky, že k loňským řešitelům přibyli letos např. čtyři noví řešitelé. Údaj může také skrývat to, že právě jen 4 děti (16%) řeší tuto úlohu znovu úspěšně, kdežto zbytek letošních řešitelů řeší úlohu poprvé, zatímco většina loňských ji naopak neřeší.

Provedli jsme dále analýzu vývoje pořadí dětí z hlediska výkonů jednotlivých subtestech i v celém testu, které nám umožnilo děti rozčlenit do pěti skupin.

Skupina A: Lada, Pepík, Čenda, Gita, Milena (od 3. třídy), Fanda

Skupina B: Bořek, Vilém, Míťa, Jindra (od 3. třídy), Tomáš (jen v 5. třídě)

Skupina C: Martin, Slávek, Marcel, Nina, Doriana (jen ve 2. třídě),
Skupina D: Kiška, Vráťa, Mikuláš (ve 2. a 3. třídě)
Skupina E: Denisa, Evžen, Luděk, Vanda, Eda (od 3. třídy), Aleš (ve 2. a 3. třídě), Kája (ve 2. a 3. třídě), Radek (jen ve 3. třídě), Helena (jen v 5. třídě).

V textu většinou pracujeme jen s hrubým členění na skupinu A+B a ostatní. Podrobnější členění by text ještě více zatížilo.

VÝSLEDKY SUBTESTU POČTY[1]

Nejsnazší úlohy

Subtest Počty má celkově 40 úloh, prvních 10 však je natolik snadných, že nebyly dětem ani ve 2. třídě, kdy jsme s opakovaným administrováním testu začali, zadány.

Přestože pořadí úloh v subtestu má vytvářet vývojovou škálu, v níž úlohy s vyšším pořadovým číslem jsou obtížnější a odpovídají pozdějšímu vývojovému období, skutečnost je naprosto odlišná. Reálným výsledkům našeho souboru neodpovídá ani pořadí obtížnosti úloh, ani úroveň výkonů předpokládaná pro jednotlivá věková pásma.

Následující tabulka udává pořadí obtížnosti jednotlivých číselných řad v jednotlivých ročnících. Pro srovnání jsou uvedeny kurzívou i výsledky celého souboru sledovaného v longitudinálním výzkumu za třetí a pátý ročník. Procenta udávají relativní četnost dětí, které úlohu vyřešily. V posledním sloupci je připojen údaj o "vývojové konzistenci" úlohy, její reliabilitě v čase. Udává procento případů, kde při opakovaném zadání úlohy nenastala inkonzistence - tedy případ, že po správném řešení v jednom roce nebyla úloha v následujícím roce řešena správně. Tento údaj ztrácí vypovídací schopnost na okrajích škály, kde jsou úlohy převážně jen plněny, resp. neplněny a k nekonzistenci tak tato nediferencovanost nedává příležitost.

[1] Znění či popis úloh viz v Příloze.

Počty

Pořadí	Úkol č.:	**2. tř.**	**3. tř.**	*3. tř. - celý soubor*	**4. tř.**	**5. tř.**	*5. tř. – celý soubor*	Výv. konzist.
1	18 (počet kostek)	**100%**	**92%**	*95%*	**100%**	**100%**	*99%*	96%
2	11 (sčítání)	**100%**	**100%**	*100%*			*100%*	100%
3	13 (děti s míčem)	**100%**	**100%**	*100%*			*100%*	100%
4	16 (délka)	**96%**	**100%**	*96%*	**100%**		*100%*	100%
5	12 (řada)	**96%**	**100%**	*100%*			*100%*	100%
6	14 (tužky)	**96%**	**100%**	*100%*			*100%*	100%
7	23 (mince)	**67%**	**100%**	*98%*	**100%**		*98%*	100%
8	24 (písek)	**58%**	**85%**	*82%*	**100%**	**100%**	*96%*	92%
9	30 (5korun)		**62%**	*59%*	**86%**	**96%**	*90%*	100%
10	22 (dvoukoruna)	**13%**	**50%**	*67%*	**77%**	**92%**	*91%*	92%
11	15 ("mezi")	**42%**	**81%**	*65%*	**91%**	**88%**	*88%*	100%
12	21 (hrníčky)	**17%**	**54%**	*63%*	**82%**	**88%**	*87%*	96%
13	32 (konve 1)		**12%**	*25%*	**43%**	**75%**	*76%*	100%
14	36 (autopůjčovna)		**0%**	*2%*	**41%**	**75%**	*62%*	100%
15	34 (hubnutí)		**4%**	*8%*	**36%**	**71%**	*59%*	95%
16	19 (dělitelnost)	**0%**	**23%**	*33%*	**45%**	**67%**	*70%*	76%
17	31 (nábytek)		**0%**	*3%*	**36%**	**67%**	*65%*	91%
18	17 (koláč)	**4%**	**15%**	*25%*	**41%**	**54%**	*73%*	96%
19	25 (dělitelnost)	**0%**	**12%**	*17%*	**36%**	**54%**	*63%*	96%
20	20 (čtverec)	**21%**	**31%**	*33%*	**50%**	**46%**	*65%*	76%
21	33 (konve 2)		**4%**	*7%*	**14%**	**46%**	*45%*	94%
22	38 (bratři)		**0%**	*1%*	**32%**	**42%**	*41%*	100%
23	28 (čtverec)	**0%**	**0%**	*13%*	**5%**	**33%**	*39%*	96%
24	27 (máslo)	**4%**	**23%**	*18%*	**36%**	**29%**	*43%*	79%
25	26 (Lipták)	**0%**	**0%**	*1%*	**9%**	**21%**	*19%*	100%
26	35 (dlaždice)		**0%**	*0%*	**0%**	**21%**	*19%*	100%
27	39 (člun)				**5%**	**8%**	*4%*	100%
28	29 (zlomek)		**0%**	*0%*	**0%**	**8%**	*2%*	100%
29	37 (taxi)		**0%**	*0%*	**0%**	**0%**	*2%*	100%
30	40 (jablka)				**0%**	**0%**	*2%*	100%
	Průměr HS	18,13	21,46	22,10	25,64	28,79	*29,01*	
	Směrodat. odch. HS	1,81	2,48	3,16	3,99	4,01	*4,44*	

V nejlehčích 7 úlohách nacházíme už v průběhu 2. a 3. třídy jen zcela ojedinělé chyby. Jsou to úlohy 11, 12, 13, 14, 16, 18, 23 (Mince), v nichž se celkem 28 testovaných dětí, z nichž 22 bylo ve 3. třídě testováno opakovaně, dopustilo 4 chyb, přičemž žádná z nich nebyla opakovaná.

Úloha 23 (Mince) nebyla na počátku testování ve 2. třídě omylem předložena 8 dětem kvůli svému umístění v subtestu (jakoby předpokládajícímu mnohem vyšší věkovou úroveň). Lze mít za jisté, že by ji byly splnily stejně jako 16 zbývajících. Podle našich zkušeností jde o úlohu, kterou bez problémů zvládají děti v první třídě.

Také úloha 24 (Písek) je snadná už ve 2. třídě. Také tato úloha nebyla ve 2. třídě zadána 8 dětem. Ze zbylých 16 dětí dělají 2 děti chybu, jeden z nich ji opakuje v 3. třídě, kde ji dělají ještě další 3. Z těchto 5 dětí je jedno ze skupiny C, ostatní z D a E. Ve 4. třídě už se chyba neobjevuje.

Řešení těchto 8 úloh můžeme tedy považovat za výraz jakési bazální úrovně té oblasti matematických kompetencí, jíž se subtest dotýká:

Vyjádřit počty jako čísla, identifikovat shodné počty při různém tvaru, uspořádat počty podle číselné řady, provádět součet názorných počtů při zadání "dohromady" a "přichází", odečíst délku na pravítku (je-li ovšem kraj tužky přiložen k nule a jednotky jsou vyjádřeny v zadané otázce!). Nenastává problém při spočítání číselné hodnoty mincí, která se liší od počtu kusů. Ten jsme mohli občas pozorovat v první třídě, zde už je mince při otázce "kolik korun...?" bezpečně chápána jako číslo. Malé problémy nastávají jen u chápání speciálního (nejlehčího) případu poměru "dvakrát tolik". Vztah velikosti krabic a množství písku v nich při graficky i číselně jasně vyjádřeném "dvojnásobku" přesto nedělá naprosté většině dětí problémy.

Ve 2. třídě také nenacházíme v subtestu Počty úlohu, která by děti výrazněji diferencovala, a to ani podle úrovní úspěšnosti v celém testu (skupiny A - E), ani podle výsleků v subtestu. Ten sám příliš nediferencuje: Kdyby výsledky nebyly zkresleny nezadáním úloh 23 a 24, dosáhla by většina dětí (až 21 dětí z 24) výsledku 18 - 20 bodů hrubého skóru.

Dvěma úlohami, které zde především vytvářejí rozdíly mezi dětmi, jsou úloha 15 (Mezi) a 20 (Čtverec 9).

Na otázku **úlohy 15** "na kterém (obrázku) je děvčátko mezi stromem a chlapcem" odpovídá správně 10 dětí, z nichž 5 je ze skupin A a B:

	skupiny A a B (9 dětí)	skupiny C, D a E (15 dětí)
Správně	**5**	**5**
Nesprávně	**4**	**10**

Souvislost je tu zřetelná, ale zatím nijak jednoznačná. Ostřeji bude úloha diferencovat ve 3. třídě. Přesto stojí za konstatování, že v **úloze chybují všechny děti ze skupiny E**.

Naprosto převažující chybou je řešení "a": obrázek s pořadím (odleva doprava) "děvčátko - strom - chlapec" - volí ho 9 dětí.

Z dětí skupiny E nikdo nevolí variantu "d", zatímco z ostatních skupin ji volí 4 děti (1 odpověď je "nevím"). Ale znamená to něco? Autoři testu zkomplikovali zbytečně obrázky tím, že na dvou obrázcích mají obě postavičky kalhoty, takže může být sporné, zda jedna z nich je dívka. Řešení "d" (kde chlapec je vlevo vpředu a pak vzadu odleva strom a děvčátko) pak může vycházet z vyloučení obrázku "a" proto, že na něm žádné děvčátko není. Jinak mají obrázky "a" i "d" podobnou strukturu uspořádání: uprostřed strom, po stranách postavičky. Pro přitažlivost těchto chyb je možné dvojí vysvětlení:

1) Přitažlivost grafické figury se symetrickým uspořádáním s nejvyšším? s odlišným? objektem uprostřed.

To by pak ukazovalo k tomu, že výraz "mezi" evokuje symetrické uspořádání, vytváří jakýsi "halóefekt", který potlačuje diference nesené syntaktickou pozicí členů v zadání. Je to něco podobného tomu, když děti jako by často "neslyšely" instrumentál, označující v zadání pozici dělitele a obsazovaly operaci dělení jinak, podle jakési spontánní evokace kontextu, která na jedné straně nerespektuje zadání, redukuje ho na některé výrazy (jakoby zbavené syntaktických pozic či jimi nesené sémantiky) a na druhé straně vtahuje do hry vlastní "svévolné" kontextualizace, dovolující rekonstruovat pro dítě nesrozumitelný či nejasný kontext zadání jako referentní (vztahující se k něčemu známému) a koherentní (relativně celistvý a bezrozporný).

2) Shoda pořadí objektů se zadáním - "děvčátko mezi stromem a chlapcem", kde je také strom uprostřed.

Ve prospěch této možnosti by svědčily volby řešení "d", kde symetrie není nijak výrazná - avšak jeho interpretaci komplikuje právě možnost, že tu jde o snahu volit obrázek, kde je "děvčátko" jakožto postavička v sukni jednoznačně přítomno.

Obě možnosti se však nevylučují: z pořadí jmenování objektů v zadání může dítě vysoudit právě to, že strom je uprostřed, umístění ostatních pak není jasné ("Ale na jaký straně?" ptá se Bořek.) "Zleva doprava" jako při čtení může pak být jedním dodatečným kritériem, postavička v sukni pak druhým.

Úlohu 20 (čtverec na 9 částí) řeší 5 dětí, bez náznaku souvislosti s celkovým výsledkem v testu. Ve třetí třídě i později roste úspěšnost řešení úloh se čtverci jen pomalu a zdá se, že vytvářejí v rámci subtestu dosti samostatnou linii. Vrátíme se k nim později.

Úlohy s posunem úspěšnosti řešení mezi 2., 3. a 4. třídou

Výrazný posun v úspěšnosti zaznamenáváme u těchto úloh:

	2. třída (24 dětí)	3. třída 26 dětí)	4. třída (22 dětí)	5. třída (24 dětí)
15 (mezi)	**10**	**21**	**20**	**22**
21 (hrníčky)	**4**	**14**	**23**	**19**
22 (dvoukoruna)	**3**	**13**	**17**	**22**
30 (pětikoruna)	**-**	**17**	**18**	**23**

Ve třetí třídě neřeší úlohu 15 (Mezi) už jen jedna dívka ze skupin A a B (ve třídě nová), jedna ze skupiny C a 3 ze skupiny E (3 z nich chybovali také ve 2. třídě, jeden je nový).

Zajímaví jsou tu dva chlapci: **Luděk a Evžen ze skupiny E budou svou chybu** (stále tutéž - obrázek "a", kde je pořadí zleva "děvčátko - strom - chlapec") **opakovat až do páté třídy**.

Úloha má 100% vývojovou reliabilitu, bez návratů k chybnému řešení.

(Pokud úloha vypovídá o chápání prostorových vztahů, nemá v Počtech příbuznou. Druhou možností ovšem je, že problém spočívá v chápání jazykového zadání a jeho korespondence s obrázkem.)

Úloha 21 (Hrníčky): "na kterém obrázku je polovina hrníčků ve srovnání s počtem talířků", znění bylo při zadávání nejčastěji opakováno, často v lehce pozměněné podobě, např. "na kterém obrázku je těch hrníčků polovina oproti talířkům"):

Úspěšnost řešení tu roste od minimální ve 2. třídě, kde úlohu řeší jen 3 děti ze skupiny A a 1 z C, **k poloviční úspěšnosti ve 3. třídě a už jen výjimečným chybám ve 4. a 5. třídě**.

Ve 3. třídě úloha poměrně diferencuje mezi skupinami:

	skupiny A a B (10 dětí)	skupiny C, D a E (16 dětí)
Správně	**7**	**7**
Nesprávně	**3**	**9**

Diferencuje ale **hlavně mezi "počtáři"**: v horní polovině pořadí v subtestu je 12 řešitelů, v dolní polovině pouze 2.

V chybných řešeních lze rozpoznat tři kvalitativní úrovně"

Řešení "a" (tři hrníčky a 4 talířky) je nejtěžší chybou, tato chyba se však vyskytuje jedinkrát ve 2. třídě.

Nejčastější chybou je "d" (10 dětí): 3 hrníčky a 3 talířky, které převažuje ve 2. i 3. třídě.

Nejblíže správnému řešení je strukturálně shodné "c" (4 hrníčky a 2 talířky) - 5 dětí. Jen jedinkrát po tomto řešení následuje v dalším roce opět chybné řešení.

Úloha má vysokou reliabilitu v čase - 96%, jen jednou najdeme "návrat" ke špatnému řešení.

Nacházíme zde jinou skupinu dětí, které mají s úlohou trvalejší problémy, než u úlohy 15 (Mezi). Zde **chybuje Martin i Vanda až do 5. třídy** (opakují stejnou chybu - d: obrázek, na němž jsou 3 hrníčky a 3 talířky), **Kiška pak do 4. třídy.**

Z rozdílného složení skupin s trvalými potížemi v úlohách 15 a 21 se zdá, že jejich společným problémem není porozumění jazyku, že tu přinejmenším existují další parametry, které úlohy odlišují. Mezi pěti jmenovanými je v těchto úlohách ostrá odlišnost: Luděk a Evžen, trvale neúspěšní v úloze 15 (Mezi), řeší už od 3. třídy úlohu 21 (Hrníčky) správně - a naopak, Martin, Vanda i Kiška řeší správně úlohu 15 od 2., resp. 3. třídy.

Charakterizují tu tyto úlohy nějaké typové rozdíly?[2]

Úlohy s mincemi

Kvůli umístění v testu nebyla bohužel ve 2. třídě vůbec zadána úloha 30 (rozměnit pětikorunu pěti způsoby). Přitom z dalších výsledků je patrné, že je méně obtížná než úloha 22 (rozměnit dvoukorunu pěti způsoby) a platí, že kdo vyřeší úlohu 22, vyřeší také úlohu 30 - od 3. do 5. třídy tomu tak nebylo pouze ve 2 případech (z 33 případů zadání obou úloh).

Ve 2. třídě řeší úlohu 22 (Dvoukoruna) jen 3 děti (z nich však jen Vilém řeší úlohu i v dalších letech). Gitino řešení je správné početně, nikoli věcně: operuje s variantami 50 hal +1,50 Kč, 1,90 Kč. + 10 hal.

Do sčítání či násobení částí menších než "padesátník" se pouští dalších 7 dětí. Čtyři z nich generují pouze 4 možnosti dané jako násobení stejných mincí - jako by "rozměnit" znamenalo "dělit" v matematickém slova smyslu. Je to účinek násobilky probírané v tomto pololetí? Další pak se dopouštějí nějakých nepřesností, které charakterizují jejich nejistotu v číselném prostoru nad 100 - generují např. možnosti: 6 desetníků a dva dvacetníky; 200 desetníků; deset desetníků (i poté, co předtím řekl možnost "dvacet desetníků"). Je patrné, jak operace skládající se ze součtu dvou součinů (navíc s činiteli většími než 10, byť s celými desítkami), je na hranici jejich možností.

Zřejmě by tu mnohým z nich pomohl zápis s možností se vrátit k předchozímu součinu a jeho výsledku. Ale snad bez výjimky možnost zápisu ve druhé třídě i třetí třídě odmítají. Darina, která ve 2. třídě dává ke 4 správným variantám pátou "6x10+2x20", ve třetí třídě zvládá 5 variant u dvoukoruny, ale nezvládá pětikorunu (jedna ze dvou výjimek, kdy po zvládnutí dvoukoruny není pětikoruna vyřešena), ve třetí třídě - zřejmě příznačně - říká:

5x1; už neví. Ví jak, ale neumí to spočítat, vždycky zapomene to číslo. - "Stejně nevim, jak bych si to měla napsat." (Asi jsem se jí ptal, proč si to nepíše nebo jí to radil.)

Minimální úroveň řešení úlohy tu představuje 8 dětí (4 nebyla úloha předložena), které buď nedávají řešení vůbec (1 chlapec) nebo člení dvoukorunu pouze na "koruny". Někdy dávají najevo, že vědí o haléřích, ale nevědí

[2] Všechny úvahy o typových rozdílech a vůbec hlubších souvislostech rozdílů jsou tu zkusmé, předběžné, hypotetické. Soustředili jsme se na popis výsledků. Jakkoli je to čtenářsky nezáživné, je to pro nás nezbytná etapa analýzy.

si s nimi rady: *"neumim počítat s halířema"* (Lada), *"Ňáký desetníky, ale kolik jich bude... to by jich muselo bejt hodně. Eště dvacetníčky..."* (Doriana)

Ve 3. třídě tyto úlohy dost diferencují mezi skupinami: Z 10 dětí skupin A a B řeší všichni úlohu s pětikorunou a 8 úlohu s dvoukorunou. Naproti tomu z ostatních 16 dětí řeší úlohu s pětikorunou 7 dětí (6 neřeší a 3 nebyla předložena) a úlohu s dvoukorunou 5 dětí. (Obě úlohy řeší 8 z A+B a 4 ze zbylých.)

Na minimální úrovni řešení "jen s celými korunami" setrvávají jen 3 děti (Martin, , Vanda, patrně Aleš), dalších 5 používá bezpečně jen kombinace odpovídající snadným triádám, nejčastěji s padesátníky, výjimečně "deset dvacetníků", v ostatních chybují (Radek, Marcel, Luděk, Kája, Kiška).

Z těchto 8 dětí patří 5 do skupiny E, 1 do D a 2 do skupiny C.

Naproti tomu 4 děti, které v některé z úloh chybují, dělají jen drobnou chybu (Pepík, Denisa, Nina, Eda). Kdybychom vzali v úvahu kvalitu chyb a řešení prokazující bezpečný vhled do členění korun na haléře brali jako správná, vypadalo by rozdělení řešení obou úloh takto:

	skupiny A a B (10 dětí)	skupiny C, D a E (16 dětí)
Správně	**9**	**8**
Nesprávně	**1**	**8**

Zvláštní je případ Eduarda: ten už ve 3. třídě, kdy do třídy přišel, dokázal vyprodukovat čtyři varianty členění dvoukoruny na stejné části. V dalších třídách generuje znovu a znovu toto řešení.[3]

Ve 4. třídě se děti dopouštějí chyb v těchto úlohách už jen výjimečně, 3 z nich chybují v obou úlohách - a se všemi třemi už jsme se setkali: Martin, Luděk, Vanda.

V páté třídě se tu vyskytují jen ojedinělé chyby.

Úlohy s posunem úspěšnosti řešení mezi 3., 4. a 5. třídou

Jde o úlohy se spíše pozvolným nárůstem úspěšnosti od velmi nízké ve třetí na zhruba poloviční v páté třídě. Úloha 35 (Dlaždice) je sem přičleněna kvůli možným souvislostem s úlohami o čtvercích.

	2. třída (24 dětí)	3. třída 26 dětí)	4. třída (22 dětí)	5. třída (24 dětí)
17 (koláč)	**0**	**4**	**9**	**13**
20 (čtverec 9)	**5**	**8**	**11**	**13**
28 (čtverec 100)	**-**	**0**	**1**	**8**
35 (dlaždice)	**-**	**-**	**0**	**5**

Úloha 17 (koláč) by na první pohled mohla souviset s chápáním zlomků a tedy s výše diskutovanými úlohami o rozměňování mincí. Takový úsudek se však ukazuje jako zcela neopodstatněný. Vypovídá-li úloha 17 něco o vývoji chápání zlomků, pak to přinejmenším ve 2. a 3. třídě pro většinu dětí nemá nic společného s úlohami o mincích.

Úloha prezentuje obrázek, na němž z koláče hvězdicovitě rozčleněného na pět částí je jedna z částí poněkud vysunuta, a otázku: Jakou část z celého koláče představuje tento kousek? Otázku jsme někdy doplňovali otázkou: Jak bys ji nazval(a)? Formulace "představovat něco" není šťastná - základní význam pro děti možná je spíše "vydávat se za něco, hrát něco, čím ve skutečnosti není". Doplňkovými formulacemi jsme se tedy snažili zabránit tomuto nedorozumění a zajistit pochopení úlohy jako "jak se nazývá, jmenuje, jak se říká tomuhle na obrázku" - někdy jsme zajišťovali i pochopení celku obrázku označením "tohle je koláč", protože barvy na obrázku nejsou příliš realistické.

Ve 2. i 3. třídě zdánlivě několik dětí postihuje kontext "zlomky" a dává odpověď "čtvrt", "čtvrtina" či "třetina" - ve 2. třídě 7 dětí, ve 3. třídě 6 dětí. Děje se tak přitom bez jakéhokoli náznaku afinity k našemu rozdělení do skupin A - E. Při bližším pohledu však vidíme, že tato označení nejsou "jen nepřesným označením zlomku" - ve skutečnosti totiž nemají nic společného s počtem částí a jsou nanejvýš označením tvaru! Není totiž pochyby, že počet částí na obrázku je dětem snadno dostupný (viz výše snadné úlohy) - odpověď "pátá" tu dávají např. dvě děti, které patří k průměru či podprůměru. Odpověď "čtvrt, čtvrtka, čtvrtina" je častější a je synonymem, ekvivalentem za "kus koláče" (vykrojený z kruhového tvaru). Odpověď "třetina" pak podle nás

[3] U této chyby obecně uvažujeme o tom, zda potíže nepůsobí **nutnost při páté možnosti přejít do jiného kontextu** - od násobení/dělení k rozkladu v kontextu sčítání/odčítání. U Eduarda se pak předběžně jeví tato hypotéza jako pertinentní i na základě jiných zkušeností. Není to ovšem obecně jedna ze slabin méně nadaných dětí?

indikuje výhradně tvar, a to v protikladu k "pravoúhlé čtvrtce": třetina je "šikmá" (jako pětina koláče na obrázku).

Blíže než tyto odpovědi mají k identifikaci "matematického" kontextu úlohy odpovědi "trojúhelník" - ve 2. třídě 4 děti, ve 3. třídě 6 dětí. I ty se ovšem pohybují v kontextu tvaru. Celkem tedy **11 dětí ve druhé třídě a 12 dětí ve třetí reaguje na obrázek jako na tvar**.

Další označení části vycházejí z kontextu stranového určení: pravá, levá, postranní, boční část - 3 děti ve druhé, 1 ve třetí třídě. Nejblíže správné odpovědi je vlastně ve 2. třídě Slávek: "pátá - ale nevim jak se jmenuje" a Kiška (také "pátá"). Ale v dalších třídách Slávek pokračuje "pátá" (3. tř.) - "čtvrt" (4.) - "čtvrt" (5.), Kiška pak "neví" (3.) - "rohová" (4.) - "čtvrtinu" (5.)

Jejich odpovědi ve 2. třídě, vycházející z počtu, nejsou tedy předzvěstí brzkého správného řešení. Takovou předzvěst ve 2. třídě nenacházíme - 4 správná řešení ve třetí třídě pocházejí od Pepíka, který ve 2. třídě odpovídá "třetina?"), Viléma (ve 2. ukazuje stejnost části s ostatními), Míti ("nevim") a Mileny (ve třídě nová).

Čtvrtá třída přináší zlom - **úloha jasně odlišuje děti kupiny A a B**: všechna správná řešení jsou od nich a jediná odpověď z jejich skupiny, která nebyla skórována jako správná, zní: *"jednu část", "jako čtvrtina nebo něco takovýho - jedna... nevim, jak se bude jmenovat; vim co by to mělo bejt, ale nevim jako to..."* (Čenda)

Z dalších 12 dětí odpovídá 6 "pseudozlomkem" - z nich dvě odpovědi by se mohly pojmově vztahovat spíše k vágně tušené "zlomkové terminologii" než ke tvaru: "třištvrtiny" (Martin) a "desetinu" (Marcel). Evidentní se nám to zdá u "desetiny": jde o jasně číselný pojem, ale bez pochopení vztahu k číslu a počtu "10".[4] Oba pak v příštím roce už řeší úlohu správně.

5. třída téměř opakuje obraz třídy čtvrté: z dětí skupiny A+B neřeší úlohu jen Bořek, který řešení - opět se zdá, že pro něj charakteristicky - "přechytračil": *"Je jich pět, takže dvacetinu."* Jde tu zřejmě o interference se setinami či s procenty, o kterých (neadekvátně) uvažuje i v úloze 27 (Máslo). Zdá se, že tu jde o fenomén, kdy nový výdobytek, nový kontext a jeho strukturace, dosud nezvládnutá a špatně diferencovaná, jakýmsi halóefektem či hypergeneralizací překryje a naruší dokonce i bezpečně zvládnutou dosavadní strukturaci.[5]

Úlohu řeší ovšem už i 3 chlapci z dalších skupin (Martin, Marcel, Evžen), další 2 se k řešení blíží:

Vráťa: *"Jeden díl?" - otázka: Přesněji? - "pět a z toho jeden".*

Darina: *"jako jednu osminu nebo něco takovýho? - Jednu šestinu*."

Vráťovi chybí pojem pro jasný koncept "dílu" (ne ovšem nutně v souvislosti s "dělením" jako matematickou operací!). Darina pojem má, resp. bezpečně nalezla pojmovou paradigmatickou řadu a dělá nejednoznačnou chybu: Jedna možnost je, že pořád verbální paradigma nekoresponduje s počtem částí, nýbrž jen obecně s "dělením". Nebo je to paradigma natolik nové, že pohyb v něm narušuje paralelní operaci spočítání, jakkoli je triviální.

Z 8 zbývajících dětí **setrvává 5 u "nesprávného zlomku"** - čtvrtiny, v jednom případě Denisa váhá, zda "jedna třetina nebo jedna čtvrtina". Dávají podobnou odpověď buď trvale od 2. třídy (Denisa) nebo ho střídají s jednoznačně tvarovým určením (např. Nina: "trojúhelník" (2.) - "trojúhelník" (3.) - "čtvrtka" (4.) - "čtvrtina" (5.)).

Jen u 3 dětí trvají **potíže s určením kontextu úlohy**, charakteristické pro velkou část dětí ve 2. třídě (u 9 dětí z 24 - 2 se pak po váhání rozhodly pro stranový či tvarový kontext), ještě v 5. třídě. Zaznamenáváme jejich odpovědi v jednotlivých ročnících:

Eduard: "makovej? - ??? - nevim" (3.) - "chybějící část koláče? - ??? - taková čtvrtina" (4.) - "šikmoramenná část" (5.)

Luděk: "trojúhelník" (2.) - "to nevim" (3.) - "krajíc?" (4.) - "kulatou?" (5.)

Vanda: mlčí (2.) - "hora" (3.) - "čtyry" (4.) - neví (5.)

Bylo by lákavé konstatovat, že všichni tři patří k dětem s nejhoršími výsledky v testu i ve školním prospěchu. Avšak jednoznačnost nabízejícího se závěru poněkud narušuje Vráťa, který úlohu v 5. třídě téměř řeší a má přitom v předchozích třídách potíže podobné: "čtvrt" (2.) - neví (3.) - "ukrojená" (4.). Má sice relativní problémy s prospěchem a patří k podprůměru i v celkových výsledcích testu S-B, ale právě v subtestu Počty patří od 2. třídy spíše k nadprůměru!

Úlohy se čtverci

Jako by vykazovaly podobný průběh četnosti jako úloha 17 (Koláč) - jen pomalý nárůst úspěšných řešení.

---

[4] Pro Marcela se zdá takovéto pojmové předbíhání, znalost slovních pojmů bez korespondnce s jejich konceptuálním obsahem charakteristická.

[5] Ve zprávě z r. 1999, analyzující test TIMSS jsme například popisovali chybu, která - zdánlivě paradoxně - charakterizovala dobré matematiky: přecenění či neoprávněnou extrapolaci matematické pravidelnosti na přírodní procesy: když se řeka vylila v posledních deseti letech pětkrát z břehů, dojde k příští záplavě za dva roky.

Obě úlohy obsahují dvoukrokové řešení: je třeba jednak vědět či zjistit, jak čtverec podle zadání rozdělit, jednak vědět či zjistit, kolikami čarami se to děje. Oba kroky přitom mohou mít podobu simultánního vhledu či sukcesivního zjišťování, takže mohou bý rozloženy na řadu dílčích kroků.

Přitom je pro úspěch nutno kontrolovat 3 podmínky zadání: počet částí, stejnost částí, co nejmenší počet přímek.

Úlohu 20 (kolika přímkami lze rozdělit čtverec na 9 stejných částí) řeší ve 2. třídě 5 dětí, k tomu Luděk kreslí správné řešení, ale domnívá se, že k němu potřebuje 8 čar. Ovšem jen 3 děti opakují správné řešení také ve 3. třídě, kde úlohu řeší správně celkem 8 dětí..

Z nich 2 ve 4. třídě úlohu neřeší, přibývá 5 nových řešitelů - řeší tedy celkem 11 dětí (7 ze skupin A a B).

Z těch v 5. třídě 9 řeší znovu úlohu správně, a přibývají 3 noví řešitelé - celkově 12 řešitelů (7 ze skupin A a B).

Z těchto výsledků vidíme, že úloha má jednak nižší vývojovou reliabilitu (76%) – tedy poměrně časté návraty k neřešení, jednak nemá nijak jednoznačné souvislosti s rozdělením do skupin.

Ve skupině A+B najdeme 4 chlapce, **kteří od 2. do 5. třídy úlohu ani jednou neřeší**: Pepík, Bořek, Míťa, Jindra. V dalších skupinách najdeme ještě 2 takové případy (Denisa, Eda) a dalších 5, kteří řeší úlohu jen jednou: Marcel, Kiška, Evžen, a také Darina a Vanda, které ovšem úlohu řeší v 5. třídě a další vývoj zatím neznáme.

Naproti tomu **od počátku řeší úlohu** jen Fanda a Lada, od 3. třídy Gita, Vilém a Nina, od 4. pak ještě Milena, Čenda a Slávek. (6 ze jmenovaných dětí je ze skupiny A+B.)

Jak vypadají výsledky **úlohy 28 (kolika přímkami lze rozdělit čtverec na 100 stejných částí)**?

Ve 4. třídě ji řeší pouze Pepík. Postupuje tak, že si kreslí správné řešení a pak spočítá čáry uvnitř čtverce.

Řada dětí postupuje bez náčrtku a zřejmě vyvozuje počet aritmetickou úvahou. Všichni však bez náčrtku dělají chybu. Ve 4 případech jde zjevně o drobnou chybu v počtu čar, který by bylo třeba snížit v obou směrech o 1: řešení "20" znamená téměř jistě "10 svislých a 10 vodorovných pruhů = 10 vodorovných + 10 svislých čar).

Některá další řešení také vycházejí z představy "čtvercové sítě", avšak úvaha o její konstrukci je neadekvátní:

Řešení typu “100 čar” může vzniknout dvojím způsobem. Jeden reprezentuje "81 čar" (Lada), nímž je zřejmě představa o čtvercové síti 10x10 pruhů, pro niž však je třeba nakreslit také 9*9 čar. Naproti tomu řešení "98 čar" (Čenda) je s předchozím shodné představou sítě 10x10, která však tu má zřejmě vzniknout jako "49 čar vodorovných + 49 čar svislých". Kterou z předchozích dvou logik má řešení "100 čar" Martina, není jasné.

Řešení "50 čar" vzniká v jednom případě explicitně takto: *"Sto děleno... Svisle a pak vodorovně - na každý straně 25." (Bořek).* Stejné řešení zřejmě se stejnou logikou (která jako by vycházela z interference obsahu a obvodu čtverce) dávají další 2 chlapci.

Ani náčrtek však nezajišťuje správnost řešení, i s ním nacházíme 2 řešení "20" (jedno z nich ve skutečnosti "19") a "50+50".

Posun mezi 4. a 5. třídou vidíme v růstu počtu správných řešení. Z 8 správných řešení v 5. třídě pochází přitom 6 ze skupiny A+B. Pokud vezmeme v úvahu i úroveň nesprávných řešení, můžeme konstatovat v 5. třídě také nárůst počtu řešení vycházejících z představy čtvercové sítě (11 dětí ve 4. třídě, z toho 6 ze skupiny A a B, 15 dětí v 5. třídě, z toho 7 ze skupiny A+B) a řešení zachovávajících alespoň 2 ze tří zadaných podmínek: 100 částí, stejných, co nejméně přímek (8 dětí ve 4. třídě, z toho 5 ze skupiny A+B, 18 dětí v 5. třídě, z toho 11 ze skupiny A+B), vidíme, že **děti ze skupiny A+B odlišuje od ostatních spíše schopnost dodržet současně více podmínek** zadání než představa členění čtverce jako součinu dvou shodných činitelů.

Trvaleji řeší správně či skoro správně úlohu 28:

od 3. třídy Fanda, Gita a Martin,

od 4. třídy Vilém, Milena, Slávek, Vráťa.

Naproti tomu ji **řeší trvaleji zcela nesprávně**: Kiška, Denisa, Luděk, a snad také Eduard a Helena, kterým byla v 5. třídě předložena poprvé.

Správná či "skoro správná" řešení úlohy 28 přitom korespondují s úlohou 20 takto: **Ve 4. třídě** se nevyskytuje zcela správné řešení obou úloh. Zahrneme-li však řešení "20 čar" v úloze 20 jako vyhovující, pak zde obě úlohy uspokojivě řeší 5 dětí: Vilém, Milena, Gita, Slávek a Vráťa (3 ze skupina A+B).

V 5. třídě řeší zcela správně obě úlohy 6 dětí: Lada, Milena, Fanda, Vilém, Martin, Vanda. Se zahrnutím "skoro správných" řešení úlohy 28 pak je to ještě Gita, Nina a Slávek - **celkem tedy 9 dětí** (z nich 5 ze skupin A+B).

Z uvedených dětí tedy řeší v obou třídách správně obě úlohy Vilém, Milena, Gita, Slávek.

Trvale úspěšní v obou úlohách jsou tedy: od 3. třídy Fanda a Gita, od 4. třídy přibývají Vilém, Milena a Slávek, v 5. třídě přibývá Lada, Martin, Vanda.

Trvale neúspěšní v obou úlohách naproti tomu jsou: Kiška, Denisa, Eduard.

Při současném zadání obou úloh se v průběhu testování vyskytlo 18 případů, v nichž úloha 20 (členění na 9 částí) byla řešena a zároveň úloha 28 neřešena.

Naproti tomu bylo jen 7 případů opačných, kdy při neřešení úlohy 20 je složitější členění v úloze 28 řešeno zcela správně (3 případy) nebo skoro správně (4 případy). Současné neřešení obou úloh nastalo v 22 případech

	28 S	28N
20 S	**17**	**15**
20 N	**7**	**22**

Z rozložení těchto četností (zahrnujících jako správné řešení u úlohy 28 také typ "20 čar") je patrná souvislost: nejčastější jsou případy, kdy obě úlohy jsou řešeny nebo obě neřešeny. Poměrně časté jsou případy, kdy je řešena jen snadnější úloha 20 - mj. proto, že hledání řešení prostřednictvím náčrtu je tu jednak snazší, rychlejší, jednak přehlednější, při neúspěchu je možno náčrt opakovat. Zatímco zde můžeme najít úspěšná řešení např. až na třetí či pátý pokus, u pokusných náčrtů v úloze 28 děti často rezignovaly při nedokončeném prvním pokusu.

Vztah náčrtu a řešení není přitom jednoznačný. V úloze 20, kde většinou děti začínaly v nižších třídách s úhlopříčným dělením, které dále půlily, se někdy při dalších pokusech dopracovaly k alternativnímu řešení.

Ve 2. třídě 3 z 5 úspěšných řešitelů přišli na řešení na několikátý pokus, Vráťa až na čtvrtý.

Ve 3. třídě z 8 řešitelů jen 2 používají náčrt, z nich jen Vilém má dva chybné (úhlopříčné) pokusy a řešení objevuje při třetím pokusu. Ostatní znají řešení bez náčrtu - jen ukazují nebo ho dodatečným náčrtem demonstrují. Naproti tomu 6 dětí, kteří v náčrtu pracují se sítí nebo se "čtverečky", řešení neobjevuje.

Ve 4. třídě pracuje zřejmě 6 (z 11) řešitelů bez náčrtu, další kreslí rovnou správný náčrt; jen 2 teprve hledají náčrtem správné řešení - Nina dokonce až na pátý pokus. Proti tomu dva další chlapci, kteří pracují se sítí, k řešení nedocházejí.

V 5. třídě pracují 4 řešitelé bez náčrtu (z nich jen Vanda loni neřešila správně;), 3 kreslí náčrt rovnou, spíš jen jako ilustraci či ověření (z nich Martin loni neřešil), jen Slávek, Darina a Vilém prostřednictvím náčrtu řešení hledají na několikátý pokus (jen Darina loni neřešila správně). Oproti tomu 3 další, kteří pracují v náčrtu se sítí, řešení nenalézají.

Dalo by se říci, že **úspěch má náčrt tehdy, jde-li si naproti s představou o početní strukturaci** a slouží spíše k jejímu zpřesnění, dojasnění, nebo je-li v průběhu prvních kroků náčrtu evokován již existující koncept čtvercové sítě zahrnující souvislost s kontextem násobení. Přitom samotný pokus se sítí nezaručuje blízkost řešení: Bořek s ním pracuje od 2. třídy a k řešení nedochází. Vanda, která ve 3. třídě pracuje s pokusem 4x3 čtverečky (které patrně nechápe jako síť), ve 4. třídě dává odpověď “nevím” a v 5. třídě ukazuje bez náčrtu správné řešení.

Jen dosti nejednoznačně jsou **naznačeny některé tendence**: ulpívání na úhlopříčném dělení u značné části dětí - v každé třídě 6-7 dětí. Jeho opuštění se zdá podmínkou úspěchu, nikoli však postačující. Hypoteticky usuzujeme, že pokus o "čtverečky" či ještě spíše "síť" musí být dán do souvislosti s aritmetickou figurou 3*3=9. Poměrně vysoký počet správných řešení už ve 2. třídě je pak možná způsoben tím, že tu děti probíraly násobilku a její logika byla mimo jiné demonstrována na modelu čtvercových sítí. Ale v dalších letech jako by členění plochy na čtvercovou síť na jedné straně a obsah pravoúhlého čtyřúhelníka na straně druhé neměly pro děti nic společného. Ještě v 5. a 6. třídě si řada dětí při výpočtu obsahu "plete vzorečky" pro obsah a obvod. Teprve po diferenciaci těchto vzorečků a jejich logiky se patrně konstituuje korespondence násobení a obsahu čtverce či obdélníka jako nepříznaková.[6]

Úloha 35 (Dlaždice)

Ilustrujme to na úloze 35 (Dlaždice): "Kolik kusů dlaždic o rozměrech 15x15 cm je potřeba na zhotovení čtvercové dlažby o rozměrech 180x180 cm?"

Zadání rozměrů jako "15x15" či "180x180" není ve škole obvyklé, tam by se mluvilo o čtvercích se stranou 15, resp. 180 cm. Nezdá se však, že by v tom byl problém. Jak děti úlohu řešily?

Ve 4. třídě byla předložena 12 dětem, nikdo z nich ji nevyřešil správně.

5 dětí nevědělo, jak postupovat.

Gita: *Tiše přemýšlí (dost dlouho), i po dotazech. Prý jí vychází pokaždé něco jiného. (Nepíše.)* Nesdělila postup.

Míťa: *Zkouší na papír "15+15=30*6=180". Ale neví, co vypočítal.*

Marcel postupuje jinak:

[6] V testu TIMSS se ve 4. třídě jako nejobtížnější matematická položka ukázala úloha: "Z cínového drátu o délce 20 cm je vytvarován obdélník. Jaká je délka tohoto obdélníku, je-li jeho šířka 4 cm?" Správně ji řešili jen Fanda a Milena, 7 dětí (5 ze skupiny A+B!) se přiklonilo právě k řešení "5 centimetrů", indikujícímu záměnu obvodu s obsahem. 6 dětí volilo "12 cm" (2 z A+B), 7 dětí (nikdo z A+B) řešení "16 cm".

Počítá: *84 dlaždic - Dělí 520:60=84 (520 je obvod toho celýho, 60 je obvod dlaždice).* Dává do vztahu celky obou ploch, jenže za tyto celky považuje obvody, ne obsahy.[7]

5 dětí považuje za výsledek zjištění, **kolikrát se 15 (strana dlaždice) vejde do 180 (strany dlážděné plochy)**. Fanda na tento výpočet rezignuje, stejně jako Čenda: *"Kolikrát se do 180 vejde 15? To asi nevim."*. Ostatní zjišťují výsledek 12, buď písemným dělením (Nina) nebo zkusmým násobením.

Konečně Vráťa nezůstává u zjištění "12", ale tento výsledek zdvojnásobuje - řešení je 24. Do délky jedné strany se vejde 12, do délky druhé taky 12, 12+12 je 24. Zajímavé je, že chápe (?), že plocha se vytváří vztahem či operací pouze dvou stran, nikoli všech čtyř, ale tuto operaci považuje za sčítání. Nebo je jeho úvaha o ploše určené dvěma stranami odvozena z naučených vzorečků ať už obsahu nebo obvodu nebo jejich konfuze?

V 5. třídě už zaznamenáváme **5 úspěšných řešení**, jichž je dosaženo dvěma různými postupy:

1. Jeden z nich určuje, kolikrát se strana dlaždice vejde do strany dlážděné plochy a výsledek násobí sebou samým: **180:15=12, 12*12=44.**[8] Tento postup je zřetelným výrazem pochopení jednak členění strany plochy prostřednictvím strany dlaždice, jednak členění obsahu korespondujícího s vzájemným násobením délek stran. **Řešení volí 3 děti** (Lada, Čenda, Jindra, - Čenda má drobné numerické potíže, Jindra po dělení 180:15 váhá, co má s výsledkem dělat, nakonec správně násobí.

2. Druhý postup počítá obsahy dlážděné plochy a jedné dlaždice a dělením zjišťuje, kolikrát se obsah dlaždice vejde do obsahu plochy: **(180*180) : (15*15) = 144.**

Tento postup uplatňují **4 děti** - správně Pepík a Darina.

Vilém kromě opakovaných numerických chyb, kvůli nimž dochází k chybnému výsledku, zpočátku také počítá obsah ploch jako 15+15 a 180+180 - zaměňuje násobení se sčítáním stran.

Martin postupuje podobně:

*Nejdřív neví, jak to vypočítat: "180*180... to mi dá ňáký číslo, 15*15 - to mi dá ňáký číslo a pak to vydělim". - 180*180=32400 dělí tím, "co mu vyšla ta dlaždice": omylem bere 30 (=2*15). - Pak: "Ježišmarjá, já to udělal dvakrát" (když jsem ho upozornil, jestli to předtím neříkal jinak). - Neumí ho vydělit, rezignuje: "to je moc velký číslo na mě."* - Rezignuje na zapsané dělení "32400:225=".

Nejčastějším postupem je chybné 150:15=12, které se považuje za výsledek. Postupuje tak 8 dětí, další násobí tento výsledek dvěma - Vanda: 180:15=19, *2=38.

Na řešení rezignují 4 děti, některé po zkusmých krocích (Kiška: 15*9=115, Evžen: 15*15), mezi nimi i Fanda - jeden z nejlepších žáků a úspěšný řešitel úloh se čtverci od 3. třídy: *"Todle nevim, a ani nevim, jak bych to počítal."*

Vztah k výsledkům úloh se čtverci je překvapivý - ze 7 dětí, které v 5. třídě prokazují pochopení struktury postupu, patří k úspěšným řešitelům úloh se čtverci od 4. třídy Vilém, od 5. Lada a Martin. Naopak Pepík, Jindra a Darina patří k těm, kteří s nimi měli trvalé potíže, a Čenda řeší bezpečně od 4. třídy jen úlohu 20 (čtverec 9), kdežto úlohu 28 neřeší ani ve 4. ani v 5. třídě.

Tyto výsledky snad mohou vést k jedinému konstatování: Cesty, jimiž se děti dostávají k pochopení strukturace plochy čtverce, jsou různé. Schopnost geometrického (názorného) členění není předběžnou podmínkou pochopení korespondujících aritmetických operací. Cesta může vést také opačně - domníváme se, že od řešení úlohy 35 (dlaždice) by byl při dopomoci dospělého snadný krok pro Pepíka, Jindru i Darinu k pochopení libovolné strukturace plochy na čtvercovou síť. Zdá se přitom pravděpodobné, že vycházejí spíše od znalosti vzorečků než z chápání čtvercové strukturace.

Důležité zřejmě není "jedno či druhé", ale právě **ustavení paralelismu názorných strukturací** (ať sukcesivních - jako postupné kladení jedné dlaždice za druhou) nebo simultánních (položení celé sítě, přičemž položení pruhu svisle a pak vodorovně může být nezbytným mezikrokem pochopení toho, jak dlaždice je průnikem pruhů) a **strukturací symbolických, aritmetických** (kde nejrozvinutější sukcesivnosti odpovídá spočítání jednotlivých čtverečků, mezikrokem je součet celých pruhů a simultánní strukturací je násobení počtů odpovídajících členění stran prostřednictvím pruhů).

Úlohy na "dělitelnost"

Zkratkovitě a nepřesně tak nazýváme úlohy 19 a 25:

Úloha 19: "Které je nejmenší celé číslo dělitelné 2, 3, a 6?" Otázku administrátor testu čte nahlas, souběžně s tichým čtením dítěte, takže číslovky zaznějí v instrumentálu: "dvěma, třemi a šesti". Otázku jsme zejména v nižších třídách opakovali v lehce pozměněném znění, např.: Které číslo - co nejmenší - můžeme dělit dvojkou i trojkou i šestkou?

---

[7] Při násobení 180*4 zjevně bere z druhého kroku jen desítky a stovky šiftuje (o 100 nahoru). Při dělení (písemně) není jasné, jak zkorigoval původní výsledek 80 na 84 - patrně dělil bez nuly a zbytek 4 zapsal do výsledku jako druhou cifru?

[8] Tyto zápisy jsou samozřejmě jen naší, "dospělácky" formalizovanou zkratkou.

Podobně jsme prezentovali **úlohu 25**: “Které je nejmenší celé číslo dělitelné 3, 4 a 8?”

Úlohy nás jasně přenášejí do světa čísel a vztahů jen mezi nimi, nikoli k názorným objektům či dějům. Měly by souviset s výkony v subtestu Číselné řady, jak se pokusíme ověřit později. Na rozdíl od nich jsou tu ovšem vztahy čísel popsány matematickým pojmem, přičemž "dělitelnost" je vůči tomu, co dosud děti znají, metapojem. I když se ho snažíme v doplňující otázce denominalizovat (desubstantivizovat), je zřejmé, že v porozumění dochází zejména v nižších třídách k posunům, k subjektivní rekonstrukci sémantiky zadání.

Poměrně plynulý růst úspěšnosti v těchto úlohách charakterizuje celý vývoj do 2. do 5. třídy.

	2. třída (24 dětí)	3. třída 26 dětí)	4. třída (22 dětí)	5. třída (24 dětí)
19 (dělitel 2, 3, 6)	**0**	**6**	**10**	**16**
25 (dělitel 3, 4, 8)	**0**	**3**	**8**	**13**

V obou úlohách dostáváme **ve 2. třídě jen chybná řešení**.

Nejčastější reakcí na úlohu 19 je "nevím" či "nechápu" - 8 dětí (5 z nich ze skupiny A+B). Potíže s tím, čeho se vlastně úloha týká, ovšem vykazují všechna řešení.

Zhruba stejně častá jsou řešení "2" (7 dětí, z toho 2 ze skupiny A+B) a "1" (6 dětí - 1 ze skupiny A+B).

Logika řešení "jednička" se zdá jasná: namísto "čísla, které je možno dělit 2, 3 a 6", se hledá "číslo, kterým je možno dělit tato čísla". Tuto logiku nám ve 3. třídě prezentuje Jindra explicitně, když demonstruje, že 1*2=2, 1*3=3 a 1*6=6, a u úlohy 25 argumentaci dělitelnosti jedničkou opakuje, jen s dělením: 3:1, 4:1 a - nejspíše s přeřeknutím - 8:2. Chybným řešením zřejmě s toutéž logikou je "nula".

Jaká je logika řešení "dvojka"? Ve 3. třídě nabízí náš záznam explicitnější argumentaci Radka: 4:2=2, 6:3=2, 12:6=2. Pokud je to opravdu výraz logiky všech těchto řešení, co nám říká? Jaké nejmenší číslo dostaneme, když dělíme dvojkou, trojkou a šestkou? Přičemž 2:2, 3:3 či 6:6 logicky nepovažují za dělení?[9]

Taková reinterpretace za klíč k řešení považuje "nejmenší číslo", které v konstruovaných příkladech vystupuje jako výsledek.

V obou případech převádějí děti nejasný kontext na takový, kterému rozumějí: příklady, v nichž jeden člen má být "co nejmenší číslo". Podobným řešením je i ojedinělé "11", které je součtem daných čísel - a je tedy nejmenším číslem rozdělitelným = rozložitelným na daná čísla. *(Podobně i Kája: 2:3=6 - skládá ze známé triády příklad, přičemž kontext redukuje tak, že respektuje ve své reinterpretaci jen explicitně zadané členy - nerespektuje žádné "nejmenší číslo".*

Úloha 25 byla předložena jen 2 dětem - s výsledky, které navíc nejsou konzistentní s logikou jejich řešení úlohy 19: Fanda, který v úloze 19 volí jako řešení "jedničku", zde odpovídá 16, Vilém, který v úloze 19 volí "dvojku", odpovídá 8. Je to zapříčiněno tím, že tu rekonstrukce neznámého kontextu jsou činěny ad hoc, případ od případu, a proto nevytvářejí konzistentní logiku? Nebo je tu už předznamenán posun, který se podle nás odehraje v logice řešení těchto úloh?

Ta je totiž taková, že děti musí kontrolovat zároveň dvě podmínky: dělitelnost a nejmenší číslo. Zpočátku jako bychom tu většinou viděli akcent na "nejmenší číslo" - také proto, že "pružná" interpretace syntaxe umožňuje ji této podmínce přizpůsobovat. Ve chvíli, kdy se tvar podmínky dělitelnosti stane pro dítě diferencovanější, závaznější, vychází zřejmě především od ní. Paradoxem je, že podmínka “co nejmenší číslo” pak často mizí, protože děti postupují od nejmenších násobků spontánně. Výrazně obtížnější je pak úloha 25, kde dítě musí kontrolovat dělitelnost všemi třemi čísly. Naproti tomu u úlohy 19 stačí kontrolovat dělitelnost šesti. Tím nechceme říci, že děti tohle chápou a využívají, nýbrž chceme upozornit, že vyjde-li v úloze 19 dítě z dělitelnosti šesti náhodně, nerozpoznáme to od plně kvalifikovaného řešení. Z řady řešení je pak patrné, že děti vycházejí z násobků největšího z trojice čísel a často až dodatečně korigují řešení, když dodatečně kontrolují dělitelnost dalšími čísly a podmínku o nejmenším čísle.

Ve 3. třídě má úloha 19 už 6 řešitelů, nim přistupují další 2 s řešením "12", které zřejmě respektuje syntaxi zadání a jen nedostatečně kontroluje atribut "co nejmenší číslo". Z těchto 8 dětí pak **3 (Fanda, Míťa, Vilém) řeší správně i úlohu 25 a správná řešení obou úloh opakují i v dalších třídách**. (Loňská řešení těchto dětí nemají společnou logiku - byla mezi nimi všechna nejčastější řešení: "1 (0)", "2", "nevím").

Řešení "jednička" je sice stejně četné jako ve 2. třídě - 7 dětí - ale skupina dětí, které ho produkují, se až na jeden případ (Denisa) zcela obměňuje. Čtyři z nich trvají na této logice i v úloze 25.

Snižuje se četnost řešení "2" - pouze 3 děti, částečně ve prospěch individuálních řešení, jejichž logika nám není zřejmá: 27 (Mikuláš), 9 (Luděk), 4 (Vanda).

"Nevím" reaguje 5 dětí.

V úloze 25 je - vedle zmíněných 3 správných řešení - převažující reakce "nevím": 9 dětí. 5 dětí reaguje "jedničkou", další odpovědi jsou ojedinělé: 2 (Pepík), 26 (Mikuláš) 16 (Milena).

Ve 4. třídě má úloha 19 už 10 řešitelů, včetně řešení "12" a "24", která nedodržují podmínku co nejmenší číslo, pak 14. V úloze 25 pak 8 řešitelů patří vesměs do skupiny řešitelů úlohy 19 (či skorořešitelů - v případě Mileny, která v této úloze odpovídá "12"): k Vilémovi, Fandovi a Míťovi tak **přibývá dalších 5 (Pepík, Čenda,**

[9] Takové příklady jsme už dříve označili za "šiftové": nepočítají se, platí pro ně zvláštní pravidlo, které takovému pseudopříkladu přiřazuje výsledky 0, 1 nebo opakování téhož čísla. Předchozí skupina dětí ovšem ve své logice šiftové příklady do dělení zahrnuje.

Jindra, Vráťa, Milena), kteří prokazují pochopení vztahů dělitelnosti a potvrzují to pak (s výjimkou OndyD) i v 5. třídě. (Vidíme, že 7 z těchto dětí je ze skupiny A+B, jen Vráťa je ze skupiny D.[10])

Ani v této skupině ani v širší skupině řešitelů úlohy 19 nenalezneme jednoznačnou souvislost s loňským řešením, opět se vyskytují kromě opakování správných řešení také děti, které loni odpovídaly v obou úlohách "1", "2", "nevím", v případě úlohy 19 také "12", v případě úlohy 25 také "16".

Podobně je tomu i v 5. třídě, kde úlohy 19 řeší 16 dětí a další 2 prokazují porozumění řešením "12", úlohu 25 pak řeší 13 z nich. Ve skupině 14 dětí, které úlohy v 5. třídě bezpečně zvládly (zahrnujeme i Čendu), je 11 dětí ze skupiny A+B.

Ve 4. třídě setrvává u řešení "1" či "2" a "nevím":

8 dětí u úlohy 19 (z nichž ovšem Darina a Martin loni řešili úlohu správně!); z těchto 8 dětí jsou 2 ze skupiny A+B;

11 dětí u úlohy 25 (kde k obvyklým chybným řešením přibývají ještě 3 individuální - 3, 4, 36); z toho jsou 3 ze skupiny A+B.

Zvlášť je třeba vyčlenit 3 řešení typu "16", která by mohla signalizovat posun v chápání syntaxe. Luděk, který tu dává odpověď "36" (předtím v úloze 19 pak "24") se ovšem v páté třídě vrací k odpovědi "jednička, možná dvojka".

Ve skupině A+B mají tedy nejdéle potíže s úlohami na dělitelnost Gita (která po "nevím" ve 2. třídě dále důsledně trvá na řešení "1"), **Lada a Bořek** (kteří řešení "střídají").

Ještě v 5. třídě neřeší ani jednu z úloh 8 dětí, z nich ovšem 3 dávají řešení blízká správným ("12", resp. "16") a/nebo ve 4. třídě řešily úlohu 19 správně. Zřetelně tedy **zůstává žádoucí logika řešení nedostupná 5 dětem: Kiška (skupina D), Denisa, Eduard, Luděk, Vanda (skupina E).** Konstatujme předběžně, že už na první pohled nejde o skupinu homogenní z hlediska jakési "práce s čísly" či "chápání číselných vztahů". Např. zatímco Vanda, Eduard a Luděk podávají v subtestu Číselné řady trvale spíše podprůměrné výkony, patří výkony Kišky v tomto subtestu k průměru třídy a u Denisy dokonce spíše k mírnému nadprůměru. To nás vede k úvaze, zda pro Kišku a Denisu není zdrojem obtíží spíše jazykové zadání úlohy než samotné vztahy mezi čísly.

Úloha 25 má na rozdíl od úlohy 19 vysokou reliabilitu v čase - 96%. Právě případ skluzu Čendy v 5. třídě k řešení "16" je jediným případem vývojové inkonzistence. (Je přitom vyloučené, že jde o nepochopení - Čenda má v 5. třídě nejlepší výsledek celého testu a v subtesu Počty patří ke dvěma nejlepším.) Platí tedy, že **správné řešení úlohy 25 od 3. třídy indikuje pochopení základních vztahů dělitelnosti přirozených čísel** (v rámci, jak jej vymezují úlohy 19 a 25, včetně jazykové formulace) - kdo řeší úlohu 25, řeší také úlohu 19 přinejmenším na úrovni řešení blízkého správnému ("12").

Slovní úlohy

Ve zprávě zabývající se matematickou kompetencí dětí ve 4. třídě jsme vyslovili hypotézu, že těžiště těchto kompetencí ve 4. třídě spočívá v řešení "slovních úloh na násobení/dělení". Už následující tabulka přesvědčivě ukazuje, že v oblasti těchto slovních úloh vůbec a především oněch "úloh na násobení", ke kterým patří úlohy 31 (Nábytek), 34 (Hubnutí), 36 (Autopůjčovna) a 26 (Lipták), se odehrávají mezi 3. a 5. třídou výrazné posuny ve schopnosti tyto úlohy řešit.

	2. třída (24 dětí)	3. třída 26 dětí)	4. třída (22 dětí)	5. třída (24 dětí)
31 (nábytek)		**0**	**8**	**16**
34 (hubnutí)		**1**	**8**	**17**
36 (autopůjčovna)	**-**	**-**	**9**	**18**
25 (Lipták)		**0**	**2**	**5**
32 (konve 5 a 3 litry)		**3**	**9**	**18**
33 (konve 8 a 3 litry)		**1**	**3**	**11**
38 (bratři)		**-**	**7**	**10**

Bohužel jsou tyto úlohy v subtestu umístěny tak, že ve 2. třídě nebyly zadány (s jedinou výjimkou úlohy 26, shodou okolností výrazně nejobtížnější). Naopak možná nejsnazší úloha 36 (Autopůjčovna) byla zadávána až od 4. třídy - domníváme se zpětně, že právě tato úloha by byla pro některé děti řešitelná už ve 3. třídě.

Jak při těchto omezeních vypadaly výsledky?

---

[10] Vráťa opakovaně dosahuje v subtestu Počty svých nejlepších výsledků. Zato má podprůměrné až hluboce podprůměrné subtesty Slovník (definování významu slov) a paměťové subtesty, zejména Paměť na korálky (skládání sestavy korálků zpaměti po pětivteřinové expozici vzoru).

Úloha 31 (Nábytek) byla **ve 3. třídě** předložena 9 dětem (8 z nich ze skupiny A+B - to ovšem platí zpětně, v té době ještě nebyla definována). 6 z nich odpovídá "nevím" (v jednom případě se patrně k úloze vztahuje zápis

275
<u>275</u>
1000).

Gita dává odpověď "o 2 tisíce", ale počítala z hlavy, takže nevíme jak.

V dalších dvou případech děti násobí na papír: Čenda 275*20 (se správným výsledkem 5500), Jindra 275*24 (s chybným výsledkem 6700). Oba dělají výpočty s rozkladem činitele 275 na stovky, desítky a jednotky a následným součtem. Čenda však dává podivnou odpověď "asi za 23 a půl měsíce", která nekoresponduje s otázkou. V průběhu počítání zřejmě reinterpretuje zadání a počítá, za jak dlouho ve splátkách po 275 zaplatí 6000 Kč? Násobí 20 a pak odhaduje, že zbylý rozdíl by zaplatili za další tři a půl měsíce?

Jindra postupuje zcela adekvátně, ale při násobení jednotek dělá numerickou chybu: 5*24=220 a z toho plyne výsledek 6700.

Zdá se tedy, že u těchto dvou chlapců je řešení na dosah.

Ve 4. třídě řeší úlohu správně už 8 dětí: Pepík, Milena, Gita, Marcel, Nina, Vráťa, Eda (jen 3 ze skupiny A+B). Dva "skorořešitelé" ze 3. třídy sice mezi nimi nejsou, přesto však máme jejich kompetenci za potvrzenou:

Jindra: 560 - Chyba je ve výpočtu, kde mu při násobení pod sebe první mezisoučin vyšel 1060. Musel snad ve druhém kroku počítat 4*7=24 a 2 je 26?

Čenda: *"To znamená. 24*275" - ale neumí násobit dvouciferným číslem (je 17.3.98 - o něco později už by to bezpečně uměl, začali s tím 23.3.) - spočítal by to sčítáním. Pak odečte 6000 a zjistí, o kolik je to víc.* - Takže správné řešení, chybí mu jen kanonická znalost receptu na násobení pod sebe. A nechce se mu nejspíš do zdlouhavého počítání rozkladem.

Podobně dělají jen numerickou chybu při násobení 275*24 ještě další 3 děti - Bořek, Míťa a Kiška. Z širší skupiny **13 dětí, kde děti buď řeší úlohu správně nebo aspoň chápou postup**, je 7 ze skupiny A+B.

Je však třeba tu upozornit, že nelze zcela oddělovat znalost výpočtu od vhledu do struktury úlohy. Již v loňské zprávě jsme upozorňovali, že děti často začínají úlohu zkusmým výpočtem a až v závislosti na něm, tedy na jeho zdaru a na jeho potenci utvořit dobrou triádu s nějakým dalším údajem ze zadání, pokračují případně dále. Protikladnými příklady jsou tu Fanda (skupina A a jeden z nejlepších žáků) a Eduard (skupina E, výrazné potíže v testu i ve zvládání učiva[11]).

Eduard:

*"To bysme museli 275*24" - Vypočítá to, ale neví přesně, co to znamená.* Násobí to pod sebe, ale pro každý mezisoučin píše nový zápis, pak je ve třetím zápisu samostatně sčítá. (Je 18.3., ještě nebrali násobení pod sebe! Tohle asi umí díky tomu, že počítání je jeho záliba. Neumí to od Jindry?) Rozdíl už nikde nezapisoval.

Nemáme už v záznamu další poznámky, které by spolehlivě vysvětlovaly, co vlastně Eduard neví. Předpokládáme však, že jde o případ, kdy sémantika výpočtu vede k objevení sémantiky zadání, i když tu pořád zůstává nejistota. Porovnání výsledku 6600 a čísla 6000 v zadání spolu s otázkou "o kolik...?" může generovat správnou odpověď, přičemž by bylo třeba ještě dodatečné práce a pomoci dospělého, aby si Eduard uvědomil přesně korespondenci každého kroku svého postupu se zadáním.

Částečné potvrzení přináší jeho postup o rok později:

Takže musíme určitě 6000:275, vyšlo mu 210 - že by platili po 210 Kč. - Říkám: Ptají se nás na něco jiného. - Neví, napadl ho jedinej takovejhle způsob.

Tady mi dochází, že asi v téhle době berou písemné dělení, a tak Eda všechno dělí?

Naproti tomu Fanda:

*Zprvu nechápe - vysvětluji, že splátky znamenají více peněz než zaplatit celé namístě. Počítá 24*275 - ale nějak mu to nevyšlo. - Rezignuje.*

Napsal 275*24 pod sebe, spočítal oba mezisoučiny, ale druhý neposunul o místo doleva nebo nezapsal sloupce dobře pod sebe. Nezdálo se mu to, vygumoval to (takže nevím, zda měl mezisoučiny dobře) a rezignoval. Násobení pod sebe začnou brát právě dnes, 23. 3., hned hodinu následující po testu.

Pokud budeme rekapitulovat, pak v úloze s Nábytkem:

- 8 dětí řeší správně bez problémů, dalších 5 postupuje správně, ale dělají chybu ve výpočtu (v násobení);
- 2 děti v prvním kroku násobí, ale nezvládají výpočet a končí, nevědí, jak by pokračovaly (Fanda a Luděk);
- 5 dětí neví, jak postupovat (Martin, Lada, Vilém, Denisa, Evžen).
- 2 děti namísto násobení odčítají "6000-275" (Vanda, Slávek).

V 5. třídě je jedinou z loňských řešitelů, kdo úlohu neřeší správně, Gita, když dělá numerickou chybu při sčítání správných mezisoučinů u násobení pod sebe. Úlohu řeší správně 16 dětí. Ovšem strukturální pochopení

[11] Ovšem zároveň obdivuhodný přitom svou snahou a poctivostí. Počítání je přitom jedna z jeho oblíbených činností, patří k nejrychlejším počtářům zpaměti a po zvládnutí postupů počítá i spolehlivě pod sebe.

úlohy prokazují ještě další čtyři (včetně Gity), kteří dělají jen numerické chyby při násobení pod sebe. Je to jen shoda okolností, že jsou všechny ze skupiny A+B? Spíše se nám zdá, že rychlost a určitá nepečlivost v rutinních postupech je u těchto dětí častější než u ostatních.

V 5. třídě tedy nacházíme jen **4 děti, jimž strukturální korespondence zadání a výpočtu není jasná: kromě Eduarda ještě Denisa, Luděk a Vanda**. Kromě nich prokazuje při správném řešení určitou nejistotu, co to vlastně vypočítal, ještě Evžen. (Všichni jsou ze skupiny E.)

Úloha se tedy po ovládnutí písemného násobení - tedy násobní velkých čísel - stává snadnou, a to přesto, že přetrvávají problémy v sémantice zadání:

Vilém:

"To jsem trochu nepochopil - na splátky je to víc?" (Vysvětluju.) Hned počítá:

275

**24* - ovšem s chybou a výsledkem 6460.

Martin:

*275*24 téměř hned - kouká na výsledek, pak do textu (přemýšlí, váhá) - "to nevim, to nedává smysl" - o 600.* (Téměř jistě po vysvětlení "splátek".)

Darina: *Ptá se "a to budou splácet jako jeden kus toho nábytku?" (myslela, že "nábytek" může být "víc kusů".*

Tyto problémy nás vedou k úvaze, že vedle násobení velkých čísel také nejasná sémantika "splátek" mohla přispět v předchozích třídách k tomu, že některé děti na řešení rezignovaly.

Ověřme to částečně porovnáním s **úlohou 36 (Autopůjčovna)**, s jejíž sémantikou děti problémy zřejmě neměly.

Ve 4. třídě řešení této úlohy ostře diferencuje: Z 9 dětí, které řeší úlohu správně, je 8 ze skupiny A+B, 1 z C. Navíc zbylí dva ze skupiny A+B patří ke 3 dětem, které postupují správně (590-240=350, 350:2=175), ale nezvládají dělení "350:2":

Lada dělá jen drobnou chybu s výsledkem 125. Chyby druhých dvou ovšem ukazují, jak výpočet není v určité fázi vývoje počítání jen rutinou, která je bez vlivu na chápání logiky úlohy.

Vilém:

17 km. - Odečetl 590-240 (pod sebe) jako 340, pak dělí 340:2=17 (písemně).

Při odčítání napsal původně 250, pak to výrazně přepsal na 240, ale stejně jako by následně počítal s pětkou. (Motá se mu tam triáda 4-5-9 natolik simultánně, že není schopen udržet posloupnost? To by bylo zajímavé: pozornost jako schopnost nepřebíhat k anticipacím, zastavit se, nezaměňovat budoucí předvídané s tím, co je na řadě teď.)

Slávek:

"302 a půl? - 240 za auto, to jsem odečet od těch 590 a pak jsem to vydělil dvouma (vychází mu 27 a půl) - Ptám se, kolik dělil dvouma. - 350, to dělil jako 35:2. - Navrhuji mu písemně - dělá chybu v písemném dělení (při 15:2 mu zbyly dvě, dělí je bez připsání a do výsledku připisuje za 17 jedničku) - s dopomocí opravuje.

Slávek si u slovních úloh nic nepíše. Tady je několik zajímavých intuitivních výpočtů.

35:2 (dělit bez nuly je možná ozvěna rady učitelky pro tyhle příklady, myslím, že do té doby už to procvičovali, ale nulu pak k výsledku nepřipisuje.) mu vyšlo 27 a půl: vypadá to, že dělí 35 na 20+15, pak 15 na dvě části a výsledek spojuje s dvaceti. Je to forma skládanky v dělení?

Ale výsledek *302 a půl* vypadá jako 340-27,5! To by znamenalo, že v průběhu výpočtu ztratil korespondenci se zadáním a zcela náhodně odečítá stejně jako v první části úlohy? Až po mém dotazu ji opakovaným postupem zkonstruoval. Vypadá to, že v průběhu výpočtu ztrácí povědomí o tom, co počítá, přestává udržovat korespondenci se slovním zadáním. (Ale v 5. třídě řeší ještě hůř!)

Z ostatních dětí už jen Martin identifikuje dva odlišné kontexty - různé režimy, jimiž se částka 590 Kč vyčerpá a dělá chyby připomínající Slávka a Viléma:

"80 km". Odečetl pod sebe 590-240=340(!). "Musim vynásobit ty dvoukoruny, aby mi daly ten počet." - Zdá se že pak postupuje doplněním příkladu na násobení (namísto dělením) a zkusmým hledáním druhého činitele. Chytl se triády 3-80-240 (namísto 340)?, v níž trojku zaměnil s dvojkou?

Z ostatních dětí 4 děti jen dělí "590:2" (Darina, Denisa, Kiška, Vráťa), 1 (Marcel) naopak pouze odčítá.

Potíže Vráti a Marcela jsou ilustrativní:

Vráťa:

*To neví (po dlouhém přemýšlení). - Snaží se asi spočítat, kolik km ujede za 590 Kč, ale motá do toho násobení: 500*2=1000; předtím vyšel od 2*100=200 - potřeboval se dostat na 590 - šel by přes 500, ale nešlo mu to.*

Možná to není tak zmatené, jak to vypadá. Na první pohled totiž dospělák myslí, že výpočet 2*500 je součástí výpočtu 2*590 a že Vráťa nesprávně násobí celkovou částku cenou za 1 km. Ale on je 2*500 další aproximativní pokus: poté, co se 2*100 ukázalo být od 590 hodně vzdálené, zvedl druhého (hledaného) činitele hodně vysoko - asi tak, že mu to přestalo být srozumitelné.

Marcel:

*350. - Téměř bez rozmýšlení odečítá (pod sebe) 590-240. Pak napíše "350:2" - škrtá, pak 350*2 (pod sebe) - škrtá - pak jen přemýšlí: 350 km.*

Jako by z rozpaků, zda násobit či dělit vybruslil tím, že neudělá ani jedno? Zase je tu figura, kdy je zadán dělenec (součin) a hledá se druhý činitel. Kdyby se Marcelovi řeklo, že ujel 175 km a za každý zaplatil 2 Kč, asi by neměl problém. Jeho problém je ve struktuře zadání odpovídající dělení - je to tu stejné jako u Hubnutí (34). U Nábytku (31) nemá potíže.

Dále můžeme vidět spolu s redukcí na jediný kontext chybnou korespondenci u Luďka, který jen násobí, řešení Vandy "čtyři", která si "jen tipla" a nejednoznačný zmatek u Eduarda:

Neví, jestli má připočítat 240. "Nebo to mám násobit? Dvakrát dvěstě je 400 a ještě nám něco schází do 590 a ještě něco přičíst nebo hodněkrát násobit."

To je oříšek, co vlastně dělá. Zkouší násobit 240 * 2 (cena za kilometr)? A to, co zbývá (násobení ovšem nedotahuje) do 590, pak rozparcelovat na dvoukoruny? Není to jednoznačné: kdyby byla ve hře záměna jednoho dne za dva, pak by tohle byl správný postup. Ale úvodní váhání spíš naznačuje, že si neví rady s rozdělením celkové částky na dva režimy - denní poplatek a platbu za kilometry - a že zkouší, jestli mu nějakou figuru nehodí zkusmé početní operace.

V 5. třídě se úloha stává snadnou. Správně ji řeší 18 dětí, 3 další dělají při správném postupu jen numerické chyby. Z těchto 21 dětí projevují Darina a Evžen nejistotu ohledně korespondence matematických operací se zadáním.

Zcela špatně řeší úlohu Slávek, Denisa a Vanda. Slávkova "regrese" je tu pro nás překvapením. Překvapením opačného druhu je bezpečný vhled Eduarda:

350 dal za kilometry, takže 350:2=175.

350 ví rovnou, zpaměti, dělení sice zapisuje, ale nepočítá písemně, píše výsledek. Pro jistotu dělá zkoušku a násobí pod sebe 175*2=350.

Zdá se, že je to ukázka toho, jak bezpečná orientace v početních úkonech pomáhá nejen tím, že vhled do struktury zadání a korespondenci se strukturou výpočtu nenarušuje, nýbrž že je jí "strukturální vhled" ne-li přímo vytvářen, pak do značné míry podporován.

Opačné zakolísání vidíme u Míti:

Přemýšlí, pak 590-240, 350:2 - ale nedokončí, něco se mu nezdá. - Pak znovu - ale z hlavy: 175. (590-240: "kolik ho stály ty kilometry".)

Opakovaně to vypadá, že při receptuálním počítání ztrácejí kontrolu nad logickým průběhem operace.

To by pak znamenalo, že by stálo za to jim dodatečně vysvětlit, co se při receptuální proceduře vlastně odehrává, jak její vnitřní (nekontrolovaná) logika koresponduje s logikou vnější (kontrolovanou či kontrolovatelnou selským rozumem).

Při srovnání s úlohou 31 (Nábytek) zjišťujeme, že **ve 4. třídě řeší obě úlohy správně**: Pepík, Milena, Gita, Nina, jen numerickou chybu v úloze 31 pak dělá Bořek, Čenda, Jindra a Míťa (7 z nich ze skupiny A+B). Nikde tomu není naopak. To znamená, že úloha 36 určuje zároveň úspěšnost v úloze 31 - vyjma Fandy, který jako by se nechtěl pouštět do nezvládnutých početních úkonů. (Podobně je to možná s Ladou, která má úlohu 36 jen s drobnou chybou.)

V 5. třídě pak řeší obě úlohy 12 dětí (6 z A+B), 4 děti dělají jen numerickou chybu v úloze 31, další 3 v úloze 36. Nejsou tu jen: Slávek, Denisa, Vanda, Luděk, Eda.

Úloha 31 (Hubnutí) vtahuje do hry nikoli snad desetinná čísla obecně, ale přece jen jejich nejjednodušší případ. Řada potíží pak bude vyplývat právě z toho.

Ve 3. třídě byla předložena jen 5 dětem. Správně ji řeší jen Jindra; po dotazu, jak počítal, pak i Čenda, když si uvědomil, že načítání po 3 kg odpovídá načítání po dvou týdnech. Tihle dva byli už ve 3. třídě také blízko řešení úlohy 31 (Nábytek). K odpovědím Gity ("čtyři a půl") a Viléma ("čtyři týdny") nemáme dostatečné poznámky.

Ve 4. třídě už postupuje 8 dětí správně - 5 z nich zjišťuje řešení zpaměti, bez písemných poznámek, 2 si dělají nějaký druh tabulky, v níž k je k číslům označujícím týdny přiřazena posloupnost značící "kilogramy" narůstající po 1,5 nebo po 3. Vráťa si naproti tomu dělá záznam dělení rozkladem.

Dalších 6 dětí se pohybuje v rámci úvah, jak rozdíl 15 kg, případně vzdálenost od 60 do 75 kg "vyplnit" kvanty 1,5 kg - přitom ale tu můžeme vidět dost odlišnou úroveň. Čtyři z nich subjektivně dospívají k výsledku, ale dělají numerické chyby při načítání 1,5 (Martin a Lada při postupu zpaměti, Čenda s pomocí evidence počtu násobků na prstech - která není vyloučena ani u předchozích dvou -, Vilém v písemné tabulce), další dva si subjektivně nevědí rady, ale jejich problémy jsou asi podobné těm, které objektivně nezvládli předchozí jmenovaní.

Darina:

Zkouší zápis - nedaří se jí říci, jak to chtěla počítat. Chtěla nejdříve odečíst dvojky a pak tolikrát přičíst půl kila (od 75 kg). - Jenže to asi narazila na problém, kde s odčítáním dvojek přestat a začít s přičítáním stejného počtu půlkil. Musela by jít na střídavé odčítání dvou kil a přičítání půlkila, až by narazila na 60. Buď ji tohle nenapadlo nebo je to to, čemu se chtěla vyhnout: střídat počítání s celými kily a půlkily, to už je skoro stejné jako odečítat jedenapůl kila.

Její pokus o zápis byl:

1 ž 75

1 t 1,5 kg

Pak si ještě poznamenala něco jako "-15" - zřejmě jako rozdíl vah.

Evžen:

Myslí, že by to šlo, ale neumí to vysvětlit: "Dvě věci najednou - sečítám týdny a k tomu ještě ty kilogramy."

Na papíře je výpočet 15 : 1,5 = 3333333, ale asi to nemá být písemné dělení, asi právě načítá trojky (jakožto 2*1,5) do 15, ale asi se mu nedaří udržet zároveň interval (hranice) násobků a jejich počet.

Dalších 5 dětí pracuje s rozdílem "15(kg)", ale tápe, co s ním počít, v jakém vztahu je s údajem o týdenním úbytku váhy. Je to Slávek, Marcel, Denisa, Luděk, Vanda.

Jen 1 (Bořek) tu mísí kontexty a zkouší 1,5*7; 60*1,5; 7*60; 75:1,5. (Vidíme, že vtahuje do nepatřičný kontext: týden jako 7 dní. Možná právě tohle mu kontext zkomplikovalo.)

Nejednoznačné je řešení Kišky ("1 týden a šestapůl dne"), o němž nedokáže nebo nechce říci, jak k němu došla.

Nakonec velmi překvapivá je pro nás odpověď Fandy "nevím" bez explicitního pokusu o řešení.

V 5. třídě se také tato úloha stává snadnou. Bez problémů ji řeší 17 dětí - kromě Gity, která dělá chybu při načítání 1,5, všichni ze skupiny A+B. Devět z nich to ví rovnou, bez jakéhokoli načítání či písemného výpočtu a také Bořek násobením 1,5*10 svůj výsledek jen ověřuje. 6 dětí zjišťuje výsledek načítáním, většina v nějaké formě písemné posloupnosti násobků 1,5 (jen Čenda zpaměti při evidenci počtu násobků na prstech). Kiška hledá třetí člen triády 15-1,5-( ) zkusmým násobením - zároveň jeví nejistotu ohledně korespondence:

*Píše si 1,5*3 (pod sebe) = 4,5 - Neví dál. - Pak píše 1,5*10=15, ale mlčí. (Neví, co to znamená?) - 1,5*7 ... "Tak za 10 týdnů. (Nejistě.) Asi jo."*

Na papíře je ještě jeden výpočet - pod sebe 1,5*9=13,5. (1,5*10=15 je v řádku, ostatní pod sebe.) Není jasné, kdy to počítala. Smysl by mi to dávalo po váhání nad výsledkem 1,5*7=11,5 - kde ji asi znejistila sedmička a její vztah k "týdnu".

Snad zkoušela tímhle násobením aproximovat patnáctku, jako by si nebyla jistá, že 1,5*10=15 skutečně vypovídá o tom, co hledá: za jak dlouho se po 1,5 dostane na patnáctku, jako by to byla kanonická figura (jediná nepočítaná pod sebe), jejímž vztahem k ostatnímu násobení 1,5 si není jista.

Říkala jim tu někde uč. o násobení desetinných čísel desítkou?

Problém se správným načítáním 1,5 do 15 (nebo od 75 na 60), má kromě Gity ještě Luděk (prý "6x"), Darina (zapletla se do načítání grafického znázornění 1,5 jako "Oo").

Denisa svým problémem demonstruje, že pro řešení této úlohy může být klíčové zvládnutí triády 15-1,5-( ): *Zkouší 1,5*10* (písemně) *- ale to by jí vyšlo 150 tejdnů. - "Mně slovní nikdy nešly."* To ovšem nemusí znamenat, že jinak má v úloze zcela jasno. Ale po prvním zkusmém kroku, který nedává výsledek, jenž by ji nějak vedl dál, rezignuje - kdyby byl výpočet správně, patrně by to pro ni vneslo do úlohy jasno. (Naproti tomu Eda letos zřejmě řeší úlohu snadno zpaměti právě díky své početní zběhlosti.)

Chyby indikující nejspíše úplné strukturální nepochopení úlohy nacházíme u 3 dětí - Slávka, Vandy a Heleny.

Slávek

*Násobí 1,5*7=10,5 - neví, co s tím. Škrtá, přemýšlí. -*

Píše 1,5

*<u>*21</u>, vyšlo mu 41,5. Rezignuje - "nevim".*

Vypadá to, že podobně, jako v předchozím roce Bořek, Slávek reaguje na "týden" a vtahuje do hry číslo 7. Zkusmé výpočty by pak byly násobením počtem dnů v týdnu, resp. ve třech týdnech.

Něco podobného nacházíme u Vandy - výpočet 7*1,5 (pod sebe). Ten je ovšem poté přepsán na 2*1,5, podivně sečteny oba výsledky obou "12,5" a odpověď zní "za 7 týdnů".

Helena vychází z násobení 75*1,5=37,5 a nezřetelným postupem se dostává k odpovědi "35 týdnů a 5 dnů".

Shrneme-li výsledky těchto tří slovních úloh, zjišťujeme, že **ve 3. třídě byly zřejmě pro děti dostupné jen výjimečně** - ve dvou předložených slovních úlohách prokazují pochopení jejich strukturace a adekvátního postupu výpočtu **dva chlapci**: Jindra, který je odjakživa vášnivý počtář a matematik, a Čenda, kterého takto určitě charakterizovat nelze - u obou později nacházíme ve výpočtech numerické chyby, ale zůstávají už trvale v rámci adekvátní logiky řešení úloh.

Ve 4. třídě k těmto dvěma přibývá 5 dalších "kompetentních řešitelů": (Pepík, Milena, Gita, Míťa, Nina), takže úlohy **je schopno řešit 7 dětí.** Celá tato skupina patří ve 4. třídě mezi 9 nejlepších v subtestu Počty (s ní ještě Fanda a Vráťa). Řešení úloh je omezeno na zhruba **třetinu nejlepších**.

V 5. třídě se řešení úloh stává běžnou kompetencí většiny třídy - 18 dětí. Jen 6 dětí prokazuje vážné mezery v chápání takovýchto úloh: Slávek, Denisa, Vanda, Luděk, Eduard, Helena. Patří mezi 7 nejhorších v subtestu (s nimi ještě Kiška).

Na předchozí tři úlohy navazuje složitější strukturou a vyšší obtížností **úloha 26 (Lipták)** - v subtestu je zcela nepochopitelně zařazena před všechny tři předchozí úlohy.

Ve 3. třídě byla předložena 5 dětem - **nikdo ji neřeší**. Subjektivně dospívá k výsledku Jindra, ale není vůbec jasné, s čím má jeho výpočet 2625:2=1312,50 korespondovat - explicitně odpovídá "asi půlka". Reaguje to nějak na údaj, že pan Lipták "za každou přesčasovou hodinu dostává 1 a 1/2 svého hodinového platu"?

Ostatní děti na řešení rezignují, Čenda snad jediný po náznaku, který by mohl být jedním krokem adekvátního výpočtu, resp. ujasňování struktury úlohy: zapisuje "40*30", ale nepočítá.

Ve 4. třídě je úloha předložena 10 dětem, mezi nimi je všech 7 dětí, které jsme označili za kompetentní řešitele v předcházejících třech úlohách. Úlohu řeší úspěšně 2 z nich: Čenda a Jindra. Z ostatních dětí je ovšem blízko řešení Pepík. Dopouští se jen drobné redukce zadání - bere týdenní pracovní dobu namísto dvoutýdenní.

Gita dělá totéž, zjišťuje rozdíl 2625-1200, ale pak rezignuje: *"dál už nevim"*.

Milena u pokusu "25625:30" sama konstatuje "to je divný" a rezignuje.

Dalších 5 reaguje po krátkém rozmýšlení "nevím".

V 5. třídě úspěšnost řešení nijak dramaticky neroste. Úloha byla předložena 20 dětem. Řeší ji správně kromě loňských řešitelů Čendy a Jindry ještě další 3 děti: Lada, Gita a zcela překvapivě Evžen! Jen numerickou chybu v závěrečném výpočtu dělá Vilém. Tedy **celkem 6 dětí zvládá celý postup výpočtu**.

Zvýšil se ovšem také počet dětí, které se dopustily jen drobné redukce zadání - nejčastěji počítají s týdenní namísto dvoutýdenní pracovní dobou (Pepík, Míťa, Milena), v 1 případě (Bořek) pouze s přesčasovým příplatkem (15 Kč) namísto přesčasové mzdy (45 Kč).

Mezi těmito 10 dětmi, které prokazují orientovanost ve struktuře úlohy, je 6 dětí, které byly mezi kompetentními řešiteli slovních úloh ve 4. třídě - z nich tu chybí Nina. Je tu 9 dětí ze skupiny A+B (chybí Fanda - i předchozí úlohy řešil ze skupiny mezi posledními), kromě nich pak Evžen!

Úlohy s konvemi

Úloha 32 (jak dostat přesně dva litry pomocí pětilitrové a třílitrové konve) je ze dvou podobných úloh zřetelně jednodušší. **Ve 3. třídě** byla zadána 16 dětem, správná řešení byla jen tři: Vilém, Marcel a Gita.

Vedle většiny ostatních dětí, které odpovídaly "nevím", jsme zaznamenali i některé pokusy o okliku - změřit výšku (Lada, Bořek), zvážit nebo vědět, kolik nateče na "jedno pumpnutí" (Bořek).

Ve dvou případech se chlapci pokoušeli řešit "2 litry" jako součet 1+1: "do každé konve 1 litr.

Úloha 33 (jak dostat přesně 1 litr pomocí osmilitrové a třílitrové konve) byla předkládána jen při vyřešení úlohy 32. **Ve 3. třídě** ji ze tří řešitelů úlohy 32 vyřešil jen Vilém.

Ve 4. třídě řeší jednodušší úlohu 32 správně 9 dětí: kromě Viléma, Marcela a Gity, kteří ji řešili už ve 3. třídě, ještě Pepík, Míťa, Fanda a Eduard (!). (Tedy 7 z těchto 9 ze skupiny A+B, Marcel z C a Eduard z E.)

Co vlastně v úloze děti řeší, ukazuje Pepík:

Nejdříve uvažuje: kdyby nalil třílitrovou do pětilitrové, zůstalo by tam místo na 2 litry - ale jak by to udělal? Pak ví: Úplně plnou pětilitrovou přeleje do třílitrové, zůstane mu přesně dva litry. Tamto pak může vylejt.

Opět najdeme 2 pokusy o jakési sčítání ze dvou konví, Bořek ale pak ví, že to není řešení. Nina naproti tomu "do jedný jeden litr a do druhý jeden" za řešení má.

Mezi 10 dětmi, které nevědí, najdeme u 2 zajímavé kontextové skluzy:

Luděk: *"Z třílitrový do pětilitrový - ale jak to vodebrat, aby tam byly jenom dva litry?"* - Nepracuje zřejmě vůbec s triádou 2-3-5, drží se požadovaných 2 a nejbližší třílitrové. Pětilitrovou naplňuje asi proto, že mu to radí v úloze - i když to dělá vlastně jinak, než mu navrhují. Pětilitrovou tedy nechápe jako součást měření?

Darina: Myslí nejdříve, že stačí přinést plnou pětilitrovou konvici (tzn. "víc než dva litry"?). Jako by to vzala tak, že matka potřebuje dva litry, když se tedy přinese víc, bude to v pořádku.

V 5. třídě řeší úlohu 32 už většina dětí - 18 z 24. Přesto musí některé děti přemýšlet, nevidí řešení naráz:

Bořek: *“To se bude přelejvat... to vim” (Přemýšlí.) “Kdyby z pětilitrové přelil do třílitrové, zbyly by mu 2 litry.”* Výchozím bodem jeho uvažování je tedy syntagma reálné operace.

Jindra: *Ví, že 5-3=2, ale neví, jak to provést. - Pak: pětilitrovou naplní, přeleje do třílitrové - zbydou 2 litry.* Vychází tedy od uspořádané číselné triády.

Také Darina dlouho přemýšlí, z jejího postupu v úloze 33 se pak zdá, že tam postupuje podobně (a podobně jako tady Bořek):

Darina:

*Naplní třílitrovou, naleje do osmilitrové, podruhé... potřetí, ale tam už se vejdou jenom dva litry a tím pádem zůstane jeden litr. - Nezačala figurou 3*3; naplnila třílitrovou, přelila a "pak už jí to dokleplo, že..."* (Zkusmá operace odpovídající zkusmému prvnímu kroku ve slovních úlohách.)

Úlohu 32 neřeší jen Slávek (ze skupiny C), Kiška (D), Helena, Denisa, Luděk a Vanda (všichni E).

Kiška: *Do pětilitrový naleje 3 l, ten kousek by mu měl zbýt. - ? - Neví.* Triáda je jasná, operace v realitě nikoli. Má na to vliv, že triáda tu má spíše formu 3+(2)=5 a nevzniká tak metafora odlévání jako odčítání?

Luděk opakuje pokus, který jsme už dříve viděli u jiných: *Do třílitrové naleje, do pětilitrové taky něco, aby mu zbylo v každý stejně... - Pak: "n. ř." ("nemá řešení")*

Další návrhy postupu jsou přelít z pětilitrové konve polovinu do třílitrové (Helena), z třílitrové litr vylít - pětilitrovou nepotřebuje (Vanda). Denisa se domnívá, že "u pumpy" se přece množství ukáže (má zřejmě na mysli jakoby benzínovou pumpu).

Úloha 33 byla **ve 3. třídě** předložena jen 3 dětem (řešitelům úlohy 32), vyřešil ji pouze Vilém.

Ve 4. třídě řeší úlohu Pepík, Gita a Míťa, Vilém překvapivě odpovídá "nevím" - je to jediný případ, kdy je úloha s konvemi po úspěšném řešení v jednom roce neřešena v následujícím.

V 5. třídě ji řeší správně 11 dětí. Kromě řešitelů ze 4. třídy (Pepík, Gita, Míťa) se "vrací" Vilém, přibývají dále Lada, Čenda, Milena, Bořek, Marcel, Darina a Vráťa. (Tedy 8 dětí ze skupiny A+B.)

Dvě strategie, odlišující se svým východiskem - buď se vychází z aritmetické figury a hledá se "jak to udělat" nebo ze zkusmého přelití, po němž teprve dojde k vhledu do aritmetické struktury operací - jsou dobře viditelné v některých reakcích v úloze 33.

Už ve 3. třídě (Vilém), pak ve 4. (Míťa, Gita) někteří řešitelé zřetelně formulují řešení jako "třikrát naleje třílitrovou". V 5. třídě lze jasně odlišit jen některé případy. Z aritmetické figury vycházejí nejspíše opět Míťa a Gita. Naopak se zdá, že kromě Dariny postupuje od přelití k vhledu do struktury také Milena - "*Naplní třílitrovou, nalije do osmilitrové, pak zase... pak znova - naleje a zbyde 1 litr.*" - ale latence vyznačená tečkami tu není úplně jednoznačným indikátorem.

Napovídají něco některé případy neřešení?

Jindra: *Kdyby měl sedmilitrovou, to by věděl. - Pak ví figuru 3*3, ale poslední litr by prý přetekl - jak ho chytit?*

Martin: *Naplní třílitrovou, naleje do osmilitrový, potom ještě jednou... pak... pak... to by bylo 9, jeden by z toho vodtek.*

Nina*: Třílitrovou a třikrát by nalila... - ??? - Neví, jak to udělat.*

Jako by přelití třílitrové konve chápali jako jednorázový akt, nikoli děj, jako by ho nemohli přerušit, s jakousi zesílenou simultaneitou na úkor sukcesivnosti. Ostatní děti, které se dostanou až sem, vůbec nenapadne, že by přelití nezastavily, že by se voda vylila. Jde u nich o fixaci na aritmetickou figuru? Nemusí přitom jít o nějaký trvalý způsob uvažování, může to být dokonce fixace jen momentální.

Jenže podobný problém má Fanda a přitom vychází spíše z postupného zkusmého přelévání: *Neví - dvě třílitrové nalít do osmilitrové, ale neví, jak dál.* Ani u Martina nezazní jasně ono "třikrát" - nemluvě už o tom, že ani verbální formulace "krát" není jednoznačná, může jít jen o verbální zkratku předchozí představované posloupnosti.

Úloha 27 (Máslo)

Další slovní úlohou je 27 (Máslo). Tato úloha je nešťastně formulována: Z pouhých dvou možností odpovědi na otázku "které balení másla je levnější" je odpověď B správná jak absolutně (zaplacenou částkou) tak relativně (cenou za množství). V úloze má přitom evidentně jít o to, které máslo je lacinější relativně (jinak by úloha byla přiměřená snad pro prvňáky). Snažili jsme se toto chápání úlohy zajistit dodatečnou instrukcí ve znění: Ale myslím to takhle, kdybych si toho másla koupil stejné množství, které by bylo lacinější, které by mě vyšlo levněji? Avšak i tehdy, když bylo zřejmé, že děti chápou úlohu v tomto smyslu, zůstává problémem, jak hodnotit odpovědi: Je správnou odpovědí správný "tip"? Jakési intuitivní posouzení, které někdy děti neumějí popsat a jindy ho popisují vágně bez přesnějších kvantifikací? V průběhu opakovaného zadávání jsme ve snaze zjistit jejich postupy a argumentaci jejich závěrů vlastně zpřísňovali kritérium pro skórování "správně", takže výsledky z jednotlivých tříd nejsou zcela srovnatelné. Údaj o vývoji počtu správných řešení tak nemá potřebnou vypovídací schopnost. Ve shodě s tím je nižší ukazatel reliability v čase, který zde činí 79%. Vypovídá tu především o nižší spolehlivosti našeho skórování.

Úloha 27 (Máslo) je konceptuálně odlišná od dosavadních úloh. Je typickou úlohou zacházející s chápáním poměru či porovnáním dvou poměrů, případně - v jiné (Piagetově) terminologii - s rovnovážnou soustavou dvou veličin: Stejné částky za dvě balení másla mohu dosáhnout operováním s cenou za jednotku či s množstvím. Naše reformulace pak uvedla zadání na ekvivalent formy: Jaký je charakter nerovnováhy (které máslo je levnější) při stejném množství?

Ve 2. a 3. třídě jsme se spokojovali s neargumentovanými odhady. Ve 2. třídě byla ovšem úloha předložena jen Fandovi - tipoval správně "10,80".

Ve 3. třídě jsme jako příklad stejného množství uváděli "Kdybych si koupil jen 10 dkg toho másla, které by bylo lacinější?". To mohlo částečně omezit úvahy dětí - později některé převáděly oba druhy na jiný váhový ekvivalent, např. na 60 dkg.

Za tohoto zadání byly skórovány jako správné odpovědi 6 dětí. Chtěli jsme přitom po nich argumentaci a za správnou jsme uznávali takovou, kde posun množství na 10 dkg byl dáván do souvislosti s proporcionálním snížením ceny, byť bylo intuitivní nebo počítáno ne zcela správně. Záznamy argumentace máme bohužel jen u 3 dětí:

Jindra: *B - je to odhad: asi tak 8 Kč. - "A" ví přesně: 9 Kč.* Mají to být ceny za 10 dkg másla.

Fanda: *B - stálo by 5,40* (Myslí asi 10 dkg béčka.)

Nina: *B - "si to myslim"*

Zatímco u Niny je skórování z hlediska uplatněných kritérií neoprávněné (pokud nepodala další nezaznamenanou argumentaci), u obou chlapců je v pořádku: Jindra podává poměrně přesný proporcionální odhad s přesným výpočtem v rámci známého oboru čísel, Fanda postupuje stejně, jen možná omylem po výpočtu považoval zjištěnou částku za cenu za 10 dkg. V páté třídě bychom však možná ani jeho řešení neuznali.

Zajímavý j výpočet Martina (skórováno jako nesprávné):

B - 10 dkg by stálo 80 hal., A - 10 Kč. Zdá se, že při záměru převést oba druhy na množství 10 dkg postupuje tak, že od jejich ceny odčítá "10".

Ve 3. třídě se přes objektivní obtížnost úlohy přiklonily k explicitní odpovědi "nevím" jen 3 děti, Denisa pak kolísala mezi oběma alternativami. Nejčastější odpovědí bylo "A" - 10 dětí (5 dětí ze skupiny A+B) - při ní jsme argumentaci nezjišťovali.

Ve 4. třídě jsme vedli mnohem podrobnější záznam argumentace. S přesností skórování však nemůžeme být zpětně spokojeni ani tady. Z osmi uznaných řešení není popsáno u Jindry, který však bezpečně řešil úlohu loni. Tři jsou založena na přesných výpočtech či kvalifikovaném odhadu: Bořek vypočítává, že 15 dkg "A" by stálo "třináct a půl"; Gita porovnává cenu pro 30 dkg - u "B" 21,60 Kč, u "A" půlku navíc - to by bylo víc; Fanda odhaduje, že 15 dkg A by stálo asi 14 Kč).

Další dvě uznaná řešení jsou založena na nepřesných výpočtech:

Vráťa počítá ceny za 60 dkg: 3*18=54, 5(!)*10,80 je méně. Přitom si ověřuje, že "5*15=60"! Strukturálně je postup v pořádku, i když při početní chybě je jeho závěr sporný a měl by dojít k tomu, že másla stojí stejně.

Marcel: B - *U A stojí 10 dkg 9 Kč, u B 5,80 (odhadl).*

Převod na stejnou váhu je logicky správný, nikoli však početně - pokud u B dělil (přibližně) také dvěma, může jít už o chybu nikoli numerickou, ale strukturální.

Konečně u Míti a Niny jsme se nesprávně spokojili s intuitivním odhadem, který dával vágně do souvislosti cenu a váhu balení:

Míťa: *"Asi to béčko." Protože se mu to zdá víc možné: za těch 18 těch 20 dkg dražší než těch 15 za 10,80.*

Nina: *"Kdyby to vážilo stejně, tak by stejně bylo B levnější.")*

Naproti tomu Mileně jsme skórovali jako nesprávné toto řešení:

Nejdříve: A. - Rozdělila by 10,80:2=5,40, přidala by k 10,80, aby to bylo 20 dkg. - opravuje na B.

Jde o podobný postup, který jsme výše u Fandy za kvalifikovaný odhad, jen s numerickou chybou při zjištění části, s níž by se u B dostala na 20 dkg, nebo je to spíše podobné řešení Marcela, kde nemáme jistotu, zda nejde o chybu strukturální?

Můžeme tedy revidovat původní skórování a konstatovat, že úlohu **ve 4. třídě bezpečně zvládlo 5 dětí**: Jindra, Gita, Fanda, Bořek, Vráťa. U dalších 4 (Míťa, Milena, Marcel, Nina) lze snad předpokládat intuitivní chápání vztahů úměry - projeví se to v 5. třídě? (Dále uvidíme, že nikoli.)

Z ostatních dětí čtyři zkoušejí nějaký postup či úvahu:

Pepík:

Dlouho přemýšlí - zkoušel zjistit od každýho 1 dkg - ale neví. Neví u otázky "když 20 dkg stojí 18 Kč, kolik stojí 1 dkg" jak postupovat, jak počítat.

Tady je vidět, jak uspořádání konkrétních čísel nenapovědělo řešení, početní operaci. Kdyby "jazykově" stejné strukturální uspořádání bylo, že 3kg stojí 18 Kč, pak odpověď na otázku kolik stojí 1 kg se jakoby nabízí.

Pepík je zase blízko, jsou mu jasné - jak to popsat? - vztahy úměry? (měl by být dobrý později při zlomcích v úměrnosti), ale neví, jaké početní operace s tím korespondují.

Vilém:

B, ale: *"A by vydělil dvěma, B pěti..." a už neví.*

Pokoušel se to zřejmě převést na 10 dkg. U B by musel dělit 15 (dkg) třemi (=5), aby následně násobil dvěma. Zmotala se mu triáda 15-3-5 a tvrdil proto, že by dělil pěti, ale pak mu logicky nebylo jasné, co by tak dostal?

Martin:

"To první, protože je tam víc másla za víc peněz."

Kiška:

"B si udělá taky na 15 (dkg) - a bude to 18-5 (Kč)"! - Musela se přeřeknout, másla B je 15dkg - na 15 dkg si tedy předělávala máslo A. Tedy rozdíl váhy obou druhů másla (5dkg) odečte od ceny těžšího másla a dostane tak jeho cenu při 15 dkg. Muselo jí tedy vyjít máslo A za 13 Kč, B za 10,80 je tedy levnější.

Další 3 si výslovně jen tipli (Luděk, Evžen, Vanda), u Lady a Čendy nemáme pro volbu "A" zdůvodnění.

Zajímavou úvahu prezentoval Eduard: *"takovej chyták, myslim, budou stát stejně"*. - Je to jen sociálně-lingvistická úvaha, zní mu to jako chyták? Nebo je tam hrubá kvantifikace a hrubá forma rovnováhy: stojí víc, ale taky víc váží?

Není možné, že **úvaha o chytáku** vedla ve druhé třídě tolik dětí k volbě "A"?: "Přece se neptají na to, co je vidět na první pohled - bude to tedy obráceně?"

V 5. třídě jsme po odpovědi vyžadovali zdůvodnění a úvahu, jak by to vypočítali. Záznamy jsou hezkou ukázkou uvažování dětí nad vztahy úměrnosti. Prezentujeme proto většinu řešení.

Správně řeší úlohu 7 dětí, z nich 4 (z 5 - chybí Bořek), u nichž jsme považovali řešení za bezpečně zvládnuté už ve 4. třídě: Jindra, Gita, Fanda a Vráťa. Nově je tu Čenda, Tomáš (v 5. třídě nový žák) a překvapivě pro nás Evžen![12]

Jindra:

B - *Zběsile počítá (viz papír). Vydělil 10,80:15-> 1 dkg. Pak to vynásobil 20 - vyšlo 12.*

Na papíře je 10,80:15 = 0,610 (písemně: zbytek 18 po zpětném násobení šestkou bez sepisování znovu dělí - z toho pochází jednička ve výsledku. Dělá tuhle chybu přesto, že vedle má ve sloupci sestupně násobky 15: 135, 120 105.). Nad tím “0,60” - patrně zaokrouhlení. Pod tím je 20:18=1 (písemně, zbytek 2) a vlevo nahoře pod sebe 0,6*20=12,0.

Takže jakoby ověřuje výsledek jednak porovnáním ceny za 1 dkg (přičemž 20:18 dělí inverzně), jednak porovnáním ceny za 20 dkg (které přibližně odpovídá i po numerické chybě v dělení). První způsob ale nechal při vysvětlování stranou - nebyl si jistý?

Gita:

*B - neví jak, odhaduje. - Pak přemejšlí: 18:4=4,50 a 4,50*3=13,50. B je levnější.*

Fanda:

B - *Kdyby z 20 dkg (u B) ubral 5, vyšlo by to pořád víc než 10,80 - odhaduje tak na 13 Kč. - Neví ale, jak by to zjistil přesně(!).*

To odpovídá úvaze, že 18 a 20 (cena a množství) u A je zhruba stejné. Tedy o 5 dkg méně je i o 5 Kč méně.

Vráťa:

*4*10,80; 3*18=54 (převádí na 60 dkg)*

Tomáš:

*Chce psát, ale: “... to je blbost” - nepíše. Přemýšlí - pak B. - Našel 5 - 15 je 3*5, 20 je 4*5. Pak 10,80, to je 3,30; 3,30*4 je asi 12,90 -> B je levnější.*

Struktura výpočtu sedí, nepřesnosti jsou v zacházení s desetinnými čísly zpaměti: při dělení 3,30 si 10,80 zaokrouhluje na 10? Při násobení 3,30*4 násobí haléře tak, aby nepřešly přes celou korunu? Drží je zvlášť, má potíže držet nepříznakově přechody mezi desetinnými čísly a celými jednotkami?

Evžen:

B - *"Zápis":*

A = 20 dkg = 18 Kč

B= 15 dkg = 10,80

---

[12] Viděli jsme jeho vzestup už v předchozích slovních úlohách "na násobení".

Několikrát jsme si ve 4. a zejména pak v 5. třídě poznamenávali, že se u něj objevují náznaky jakéhosi obratu: zvýšeného úsilí, snahy o lepší známky, překvapivé správné odpovědi na obtížné otázky. Učitelky na tento obrat (nejsme si jím ovšem jisti) zatím příliš nereagovaly, jeho přihlášku na víceleté gymnázium komentovala jedna z nich jako drzost., ani jeho prospěch se příliš nezlepšil. Bohužel přešel na jinou školu, takže nemáme možnost ho dále sledovat.

"Balení B" - protože 20 dkg je jen o 5 dkg míň (plete se ve výrazu) než 10,80 - kdyby bylo A 20 dkg, bylo by to eště míň než 18. - ?Ptám se na cenu 20 dkg u B. - Dělí 10,80:3=3,60, pak sčítá 10,80+3,60=14,40. - Perfektní.

Ze skupiny loňských řešitelů chybí překvapivě Bořek, o jehož řešení loni nemohly být pochybnosti. Letos postupuje jinak.

Bořek:

"Jo to jsou ty procenta, mám to udělat na procenta?" - Myslí B. Tipnul. - ??? - Vydělil by stem 18:100=0,18 - krát 5 = 90... "to je blbost... divný." Řekl by B. - Ještě zkusí, aby si to potvrdil: 15:10,80 - dělí (dělí písemně, správně převod na 1500:1080 a první krok) *, pak: "to je blbost taky... no to je jedno..." Ještě něco mumlá, zkouší různé číselné kombinace.*(Ne písemně? leda pod sebe 33+18=51?) *Setrval u tvrzení "B".*

Řešení tedy nezvládly ani děti, u nichž jsme loni už předpokládali možnost orientovanosti ve vztazích úměrnosti - Milena, Míťa, Marcel, Nina:

Milena:

A - asi první tip. - Ptám se. - počítá si - znovu A: dělila 20 dkg 18, to je míň než 15:10,80. (Dělení zapsáno písemně, ale nepočítá zbytky, spokojí se asi s odhadem, že v druhém případě by za desetinnou čárkou vyšlo nějaké větší číslo? Nebo možná srovnává velikosti zbytků?)

Zajímavé je, že ji nijak nezneklidní ona intuitivní kontrola poměrů, jako třeba Kišku, že se zcela svěřuje mechanice početních operací - v jejím případě inverzních.

Míťa:

Asi A - vydělil 18:20, 15:10,80 (z hlavy) - "nebo "ňák tak". - Zjišťoval "kolik stojí dkg" (původně řekl "gram") - nic si nepíše.

Takže jednou dělí cenu množstvím (18:20), podruhé množství cenou (15:10,80) - při porovnání těchhle výsledků má ovšem pravdu. Kvantitativní poměry čísel zvládá dobře, ale s obsazením pozic korespondujících se syntagmatem "kolik za 1 dkg" ujel.

Marcel:

20 dkg : 18 = 1 (2 zbyde); 15:10,80 = 1 (zbyde 4,20) - zbytek 2 je menší než 4,20 -> B je levnější.

Perla. Zacházení se zbytky trochu připomíná Edu. Napadá mě, jestli přemýšlení=váhání nepřipadá Marcelovi nemužné či jinak nedůstojné. Jako by i tady držel pózu sveřepého bojovníka, neváhajícího, rázného.

Nina:

Z hlavy: 15 a 15 je 30. Kdyby koupil 2 másla A, tak by to vyšlo víc než 2 másla B.

Má "2 másla" za stejné množství. Navíc nesčítá cenu, ale váhu.

Ale mohla to původně myslet jinak: převést na množství 30 dkg - což by u "B" byla "2 másla". Pak udělala skluz a u "A" šla namísto na 30 dkg taky na "2 másla". Začátek postupu mohl tedy být shodný jako u Gity - ale neudržela ho?

V předchozích řešeních se u Mileny, Míti a patrně i u Marcela objevuje snaha **porovnat ceny másel prostřednictvím ceny za 1 dkg**. Zatímco loni tak uvažoval jen Pepík, letos se o to pokouší **celkem 6 dětí**, kromě už zmíněných znovu Pepík a dále Denisa a Eduard:

Pepík:

Dělá si zápis! - "To nejde!" (pro sebe, nevím co - přemýšlí). Pak: A - Počítal, kolik přijde na jedno. Dělil původně 18:20, "což je blbost", pak 20:18, pak 15:10,80 - koriguje: lacinější je B, pak zpět: A.

Zápis vypadá takhle:

A....... 20 dkg.... ~~18:20~~

B........15 dkg......10,80

Denisa:

*Zívá. Dlouho přemýšlí. Pak píše 1,3*15 (pod sebe) = 19,5. - "Asi to B." (1,3 je 20:18 - koriguje na 1,2.)*

Rámcovou strukturu chápe správně? zkouší výpočet jednoho dekagramu a z něj pak cenu 15 dkg.

Proč má takovou sílu inverzní postup "množství děleno cenou"? Pochybujeme, že by to bylo jen v tom, že dosud nebrali dělení menšího čísla větším (to až v šesté třídě). Spíš to bude v sémantice: oni potřebují rozdělit těch dvacet deka na jednotlivá deka a dělení "na dvacet" řeší jako "dělení těch dvaceti"?

Eduard:

A - *Myslel, že 1dkg stojí 1 Kč... Pak dělí: 10,80:15, potom 18:20. (Možná by to zvládl při celých číslech.) - Počítá "kolik stojí 1 dkg" - u B: 30 hal (zbytek!), u A 0 (zbytek!)*

To, co jsem si poznamenal namístě, není úplně přesné. Jednak u dělení 18:20 nemá nulu jako zbytek, ale jako výsledek za rovnítkem, žádný zbytek dál nepočítal. Jednak tu má ještě násobení pod sebe: 0,30*20 (s mezisoučiny 0,00; 0,60 a výsledkem 06,00).

Jsme tu tedy svědky opaku toho, co je u dětí obvyklé: Eda má správně postup, postihující korespondenci se strukturou zadání, ale nezvládá receptuální procedury a jejich interpretaci - právě v jejich průběhu jako by ztrácel korespondenci.[13]

Vilém představuje přechod mezi pokusem o porovnání 1 dkg a intuitivním odhadem proporcí:

Počítá 15:10,80 (to se právě učili) - násobí 100, 150:108. Pak tipuje B - pak to nepochopil, jak by to měl dál počítat. Zbývá jen 5 dkg - a rozdíl je skoro 8 korun.

Co tu je společné s předchozími, je inverzní obsazení ceny a váhy při dělení. Pak ale následuje odklon k jinému přístupu.

Už u řešitelů úlohy jsme viděli, že **pouze jeden z nich postupuje přes 1 dkg - Jindra**, který řeší úlohu správně už od 3. třídy!

Jinak jako by cesta přes 1 dkg byla tím, co poznamenáváme u Mileny: svěřením se mechanice receptuálních postupů "dělení". Že má jít o dělení, to se cítí. Cítí to i Darina, která jinak postupuje intuitivním odhadem proporcí:

Darina:

Áčko - protože 15 gramů 10,80 - spíš jsem hádala B. Do 20 zbejvá 5 a stojí 10,80 - ?(jak to spočítat?) - Asi nejdřív dekagram - ? (jak?) - Asi dělenim. Neví, co by dělila, zkouší... ale neví

Intuitivním odhadem postupuje v páté třídě 5 dětí - kromě Dariny ještě Lada, Martin, Kiška a Helena.

Lada:

asi A - *Nic nepíše. Pak A - kdybych 15 dkg dala do 20, vyšlo by to víc.* - Tzn., že nejhrubší či nejobecnější úvaha je správně: musela bych "dát oněch 15 do 20 dkg". Ale odhad je nesprávný - nic přesnějšího o něm nevím.

Martin:

Béčko - je to jen o 5 dkg (méně) *a je to víc peněz - a je tam víc másla - spočítat by to neuměl.*

Na papíře má kvazizápis: A a B ve čtverečcích, pod A "18", pod B "10,80", nad B "15".

Jako by (s pomocí této grafické extrakce?) cítil poměr ve prospěch B - to ovšem platí v případě, kdy argument "a je tam víc másla" se týká B - a to je pravda právě jen relativně (tedy s jakýmsi implicitním "za ty peníze" - což je jen opakování tvrzení, nikoli argument). Pokud to bylo vyjádření o balení A, argumentuje rozporně.

Kiška:

Není si jistá. - B - "A" 20 dkg za 18, "B" je 15 dkg za 10,80 - to je levnější. - Ptám se, kdyby to měla vypočítat? - Špitla si pro sebe něco o procentech? - Pak: "nebude levnější A - vo 6 korun, ale zase o 5 dkg - vo 6 korun dražší je to A".

Konečně mi dochází, co tu stačí k intuitivnímu odhadu: u A je váha a cena skoro stejná - 18 a 20, kdežto u B je cena o dost nižší než váha: 10,80 a 15.

Kiška ovšem uvažuje o formuli "6 korun (rozdílu) za 5 dkg (rozdílu)" - odhaduje, že je to moc, že A je dražší. (A to má ještě rozdíl špatně - interferuje tu u 10,80 "dvacetník do celé" a promítá se do zaokrouhlení na 12?)

Na papíře je mj. nejednoznačný zápis:

6^{20} 20

15

Helena:

Hned píše - zápis. - Pak: "To A." Protože toho B je míň než toho A, takže je to levnější, když je to jen o 3 koruny (rozdíl mezi 15 a 18).

Zní to jako nesmysl, jak porovnává váhu s cenou, ale z jejího zápisu je pak zřejmé, co udělala:

A 20 dkg - 18 Kč

B 15 dkg - 15 Kč

Právě zápis má špatně, B má stát 10,80! Takhle je její úvaha správná, ovšem oproti ostatním dětem má předpoklady pro ni snazší.

U intuitivních odhadů nejde o prosté hádání, tipnutí si, ale o to, co jsme zřejmě v předchozích třídách - také intuitivně! - cítili jako existenci přibližného chápání kvantitativních poměrů, které jsou děti schopny explicitně formulovat jen vágně. Zde se nám konečně ukázalo, jak je tu tento odhad je vázán na konkrétní čísla. Děti cítí

[13] Je to náhodné? Ani u úlohy 26 (Lipták) není jeho postup zcela nesmyslný, byť redukuje strukturu na pouze jednu (ovšem přesčasovou) hodinovou sazbu - ale pak interpretuje dělení stejně nesprávně jako tady u B: zbytek považuje za výsledek. Berou asi zrovna dělení. Jenže to by - vedle zmatku v postupu a interpretaci - mohlo vysvětlit tendenci "všechno dělit", nikoli však překvapivou správnost toho, co čím dělit.

Je tu možno uvažovat o tom, že Eduard právě prostřednictvím oblíbeného zacházení s čísly vniká do korespondencí s textem (verbálním popisem reality) a do jeho struktury, která byla původně jeho slabinou?

rozdíl jako "blízkost" či "skoro stejnost" ceny a váhy u "A": $18 \cong 20$ - a naproti tomu vzdálenost, nestejnost ceny a váhy u B: $10{,}80 \neq 15$.

Je možné, že poučeni touto analýzou bychom byli schopni rozpoznat tuto už poměrně adekvátní práci s poměry i v některých dalších odpovědích v dřívějších třídách. Možná ale, že naše intuitivní skórování některých formulací, které uváděly do vztahu dva různé poměry množství a peněz (viz např. u Míti ve 4. třídě), rozlišovalo správně?

Bez náznaku úvahy jen odhadují Slávek, Luděk ("b" - "tak ho to napadlo") a Vanda ("a" - "jen odhadla" – na dotaz: "spočítat by to neuměla").

Podíváme-li se na řešení jednotlivých dětí v po sobě následujících letech, není možno tu pozorovat zajímavou linii?

Nejdříve intuitivní uchopování, které je simultánním usouvztažněním všech kvantit, celé soustavy, avšak přibližným. Při snaze vyčlenit jednotlivé vztahy či je dokonce postihnout přesně výpočtem se chápání, koncept rozpadá, přestává to dávat smysl. Dalším krokem k přesné kvantifikaci a tedy diferenciaci (nutně explicitně vyjádřené) původního intuitivního konceptu se mnoha dětem děje právě toto: při vyčlenění jednotlivých členů soustavy a jejich uvedení do explicitně vyjádřených syntaktických vztahů se význam jednotlivých vztahů - a jejich vztah k celku soustavy - ztrácí (časté komentáře "to je divný", "to je blbost") - a to nejen při objektivně sémanticky prázdných inverzních syntaxích, ale někdy i při syntaxi objektivně adekvátních (např. Čenda, Míťa?).

Je to i případ Slávka? Ten znovu jako loni jako by se chápal tužky, ale pak rezignuje:

Myslí A - pak že to spočítá. Ale napsal “20” a pak už nic. Pak: “si to spíš myslim”.

Vidíme tu jakoby dvě cesty k diferenciaci.

1. Výpočet přes 1 dkg, který v 5. třídě selhává a neguje subjektivní význam soustavy. Je však téměř jisté, že v další třídě se u řady dětí tato diferenciace dokončí a prostřednictvím vhledu do postupu počítání standardních školních příkladů na "úměru" či "na procenta" (Bořek možná vágně tuší souvislost už v 5. třídě) se celek chápání zase složí ve smysluplný celek, tentokrát už diferencovaný.

2. Druhá cesta jako by nevyžadovala onu negaci, rozbití intuitivního konceptu soustavy a vztahů v ní. Jeho diferenciace však jako by v tom případě nemohla být totální, fragmentovaná na "jednotky", ale jako by postupovala dílčími kroky, postupnou strukturací přes porovnání jakýchsi parciálních, nikoli však fragmentárních kvantit. Ty pak musí vůči sobě být v nepříznakových (samozřejmých, na první pohled viditelných) vztazích.

Přes 5 dkg (resp.15 dkg nebo 20 dkg - ve 4. třídě někde i přes indukovaných 10 dkg):

$15:3 = 20:4$
$(20:4)*3 = 15$
$15 = 20-(20:4)$
$(15:3)*4 = 20$
$15+(15:3) = 20$

přes 30 dkg:

$15*2 = 20+(20:2)$

přes 60 dkg:

$15*4 = 20*3$

Ale řekli jsme, že také bezpečné zvládnutí početních procedur není bez souvislosti s chápáním logických vztahů. Úroveň zvládnutí receptuálních úkonů může zřejmě při pokusu o vyčlenění jednotlivých vztahů buď značně přispívat k diferencovanému chápání jejich významu nebo ho naopak zcela znemožnit.

Shrňme tedy: V 5. třídě postupuje správně 7 dětí (5 z A+B). Šest dětí se pokouší o porovnání přes 1 dkg (4 jsou ze skupiny A+B). Dalších 5 dětí (vzato včetně Heleny a Niny) postupuje intuitivně (zde z A+B jen Lada).

Také převažující přítomnost dětí z A+B nás nutí k úvaze, že postup přes 1 dkg, jakkoli vede u dětí ke zmateným výpočtům, je možná vývojově pokročilejším způsobem strukturace úlohy než jen intuitivní odhad.

Úloha 38 (Bratři)

Poslední slovní úlohou, která významněji charakterizuje kompetence dětí do 5. třídy, je **úloha 38 (Bratři)**. Je přitom svým charakterem v subtestu ojedinělá a možná se trochu přimyká k subtestu Číselné řady.[14] Vyžaduje uvést do vztahu dvě číselné posloupnosti k rozdílným aritmetickým rozvojem, přičemž je zadán rozdíl těchto východisek, nikoli jejich explicitní hodnoty.

[14] Nedostaneme se tu bohužel k analýze, která by tuto domněnku ověřila podrobněji.

Ve 4. třídě byla předložena 19 dětem, 7 z nich ji řešilo správně: Pepík, Gita, Čenda, Jindra, Bořek, Míťa, Vráťa (6 z nich z A+B). Pět z nich si dělá tabulku, ať už s dvěma řádky či sloupci - ve dvou případech s první dvojicí "0 - 4", jednou dokonce rovnou "6 - 3". Jen Jindra do ní dosazuje fiktivní hodnoty "130 - 126". Gita zřejmě postupuje aritmeticky, podobně Vráťa:

*Za 4 roky. - Vypočítal 2*3 a2*2, to je 6 a 4 - to ještě není tolik - ještě jednou tolik.*

V 5. třídě počet úspěšných řešitelů příliš neroste, je jich 10. Všichni řešitelé z loňska opakují úspěšné řešení, přibývá k nim Fanda, Vilém a Helena (celkem tedy 8 dětí z A+B). Opakují se i způsoby řešení, nikoli ovšem tak, že by se každý držel loňského. Tabulku si letos dělá Gita, Pepík (ten i zápis), Čenda, Jindra (ten jediný s prvním řádkem "140|144"), Vilém ji má ve formě grafické stupnice - většinou s první dvojicí "3 - 6".

Fandův postup je vlastně sledováním posloupností přírůstků zpaměti:

Dlouho mlčí. - Za 4 roky: 4+2 je 6 a ještě mu scházejí 3 cm; pak: za 4 roky oba vyrostou o 12 cm - ten jeden o 8 a druhý o 12. (Dělá si "tabulku" z hlavy.)

Zápis si dělá také Helena, ale pak asi písemně eviduje jen postup v rocích: 1-2-3-4. Postup pak je stejný, jako u Bořka "z hlavy": *O "3 za jeden rok, o 2 za další..."* Vráťa si k témuž pomáhá svérázným zápisem posloupností rozdílu výšky a roků:

3 2 1 0
1 2 3 4

Podobné v obou následujících třídách jsou i chyby:

Některé děti se domnívají, že bratři nebudou stejně vysocí nikdy: ve 4. třídě Lada, také Kiška argumentuje, že by Jan nesměl růst. V 5. třídě pak znovu Lada, dále Nina a Denisa (*"až Jan přestane růst"*).

Evženovi to přímo vychází z výpočtu:

Pořád o 1 cm vyšší. - "Zápis", pak tabulka se sčítáním (+3, +2) - (Ale motá ty dvě řady - přičítá +3 u Jana.)

Zapsal to takto:

J = o 4 cm více ¬
P =

Pak nad tím:

159^4, 162
$J\ 150+2=152^1+154^2+156^3$
$P\ 146+3=149^1+3^2=152^2+155^3$
158^4, 161

V nasčítávání nepokračuje v řádku, protože se blíží k okraji papíru. Při přechodu v nasčítávání +2 do horního řádku dělá chybu a pokračuje dále jako +3.

Také Tomáš kolísá:

Nikdy - ne, nikdy - ne, za dva roky, - ne, asi ne. (Plete si centimetry a roky?) - Zkouší z hlavy: Když bude Janovi 10, Petrovi 6, za rok Janovi 12, Petrovi 9...

Jak zase zkouší posloupnost ("tabulku") z hlavy, nedaří se mu ji asi udržet, přestože začátek je správně.

Jak dojít k řešení "za 2 roky" (ve 4. třídě Slávek a Denisa, v 5. Martin a Luděk), ukazuje např. Slávek:

"za dva roky" - Jan třeba 180 - odečetl 4 a přidal 3 (Petrovi). Jan měl 182. Pak přidal 3 ke 179 - 182, Jan měl taky 182.

Martin jako by ho o rok později kopíroval:

Za 2 roky. - *Uvažuje jakoby o střídavém pohybu: Petr o 3 - to je o jeden, Jan o 2 - to je o 3, Petr o 3 - a dohoní ho.*

Některé chyby jsou důsledkem nepřehledné grafiky "tabulky", která vzniká krok za krokem a nikoli s apriorním záměrem. Eda pak např. počítá výchozí stav za jeden rok a vychází mu "za pět let".

Zajímavý je výpočet Viléma ve 4. třídě:

"Za 7 let." - "Tak teď měří třeba 100 cm... 100 cm Petr" (dělá si zápis).

Zápis vypadá ovšem takto:

p .... 100+3+3+3+3
j .... 104+2+2+2+

Nejdřív tomu nerozumím, ale pak myslím, že mi to dochází. Zkouší oba dostat na výšku 112 - intuitivně hledá pomocí trojky sudé číslo, kterým musí přírůstky o 2 cm při výchozích výškách, které si dal, projít? Za posledním "+" u Jana (= "j") už tu výšku má. A teď počítá: Petrovi to bude trvat 4 roky (odpovídající třem trojkám), Janovi to bude trvat - teď by "správně" mělo být "také 4", ale on poslední dvojku nezapsal - 3 roky a oba údaje sčítá! - 7 let!

V 5. třídě přibývá zápisů. Jako argument k našemu loňskému tvrzení, že sám o sobě nemusí zápis dětem nijak pomoci, uveďme:

Darina:

"Zápis" - nakonec neví (po dlouhém přemýšlení).

Zápis je jen částečně redukovaný text zadání:

"Jan od 4 cm vyšší než Petr. Petr, za rok vyroste o 3 cm a Jan o 2 cm."

Nic dalšího k tomu nenapsala.
Marcel:
Za 3 roky. - Zápis:
Jan o 4 více¬
Petr ↲
Vedle vpravo pak:
~~*4+2*~~ *4-2=2*
4-3=1
2-2=0
1-2=

Jak to vyložit? Za rok vyroste Petr (ve skutečnosti Jan) o 2 cm a sníží rozdíl na 2 cm? Ale co dál? Zdá se mi, že jen svévolně konstruuje v řadě výsledků posloupnost, kterou odhaduje z toho, že - jak implikuje otázka - za nějakou dobu Petr Jana doroste.

Dotkněme se na závěr znovu možné souvislosti úlohy 38 se subtestem Číselné řady. Přinejmenším např. osoby jako Míťa na jedné straně a Denisa na straně druhé tuto souvislost problematizují. Míťa tuto úlohu bezpečně zvládá už ve 4. třídě, zatímco Číselné řady jsou jeho slabinou. U Denisy platí opak. Proniknutí do povahy souvislostí, vytvářejících strukturu kompetence v matematických úlohách, bude muset sledovat ještě podrobnější souvislosti individuálního vývoje, než ke kterým jsme se zatím dostali.

Úlohy 29 (Zlomek) a 39 (Člun) řešily děti zatím jen ojediněle: v páté třídě vyřešili úlohu 29 Jindra a Fanda, úlohu 39 pak Čenda a opět Jindra. Úlohu 40 (Jablka) a 37 (taxi) zatím nevyřešil nikdo. Analýzu jejich řešení tu nepodáváme.

VÝSLEDKY SUBTESTU ČÍSELNÉ ŘADY

Hned na počátku této kapitoly je nutná omluva za nestravitelnost textu a zároveň upozornění či prosba případnému čtenáři: Jedinou možností, jak vůbec udržet alespoň minimální orientaci o souvislostech, kterými se text zabývá, je mít neustále vedle něj seznam úloh se zadáním číselných řad a neustále do něj nahlížet. Seznam úloh je v příloze.

Řešení každé číselné řady je hledáním posloupnosti triád, v nichž se hledá syntagma, predikát daný jako operace a s ní spojený jmenný člen, střední člen triády, spojující zbylé dva. Mluvíme-li o "operátoru", míníme tím s operací spojený střední člen triády - někdy jako celý predikát, někdy jen jako jmenný člen, "číslo bez znaménka", jeho absolutní hodnotu.

Při nejjednodušší číselné řadě jde v každé další triádě o tutéž operaci a tentýž jmenný člen, tedy stejný operátor. Zvláštním a patrně nejsnazším případem jsou pak násobkové řady či jejich části.
Řadami s jedním operátorem jsou:
1, 2, 3, 5, 8, 9.
Obtížnost těchto řad je tím větší, s čím většími čísly zacházejí - čím větší je první člen i operátor - a čím méně dobrých triád se v řadě vyskytuje.

Tento základní princip je možno komplikovat několika způsoby:
1. Operace zůstává tatáž, mění se jmenný člen.
1.1. Střídá se omezené množství na sobě nezávislých členů, nejčastěji dva.
Takovými řadami jsou:
4: operátory 0, +1;
16: operátory +2, +1;

1.2. Změny jmenných členů vytvářejí vlastně vnořenou číselnou řadu, "implicitní řadu operátorů". V ní lze zase určit případného operátora - nazýváme ho metaoperátor.
Patří sem řady:
18: operátory: -6, -5, -4, -3 => metaoperátor: -1;
19: operátory: +2, +4, +6, +8 => metaoperátor: +2;
21: operátory: +2, +4, +8, +16 => metaoperátor: *2; (varianta: *2 ∧ -1);
22: operátory: +5, +4, +3, +2 => metaoperátor: -1
23: operátory: +4, +8, +12, +16 => metaoperátor: +4.

2. Syntagmat (predikátů) je více (nejčastěji 2):

2.1. střídají se spolu komplementární protikladné operace +/-. To si většinou vynucuje změnu celého operátora, jinak by došlo k opakování stále stejných dvou čísel.

Při zachování téhož jmenného členu se komplementární operace musí střídat asymetricky - takovou řadou je v subtestu jediná:

20: operátory: -1, -1, +1; (varianta: 3 nezávislé řady s operátorem -1.)

Při změně jmenných členů pak opět mohou být použity dvě výše zmíněné možnosti:

2.1.1. Střídá se omezené množství na sobě nezávislých členů, nejčastěji dva.

Takové řady jsou:

11: operátory: +4, -3; (varianta: 2 nezávislé řady s operátorem +1.)

14: operátory: +3, -1 (varianta: 2 nezávislé řady s operátorem +2.)

2.1.2. Změny jmenných členů vytvářejí vlastně vnořenou číselnou řadu, "implicitní řadu operátorů".

Takovými řadami jsou:

12: operátory: -2, +3, -3, +4 => metaoperátory: +1, 0; (varianta: 2 nezávislé řady s operátory +1, 0.)

15: -7, +6, -5, +4, -3 => metaoperátor: -1; (varianta: 2 nezávislé řady s operátory -1, +1.)

(Střídání operací */: by asi bylo obtížné, aby přitom jmenné členy vytvářely pravidelnou řadu a přitom se udržela dělitelnost? Každopádně tento princip nebyl v subtestu použit.)

2.2. Střídají se operace nekomplementární.

2.2.1. Při tomto střídání může jmenný člen predikátoru zůstat týž. Střídání operací musí být pravidelné, nejčastěji jde o pravidelné střídání pouze dvou operací.

Tento princip nebyl v subtestu použit.

2.2.2. Se střídáním operací se střídá i jmenný člen, takže jde o střídání dvou operátorů.

K takovým řadám patří:

24: operátory: *2, -1;

26: operátory: *3; -2.

3. Simultánní použití vždy stejné kombinace dvou operací. Jde o simultánní použití stejného principu, který byl v bodě 2.2. používán sukcesivně. Mezi každými sousedními čísly číselné řady jsou tak vlastně triády dvě, je vsunut jakýsi mezikrok.

3.1. V obou operacích je použit stejný jmenný člen. Takový postup ale v subtestu nenacházíme.

3.2. V každé operaci je užit jiný jmenný člen. Jde o kombinaci různých operátorů.

K takovým řadám patří:

21: *2 $\wedge$ -1; (varianta: metaoperátor *2).

4. Již výše je ve variantách patrno, že řady lze konstruovat také jako prolínání 2 či více nezávislých řad.

4.1. Lze tak činit sukcesivně: člen základní řady je členem buď jedné nebo druhé parciální řady. Tak je možno vytvořit tyto řady:

11: $^{1}{}_{5}{}^{2}{}_{6}{}^{3}$: shodný operátor: +1; (varianta: operátory +4, -3);

12: $^{5}{}_{3}{}^{6}{}_{3}{}^{7}$: operátory: $^{+1}{}_{0}$; (varianta: metaoperátory +1, 0);

14: $^{2}{}_{5}{}^{4}{}_{7}{}^{6}$: shodný operátor: +2; (varianta: operátory +3, -1);

15: $^{10}{}_{3}{}^{9}{}_{4}{}^{8}{}_{5}$: operátory: $^{-1}{}_{+1}$; (varianta: metaoperátor -1);

16: $^{2}{}_{4}{}^{5}{}_{7}{}^{8}$: shodný operátor: +3; (varianta: operátory +2, +1);

20: $^{9}\,8\,{}_{7}\,{}^{8}\,7\,{}_{6}$: shodný operátor: -1; (varianta: operátory -1, -1, +1);

25: $^{3}{}_{5}{}^{6}{}_{8}{}^{12}{}_{11}{}^{24}$: operátory: $^{*2}{}_{+3}$;

4.2. Druhou možností prolínání nezávislých řad jsou jejich simultánní kombinace.

Takto vytvořenými řadami jsou:

6: 5a, 6b, 7c, 8d: shodný operátor "+1";

7: 3/10, 3/9, 3/8, 3/7, 3/6: operátory: 0/-1;
10: 1/11; 1/9; 1/7; 1/5: operátory: 0/+2;

4.3. Konečně lze vytvářet řady kombinací simultánního a sukcesivního principu:
13: 3/5, 4/5, 3/6, 4/6, 3/7: operátory: +1,-1/0,+1;

17: řadu lze rozepsat jako: $^{2b}{}_{2c}{}^{4b}{}_{3c}{}^{6b}{}_{4c}{}^{8b}{}_{5c}$: operátory: $^{+2\wedge\text{"0"}}{}_{+2\wedge\text{"0"}}$.

Všechny zmíněné postupy by bylo možno komplikovat jednak zvyšováním počtu střídajících se operací, jednak komplikováním cyklu pravidelnosti, tj. prodlužováním a komplikací rytmu střídání.

V uvedeném přehledu vidíme, že pro řady s nejnižšími pořadovými čísly, konstruované autory testu jako nejsnazší, byly využity jednak řady s jediným operátorem, jednak řady se simultánními kombinacemi členů dvou řad s operátorem 0 (jehož užití připomíná spíše jakýsi ornamentální princip než matematiku), ±1 (apelujícím na elementární znalost číselné či abecední řady), výjimečně pak +2 (v řadě č. 10 - ovšem v kombinaci s nulou). Je ovšem pravda, že i prosté zmnožení počtu prvků užitých v kombinaci, byť jde o posloupnosti se snadnými operátory, značně zvyšuje obtížnost úlohy, jak to bude patrné v případě řady č. 17.

Nejobtížnější řady jsou pak vytvořeny střídáním nekomplementárních operací nebo rozvojem operátorů ve vnořené, implicitní posloupnosti. Bude zajímavé sledovat, nakolik výkony dětí těmto předpokladům odpovídají.

Následující tabulka udává pořadí obtížnosti jednotlivých číselných řad v jednotlivých ročnících. Pro srovnání jsou uvedeny kurzívou i výsledky celého souboru sledovaného v longitudinálním výzkumu za třetí a pátý ročník. Procenta udávají relativní četnost dětí, které úlohu vyřešily. V posledním sloupci je připojen údaj o "vývojové konzistenci" úlohy, její reliabilitě v čase. Udává procento případů, kde při opakovaném zadání úlohy nenastala inkonzistence - tedy případ, že po správném řešení v jednom roce nebyla úloha v následujícím roce řešena správně. Tento údaj ztrácí vypovídací schopnost na okrajích škály, kde jsou úlohy převážně jen plněny, resp. neplněny a k nekonzistenci tak tato nediferencovanost nedává příležitost.

Tabulka ukazuje, že výkony dětí zhruba odpovídaly předpokladům vloženým do konstrukce subtestu. Neplatí ovšem jedna z proklamovaných zásad autorů, že vždy dvojice úloh (lichá - sudá) vytváří stejnou rovinu obtížnosti.

Číselné řady:

Pořadí	Úloha č.:	2. tř.	3. tř.	*3. tř. - celý soubor*	4. tř.	5. tř.	*5. tř. - celý soubor*	Výv. konzist.
1	**5**	**88%**	**100%**	*96%*	**100%**	**100%**	*100%*	100%
2	**6**	**92%**	**96%**	*96%*	**100%**	**100%**	*100%*	100%
3	**3**	**88%**	**96%**	*94%*	**100%**	**100%**	*100%*	100%
4	**4**	**96%**	**92%**	*98%*	**100%**	**100%**	*100%*	100%
5	**1**	**92%**	**92%**	*98%*	**100%**	**100%**	*100%*	100%
6	**2**	**96%**	**88%**	*96%*	**100%**	**100%**	*100%*	100%
7	**7**	**88%**	**88%**	*92%*	**100%**	**100%**	*100%*	92%
8	**9**	**67%**	**88%**	*89%*	**100%**	**100%**	*97%*	96%
9	**10**	**83%**	**81%**	*80%*	**95%**	**100%**	*98%*	84%
10	**8**	**46%**	**73%**	*80%*	**95%**	**100%**	*96%*	92%
11	**11**	**25%**	**54%**	*53%*	**86%**	**88%**	*84%*	84%
12	**13**	**50%**	**81%**	*79%*	**100%**	**83%**	*90%*	84%
13	**12**	**33%**	**58%**	*46%*	**86%**	**79%**	*79%*	80%
14	**14**	**17%**	**35%**	*37%*	**77%**	**75%**	*79%*	80%
15	**16**	**13%**	**35%**	*37%*	**73%**	**71%**	*76%*	75%
16	**15**	**17%**	**42%**	*44%*	**64%**	**71%**	*76%*	75%
17	**18**	**8%**	**23%**	*23%*	**59%**	**67%**	*61%*	95%
18	**17**	**4%**	**15%**	*24%*	**50%**	**54%**	*64%*	73%
19	**19**	**0%**	**15%**	*19%*	**32%**	**54%**	*55%*	95%
20	**20**	**0%**	**8%**	*13%*	**27%**	**42%**	*41%*	82%
21	**21**		**0%**	*3%*	**18%**	**42%**	*33%*	95%
22	**25**		**0%**	*0%*	**14%**	**29%**	*15%*	100%
23	**22**		**19%**	*17%*	**50%**	**25%**	*52%*	68%
24	**24**		**0%**	*2%*	**9%**	**25%**	*18%*	100%
25	**23**		**0%**	*2%*	**23%**	**8%**	*13%*	84%
26	**26**		**0%**	*0%*	**0%**	**4%**	*5%*	100%
průměr HS		10,04	12,81	*13,18*	17,59	18,17	*18,28*	
směrodat. odch.		3,03	4,32	*3,99*	3,49	3,34	*3,54*	

2. třída

Velká část dětí dělá už ve druhé třídě jen ojedinělé chyby **v prvních 10 řadách - celkem 8 dětí v nich nechybuje vůbec**: Lada, Pepík, Gita, Vilém, Bořek, Alena, Mikuláš, Denisa (6 ze skupiny A+B).

Dále lze určovat jakási pásma bazální kompetence a charakterizovat je prostřednictvím jednotlivých úloh. Ze **7 dětí, které dělají jen jednu chybu**, ji 4 dělají v úloze 8 - zároveň většina dětí, které vůbec dělají nějakou chybu, chybuje v této úloze. Výjimkami jsou:

Fanda, který chybuje v úloze 2 a v celém ostatním kontextu to lze s jistotou považovat jen za či momentální nepozornost (pokračuje “7, 5”, jako by znovu aplikoval princip první řady);

Míťa (řeší úlohu 6 až s dopomocí - a v souvislosti s obsahem relevantní kompetence, o níž dále mluvíme v souvislostí s úlohou 13, by to mohlo být zaváhání pro něj příznačné, vyznačující jeho slabinu ve 2. a 3. třídě?);

Kiška (chybuje také v úloze 6 - odpovídá 9a, 10b).

Úlohu 8 jako jedinou v prvních 10 úlohách neřeší Nina (řešení "6, 2") , Slávek (8, 4), Vráťa (8, 4 a explicitní: "to je po čtyřech") a Doriana (7, 3 - opravuje na 5). Nezdá se však, že by se jejich chyby lišily od chyb některých dalších dětí, které chybují navíc ještě zejména v řadě 9. Všechny děti, které udávají nějaké řešení, reflektují klesání posloupnosti. U většiny z nich se v řešení také nějak objevuje operátor "-4", ať mezi posledním zadaným číslem řady (11) nebo mezi dvěma čísly řešení. Domníváme se proto, že tato řešení indikují, že řešení úlohy je v jejich možnostech.

Zatímco **v úloze 8 selhává celkem 13 dětí**, druhou nejčastěji neřešenou úlohou je úloha 9 - a opět: všechny 4 děti, které dělají 2 chyby (pořád mluvíme o prvních 10 úlohách subtestu), je dělají **v úlohách 8 a 9** a jako by tak vyznačovaly **třetí úroveň bazální kompetence**: Čenda, Darina, Aleš, Kája. **Úlohu 9 neřeší celkem 7 dětí**, všechny chybovaly i v úloze 8.

Tyto dvě úlohy se od sebe liší jen směrem operace: v úloze 8 jde o operátora -4, v úloze 9 je operátor +4 (číselný obor je přibližně tentýž).[15]

Vezmeme-li pak v úvahu současně konkrétní řešení obou příbuzných úloh, zdá se, že u Dariny, Čendy a Martina už můžeme pochybovat o tom, zda jde opravdu jen o početní problémy při konstrukci dalších členů řady nebo zda jim úroveň jejich kompetence neznemožňuje identifikovat vůbec princip konstantního operátora.

Darina: řada 8: 6, 4; řada 9: 28, 32;

Čenda: řada 8: 9, 5; řada 9: 28, 31;

Martin: řada 8: 7, 4; řada 9: 29, 34.

Martin jako by to potvrzoval dalším třemi chybami v řadách 10, 7 a 4 - jenže to jsou řady jiného typu a tak se nám přes počet chyb zdá Martin řešení řad 8 a 9 nejblíže. (Nemůžeme ovšem v této interpretaci zcela odhlédnout od znalosti jeho výsledku ve 3. třídě, kde udělá v subtestu výkonnostní skok.)

Podobně v úloze 8 dělá chybu budící pochybnost i Marcel: 8, 5. Podobně jako Martin chybuje také v úlohách 10 a 7 - ale navíc také v úloze 3: 13, 16!

Předběhněme poněkud a řekněme, že ve 3. třídě se oba v subtestu výrazně zlepší (na přibližně stejnou úroveň), ale zatímco u Marcela přetrvávají problémy v řadách 8 a 9, Martin už v nich nechybuje.

Odpověď "nevím" ("nechápu", "divný") není jednoznačná. V úloze 8 ji dává také Kája, která v úloze 9 generuje poměrně orientované řešení "31, 35". Přece jen se však zdá, že odpověď indikuje spíš větší potíže: Aleš, Evžen i Vanda patří k dětem s největším počtem chyb. Vanda dělá 6 chyb, ze kterých je patrno, že není schopna rekonstruovat číselnou řadu s operátorem větším než ±1. Dost podobně je na tom Luděk s 5 chybami.

Lze tedy udělat závěr, že **nejnižší úroveň kompetence** v jedné linii úloh v subtestu vykazují děti, které **v řadách 8 a 9 nejsou schopny pracovat s konstantním operátorem** (+4 nebo -4) nebo dokonce neidentifikují ani v náznaku jeho princip. Za příklad zcela neorientovaného řešení můžeme považovat Vandino - "30, 35": stačí poslední číslo v exponované řadě, aby začala generovat zřejmě pokračování násobkové řady čísla 5.

Už v těchto počátečních úlohách se však ukazuje, že v některých mají děti potíže jakoby nezávisle na řešení řad 8 a 9. Jde o úlohy 6, 7 a 10. Domníváme se, že mohou poukazovat na elementární obtíže v jiné linii kompetence, kterou podrobněji probíráme v souvislosti s řadou 13.

Úlohu 10 neřeší 4 děti, z nich pak 3 neřeší také **úlohu 7**: Martin, Marcel, Evžen.

Úlohy tvoří dvojici - odlišuje je jen odčítání "ve jmenovateli" "o 2" u obtížnější řady 10 namísto "o 1" u řady 7. Pochopitelně, kdybychom chtěli po dětech korektní názvy zlomků, nebyl by schopen řady řešit nikdo nejspíše ještě ve 4. třídě. Brali jsme je však právě jako číselné posloupnosti a instrukci jsme doplňovali přibližně takto: "Tohle jsou zlomky, ty ještě neznáš. Ale nemusíš znát zlomky, abys poznal, která čísla budou následovat nahoře a která dole."

Další 2 děti (zmíněné už výše) neřeší úlohu 6, spočívající v kombinaci posloupnosti čísel a písmen.

Kombinace chyb v těchto dvou typech úloh – řadách 8 a 9 na jedné straně a 6, 7 a 10 na straně druhé - pak vytváří obraz těch, kteří v subtestu dosáhli nejnižšího výkonu. Je to Evžen (7 bodů hrubého skóru), Martin (5 bodů), Luděk (6 bodů), Vanda (4 body).

Z hlediska dalšího vývoje však je to obraz dost individualizovaný. Martin nedělá od třetí třídy žádnou chybu a jeho celkový výkon v subtestu dramaticky vzroste (z 5 na 14 bodů hrubého skóru, kde ovšem bude zase víceméně stagnovat v dalších třídách). Evžen (také ve 3. třídě žádnou z těchto chyb neopakuje, ve 4. se vrací k chybě v úloze 8) - jeho výkon roste na 10 bodů. Vanda ve třetí třídě opakuje chyby už "jen" v nejobtížnějších úlohách 8, 9 a 10 a zvýší výkon na 9 bodů. Naproti tomu Luděk sice opakuje jen chybu v úloze 8, zato však dělá 4 jiné chyby (v úlohách 10, 7, 2, 4 - hrubý skór 5 bodů)! Až ve 4. třídě jako by se zpožděním následoval trajektorii Martina - výkonový skok včetně stagnace v následující třídě: nedělá chybu v prvních nejen deseti, ale dokonce v prvních 13 úlohách. Jeho výkon roste z 5 na 14 bodů, ale v 5. třídě zůstává na 12 bodech.

Co představuje ve 2. třídě překročení nejvyšší úrovně bazální kompetence, dané jako bezpečný postup v číselné řadě o stále stejně dlouhé kroky?

Většina dětí řešila kromě prvních 10 úloh ještě některou z dalších. Alespoň 1 další úlohu vyřešilo 14 dětí. Nejsnazší z těchto úloh je **řada 13**. Právě jen ji řešily 3 děti, **celkem ji řešilo 12 dětí** (6 ze skupiny A+B). Přitom 6 dětem nebyla předložena po jejich neřešení úloh 11 a 12. Zpětně je patrné, že některé z těchto dětí by byly zřejmě úlohu řešily.

Je-li úloha 13 zhruba stejné obtížnosti jako úloha 8, jaké jsou jejich vztahy?

13 \ 8	S	N
S	**7**	**4**
N	**5**	**2**

[15] Mimochodem: Zařazení úlohy 8 v testu nejen před řadu 9, ale na nižší úroveň "mentálního věku" je zcela nepochopitelné - každá učitelka by musela predikovat opačné pořadí obtížnosti.

Vidíme, že nejde o souvislost nijak jednoznačnou. Skupiny, na něž obě úlohy dělí třídu, se překrývají zhruba jen z poloviny. (Ani vztah ke skupinám A - E by nebyl jednoznačný: Ve skupině, která řeší obě úlohy, je sice 5 dětí ze skupiny A+B. Ale děti z této skupiny tvoří také většinu (3 z 5) těch, kteří zvládají jen úlohu 8 - a zadání úlohy 13 všem by tento poměr nezměnilo.)

Všechny chyby v řadě 13 jsou si blízké a zároveň jsou výmluvné. Děti **nedokázaly kontrolovat pohyb v obou řadách** - buď provedly změnu jen v jedné řadě (Alena, Slávek, Doriana: řešení "4/7, 3/7"; Fanda: "4/7, 4/8) nebo v obou, ale s nesprávným směrem operace (Denisa: " 4/7, 3/6") nebo opakování čísla v dolní řadě aplikovaly "přehnaně" (Míťa: "4/7, 3/88").

Podívejme se na další úlohy. Většině dětí byly předloženy ještě úlohy 11, 12 a 14, úloha 15 pak polovině dětí.

Řadu 12 (5, 3, 6, 3, 7) vyřešilo **8 dětí** (nepředložena jen Evženovi) - z nich jen 3 byly ze skupiny A+B.

Řadu 11 (1, 5, 2, 6, 3) řeší správně **6 dětí** (opět nepředložena Evženovi) - opět jen 3 ze skupiny A+B.

Další dvě úlohy byly vyřešeny jen ojediněle: **úlohu 14** řeší správně **4 děti** (Bořek, Pepík, Gita a Slávek), **úlohu 15 také 4** (Pepík, Gita, Lada a Vráťa). Těchto 6 dětí patří k 7 nejlepším v subtestu, zejména Bořek (vyřešil také řady 16 a 17), Pepík (ještě 16 a 18) a Gita (ještě 18) dosáhli v této třídě nadprůměrného výkonu. Bude zajímavé se podívat, nakolik jejich výkony předznamenávají kompetenci ve 3. třídě.

Soustředíme se nyní na vztahy úloh 11, 12 a 13. Zjišťujeme, že **všechny tři úlohy řeší 3 děti** (Bořek, Kiška, Čenda), úlohu 13 a jednu z úloh 11, 12 řeší 5 dětí (Gita, Pepík, Nina, Marcel, Vráťa). Naproti tomu kombinaci, kdy není řešena úloha 13 a jsou řešeny zbylé dvě úlohy představuje jen Slávek. Představuje tedy úloha 13 nějaký klíč k řešení druhých dvou úloh?

Podíváme-li se na dvojice úloh 13 vs. 11 a 13 vs. 12, zjistíme následující:

13 \ 11	S	N
S	**5**	**7**
A	**1**	**5**

Existuje jen jeden případ (Slávek), kdy při neřešení úlohy 13 byla úloha 11 vyřešena.

13 \ 12	S	N
S	**6**	**6**
A	**2**	**5**

Mezi dvěma případy, kdy neřešení úlohy 13 je doprovázeno neřešením úlohy 12, je opět Slávek, kromě něj ještě Doriana.

Co tu v úloze 13 zřejmě vstupuje do hry, by mohla být jakási elementární forma paralelních (ať současných nebo střídavých) operací ve dvou řadách. Napovídal by pak výsledek Slávka a Doriany, kterým jako by tato forma nebyla dostupná, že neřeší řady 11 a 12 jako dvě paralelní řady, ale jiným způsobem - jako posloupnost střídání dvou operátorů? Hypoteticky by se pak dalo usuzovat, že takový postup bude příznivý také pro řešení řad 14 a 16 a naopak nepříznivý pro řešení úloh 17, možná 15 a dále 18-22. Podíváme-li se na výsledky Slávka, opravdu zjišťujeme, že řeší řady 14 a 16 a neřeší řady 17 a 18 (další už mu nebyly předloženy). U Doriany by tomu odpovídalo řešení "7, 10" v řadě 12 (viz jeho interpretaci níže).

Už na počátku kapitoly jsme ukazovali, jak některé řady mohou být konstruovány dvěma různými způsoby. Řady 11 a 12 mezi ně patří.

11: operátory: +4, -3; (varianta: 2 nezávislé řady s operátorem +1.)

12: operátory: -2, +3, -3, +4 => metaoperátory: +1, 0; (varianta: 2 nezávislé řady s operátory +1, 0.)

V obou variantách matematického popisu možných přístupů vypadá řada 12 komplikovaněji. Přesto tomu tak v reálných výsledcích není - a když se na ni podíváme, sami bychom ji "na první pohled" za obtížnější nepovažovali. Co nám o postupech dětí řeknou jejich chyby? Často nejsou jednoznačné, ale přece jen.

U **řady 11** se např. opakuje čtyřikrát řešení "4, 7" (Lada, Mikuláš, Luděk, Nina), kde chyba spočívá jen v obrácení posloupnosti čísel. Toto řešení jako by indikovalo postup ve dvou paralelních řadách: v obou se najde následující člen, ale neudrží se posloupnost řad - jsou vzaty jakoby simultánně, jako by na pořadí nezáleželo. (V řadě 12 Nina chybu nedělá, Mikuláš dělá chybu interpretovatelnou podobně, Luděk a Lada tam postupují jinak - viz dále.)

Nacházíme také třikrát chybné řešení "7, 11" (Gita, Fanda, Denisa), které lze interpretovat jako pokračování téže řady s týmž operátorem "+4", extrapolovaným z doplnění poslední triády. V řadě 12 z nich dělá chybu jen Fanda a Denisa:

Fanda dělá chybu zřejmě jiného druhu: řešení "3, 9" vypadá jako nezvládnutý pohyb ve dvou řadách - chyba podobná té, kterou Fanda udělal v řadě 13. Nepostupuje tedy stejnou strategií, ale konzistentní je v potížích, které má, když se pustí do paralelních řad.

Denisa dává v řadě 12 řešení "5, 7" - a dlouho nám nedávalo smysl, dokud jsme si je nenakreslili! Pak se zdálo, že Denisa mohla rozvíjet posloupnost úplně jiným způsobem, než jsme předpokládali ve variantách matematického popisu. Její řešení by bylo konzistentní s rozvojem řady:

5 3 6 3 7 5 7 3 6 3 5 vytvářejícím při grafickém znázornění jakousi symetrickou figuru "WMW" - či hudebně figuru G E A E H G H E A E G.

Tady se dostáváme k **alternativnímu zdroji strategií**, z nichž děti mohou čerpat vhled nebo pokusy o vhled do uspořádání čísel. Domníváme se, že je možné některé dětské postupy chápat jako **"implicitní grafiku"**, zacházející s čísly např. jako délkami (úsečkami), jež při svém řazení vytvářejí nějaké pravidelný vzor či graf; nebo jako s grafickými prvky vytvářejícími svou pravidelností určitý ornament; nebo jako **"implicitní melodii"**, beroucí vzdálenost mezi čísly jako intervaly (pak by chápání číselných řad mohlo pozitivně korelovat s hudebním školením). Podobně např. řada 15 evokuje **znázornění pohybu** kyvadla s jeho přibližováním k pomyslnému středu.

Při takovém přístupu vytváří **v řadě 12** číslo 3 nikoli paralelní řadu, ale nematematický ornamentální znak či grafický oddělovač skutečných členů jediné řady, v níž roste posloupnost čísel. Pak teprve je řada 12 logicky snadnější než řada 11.

Postup bychom mohli nazvat synkretickým se vší pejorativností tohoto pojmu vyhrazeného pro dětské myšlení. Ale z čeho pak pramenil náš "dospělý" první dojem, že řada 12 je snazší? Ze stejného zdroje: prvotní přiblížení k neznámému problému se zřejmě často děje prostřednictvím přibližných - nediferencovaných, ale zato celostních - analogií s "něčím podobným", s něčím "co to připomíná". Teprve po tomto prvním přiblížení následuje diferenciační pohyb, vyčleňující v celku jednotlivé elementy.

Děti také - i při použití prvotní nematematické metafory - v číselných řadách uspějí tehdy, když uspějí v diferenciaci na jednotlivé triády a operátory, když začnou identifikovat a diferencovat uvnitř globálního přibližného obrazu matematické kontexty, jejich členy a operace.

Vidíme tedy, že v řadě 12 lze - "nematematicky", synkretickým postupem - dát trojku stranou jako opakující se čistě grafický znak, a tím se řada zjednoduší, ale pokud dítě naopak chápe řadu "čistě matematicky", je pro něj naopak dost obtížná. I tehdy, jsou-li obě řady rozčleněny na dvě paralelní řady a vytvářejí velmi jednoduché posloupnosti, je řada 12 komplikovanější.

Mohlo by to vysvětlovat některé případy, kdy řada 11 je řešena a v řadě 12 je řešení chybné? Platí to o Pepíkovi a Vráťovi - přesto nás jejich rozdílná řešení řady 12 vedou k názoru, že každý z nich postupuje jinak. Pepík dává řešení "4, 8", které může znamenat jak střídání dvou operací, ale s týmž členem "4", tak postup ve dvou nezávislých řadách, kde se ale do "trojkové řady" také promítne operátor "+1". (Druhým způsobem interpretujeme řešení Mikuláše, který v řadě 11 dělá také chybu, ukazující k pohybu ve dvou paralelních řadách viz výše). U Pepíka by to tedy vysvětlení mohlo být.

Vráťa dává v řadě 12 řešení "9, 11". Zdá se, že bere celé zadání jako jedinou řadu a že tu pak stojí před řadou s metaoperátory, se kterou si neví rady, protože hranici jeho aktuální kompetence tvoří "+4, -3" v řadě 11. I tato interpretace je slučitelná s hypotézou o obtížnosti řady při “matematickém pojetí” trojek.

Jiné je řešení Vandy ("7, 8") a Luďka ("9, 8" - ptá se: "proč jsou tam ty trojky?"), kteří jako by se pohybovali v jedné řadě nijak nesouvisející s trojkou. To se zdá vypovídat o tom, že jde o pohyb v jediné řadě. Ať při vědomí toho, že trojka reálnou řadu netvoří, a tedy s jejím vědomým zanedbáním, nebo s redukcí na nalezení jediného konstantního operátora je střídavý pohyb odstraněn. Vanda používá stejný postup u řady 11: řešení "7, 8" vyřazuje jednu řadu ze hry a je pokračováním jen druhé. Luděk naopak v řadě 11 jako by v poměrně vyspělém řešení "4,7" dokázal vyčlenit obě řady.

Doplňme ještě některé další postupy patrné z chyb. V řadě 11 řešení Doriany (7, 10) dobře odpovídá matematické konstrukci řady s potřebným střídáním jmenných členů operátorů (4, 3), nikoli ale už operací. Je to ve shodě s často pozorovaným postupem, při němž se zjišťuje, "o kolik" se liší sousední členy: zde tedy "o čtyři, o tři, o čtyři...".

Také řešení Marcela (0, -3) je dobře srozumitelné: z poslední dvojice zadání se vyvodí operátor "-3" a vezme se jako konstantní. K lákavosti tohoto řešení tu ještě přispívá možnost blýsknout se výletem do záporných čísel.

Nouzovou strategií je Martinova, pozorovaná ale jinde i u jiných dětí. Řešení "5, 3" je šalamounským pokračováním řady tím, že se začne znovu od začátku - např. jako by se v melodii pokračovalo repeticí, v ornamentu opakováním vzoru. Martin dělá totéž u řady 11: "1, 5".

Konečně častá je odpověď "nevím" - v řadě 12 pětkrát (3 z A+B), v řadě 11 šestkrát (3 z A+B).

Pokusme se o **shrnutí**. Řady 11 a 12 vyžadují buď střídání dvou operátorů nebo střídavý postup ve dvou řadách. Pro některé děti však řada 12 nabízí "ornamentální" zjednodušení a stává se pro ně snazší.

Postup ve dvou paralelních řadách přináší zjednodušení operátora, avšak vyžaduje na druhou stranu držet simultánní strukturu dvou řad. Tady některé děti narážejí na problémy, analogické patrně jejich potížím v řadách 7, 10 a 13 ("zlomky").

Postup se střídáním operátorů přináší větší nároky na početní zběhlost, analogickou nárokům řad 8 a 9. Dvojitost převádí na posloupné střídání.

Nároky těchto zadání děti nejčastěji řeší postupy, redukujícími složitost. Nejnižší redukci představuje střídání jmenných členů operátora a nikoliv také operace nebo - jakoby komplementární - střídání operace a ponechání stejného členu. Dalším stupněm redukce je hledání konstantního operátora, nejčastěji vysouzeného z poslední triády zadání či odhlédnutí od jedné z řad a rozvíjení pouze druhé.

Krajní redukci představuje dosazení takového operátora a konstrukce pokračování řady, jaké dítě ovládá - např. "±1".

Jako úhybnou strategii používají děti opakování řady od začátku.

Odpověď "nevím" není jednoznačná: může indikovat naprostou neorientovanost stejně jako snahu vyhnout se redukci zadání. Vědomí komplikovanosti zadání pak může být výrazem větší orientovanosti než některé pokusy o řešení.

K opatrnosti nás ovšem nabádají např. chyby Lady: Její odpověď "4, 7" u řady 11 jakoby indikovala vyčlenění dvou paralelních řad. Jenže odpověď "1, 2" hned v následující řadě 12 s tím nejde nijak dohromady! Opatrnosti je tu třeba ve dvojím smyslu. Jednak řešení "4, 7" může pramenit ještě z jiných postupů, jednak není nijak jisté, že určitá strategie je u dětí stálá, jaksi pro ně typická či dokonce typová, řadící je k určitému typu. Tak např. také u Fandy, Denisy a Luďka se zdá, že postupují v každé úloze jinak.

Jaký je pak vztah úlohy 8 k úlohám 11 a 12? Jestliže pro vyřešení úlohy 13 jako by nebylo řešení řady 8 nutné, nestává se naopak podmínkou tady? Zjišťujeme, že nikoli: Alespoň 2 úlohy z trojice řad 13, 12, 11 řeší 9 dětí, ale 4 z nich neřeší řadu 8. Celkově ukazuje vztahy tabulka:

2 z 13, 12, 11 \ 8	S	N
S	**5**	**4**
A	**7**	**7***

* Sem spadá i 5 dětí, jimž nebyla předložena úloha 13. Nikdo z nich ovšem neřešil alespoň 1 z úloh 11, 12. Celkový počet dětí v tabulce je 23, protože není zahrnut Evžen.

Vidíme tedy, že úloha 8 není podmínkou nutnou ani dostačující řešení dalších úloh a že tedy se tu **vedle schopnosti zacházet s většími čísly v sukcesivních posloupnostech patrně rozvíjí jiná schopnost:** předběžně jsme ji v souvislosti s řadou 13 formulovali jako **schopnost operovat ve dvou paralelních řadách, brát současně v úvahu dva různé kontexty**.

Je-li výše uvedená tabulka tabulkou distribucí těchto kompetencí, pak **dětí, které ovládly obě z nich**, bylo ve 2. třídě pět a patřily k sedmi nejlepším v subtestu Číselné řady: Gita, Pepík, Bořek, Kiška, Vráťa.

Co u této skupiny narušuje konzistenci obrazu, jsou především chyby Pepíka v úloze 12 (když potom řeší dalších šest úloh) a Gity v úloze 11. U Pepíka jako by to podporovalo domněnku, že jeho přístup ho v řadě 12 staví před poměrně složitou úlohu, obsahující implicitní řadu s dvěma metaoperátory s různými jmennými členy. Se střídáním dvou operátorů či dokonce metaoperátorů +1, -1 si Pepík ví v řadách 14, 15, 16 a 18 rady! (Ve 3. třídě pak jejich řešení opakuje a zvládá i řadu 12.) S Gitou je to podobné, jako by se tu však pohybovala na hranicích své kompetence, kde každé zakolísání pozornosti vede k chybě.

Především **dobrými "počtáři"** by měla být skupina 7 řešitelů řady 8, kteří v úlohách 13, 12, 11 neuspívají: Lada, Vilém, Fanda, Alena, Míťa, Mikuláš, Denisa. Překvapuje tu 5 dětí ze skupiny A+B - zdá se, že namístě je opatrnost v závěrech. Není tu selhání v některých řadách, kde jde o simultánní či sukcesivní kombinaci dvou paralelních řad, spíše dáno jejich obtížností, když se k řešení přistupuje "čistě matematicky" na rozdíl od snadnosti, když se k řadám přistupuje spíše jako ke skládačkám jakýchsi ornamentů? Nevypovídá pak neúspěch také o přístupu, který byl zvolen? Z těchto 7 dětí dosahuje v subtestu hrubého skóre 12 bodů Lada, což ji ještě řadí k nadprůměru, ostatní pak dosahují 9 - 11 bodů představujících průměrný výkon.

Dětmi, které těží v subtestu **spíše ze schopnosti kombinovat ve dvou kontextech** zároveň, by měli být: Čenda, Nina, Marcel, Slávek (ten zřejmě s výraznou preferencí sukcesivního střídání různých kroků v téže řadě, jak jsme uvažovali výše). Tato schopnost se zatím projevuje především v jasně oddělených paralelních řadách (srv. formu "zlomků"). Slávek patří v subtestu s 12 body ještě k nadprůměru, Čenda a Nina dosáhli jen o bod méně. Marcel ovšem se svými 8 body představuje už podprůměr.

Konečně **děti, které negativně diskriminuje jak počtářská kompetence v řadě 8 tak i dvoukolejnost úloh 13, 12, 11**, jsou Martin, Darina, Doriana, Aleš, Kája, Luděk, Vanda. S výjimkou Doriany (10 bodů) představují nejhorší výkony v subtestu: 4 - 8 bodů.

3. třída

Prvních deset úloh tu má bezchybně 16 dětí, ze skupiny A+B 9 dětí - jen Vilém chybuje v řadě 10.

Potvrzuje se postavení řady 8 mezi prvními deseti úlohami: Ze všech 10 chybujících chybuje 7 v této úloze. Právě jen v této řadě chybuje Denisa (která ji loni řešila správně), Vráťa, a Aleš, Marcel navíc v řadě 9, Vanda navíc v řadách 9 a 10 (všichni chybovali v řadě 8 už loni; Vanda i v dalších dvou řadách). Dá se říci, že všechny způsoby, jimiž tu děti chybují, jsme viděli už ve 2. třídě, nikdo však neopakuje přesně tutéž chybu.

Kromě Radka, který chybuje v úlohách 1 a 2 a vypadá to na "zahřívací" chyby, generuje zvláštní chyby Darina, která předvádí jakýsi obrat: zlepšila se jako počtářka v řadách 8 a 9 a zhoršila se v řadách 7 a 10, které kombinují jednoduché posloupnosti ve dvou paralelních řadách. Máme tyto dva protikladné pohyby dávat do souvislosti? Pokud by tomu tak bylo, pak by to mohlo znamenat, že **posun v počtářské kompetenci je doprovázen změnou přístupu?** - řady 7, a 10 pak už nejsou možná brány jako ornamentální skládanky, se kterými si loni věděla rady?

Tři zaostávající děti nás svádějí k trochu sarkastickým komentářům:

Vanda jako by letos prezentovala, že zvládla sestupné posloupnosti už "po dvou" (řešení "9, 7" u řady 8), ale nesmí být kombinovány s ničím dalším (řešení 1/3, 1/0 u řady 10). Pořád příliš je přechod přes desítku v řadě 9.

Luděk, který dělá 5 chyb jako loni, v nich opakuje chybu jen v řadě 8 (řešením "6, 2" se přiblížil operátoru "-4"), v řadě 4 opakuje už nám známou fintu, kdy se za pokračování řady vydává její opakování od začátku ("6,6). Dále ve "zlomkových" řadách 10 a 7, které loni řešil, jakoby nutkavě mění i horní číslo namísto jeho prostého opakování: "4/5, 4/4" u řady 7, "2/2, 2/0" u řady 10 (kde navíc nezvládá paralelní posloupnost v dolní řadě). Může u něj jít o něco podobného jako u Dariny? Matematická orientace - přece jen rostoucí - narušuje příliš nematematické ornamentální postupy? Na druhé straně v řadě 2 vidíme zřejmě novou variantu implicitní grafiky v řešení "10, 11": poslední číslo zadání je bodem, od nějž řada začíná zase stoupat a zřejmě se symetricky vrací.

Zcela se vymyká Eda, který při svém prvním setkání s testem zřejmě vůbec neví, co má s čísly dělat a řeší jen první řadu! Zřejmě jen volně asociuje se zvládnutými posloupnostmi "o jednu" či "o dvě", případně naučené násobkové řady ("20, 24" u řady 1, "6, 3" u řady 9). Stačí mu k tomu zřejmě poslední číslo zadání. Kupodivu však u skutečné násobkové řady 5 dává řešení "8, 6". Až na řadu 9 udržuje v pokračování řady její klesající nebo stoupající směr. (V další třídách se dotahuje na ostatní, už příští rok dosáhne jeho výkon v subtestu 14 bodů).

Úroveň **bazální kompetence** se tedy rozhodně posouvá, chyba v řadě 8 jako by teď vyznačovala spíše druhou nejnižší. **Více chyb v prvních 10 řadách je výjimkou**. Kromě dvou nových žáků (Radek, Eda) se jich dopouští jen Darina, Marcel, Vanda a Luděk.

Není překvapivé, že **se bazální kompetence rozšiřuje na řadu 13**: nacházíme tu jen 2 chybná řešení (Evžen a Aleš - loni úlohu nedělali), třem dětem nebyla řada předložena (Darina, Eda a omylem i Luděk, který ji loni řešil správně).

Znamená tento posun i posun v řešení úloh 11 a 12, jak by odpovídalo našim hypotetickým předpokladům?

Posun tu rozhodně nastává. **Úlohu 12 řeší správně už 15 dětí** - přitom ovšem z loňských 8 řešitelů nezopakovali správné řešení Čenda, Slávek a Kiška. Z desetičlenné skupiny A+B řeší úlohu 8 dětí (kromě Čendy chybuje ještě Míťa).

Úlohu 11 řeší správně 14 dětí (9 z nich z A+B - tedy všichni kromě Míti). Úloha dělí pořadí v subtestu zcela přesně na 14 lepších (s výkonem 14-20 bodů) a 10 horších (s výkonem 5-12 bodů - Eda má ovšem 1 bod). Z loňských 6 řešitelů neřeší Vráťa a opět Kiška!

Tyto výsledky vedou k zajímavým závěrům.

K první úrovni bazální kompetence se přimykají úlohy 11, 12 a 13. Ve třetí třídě je **12 dětí, které řeší všechny tři tyto úlohy, a dalších 5, které řeší alespoň dvě z nich**.

Jednou neřešenou úlohou je ve 3 případech úloha 11:

Nina, která ji neřeší stejně jako loni, odpovídá "nevím" (loni řešení "4, 7").

Vanda: "4, 7" (loni "7, 8"). - Vanda zaznamenává posun ve výkonu, ale je to posun jen k loňskému průměru - a to i obsahem. Patřila by ke skupině, která těží spíše z paralelních řad (i zde však chybuje v řadě 10) a má počtářské slabiny. Svým letošním výkonem je na nižší úrovni bazální kompetence třeťáků. - O řešení "4, 7" jsme skutečně uvažovali jako o možné indikaci, že v zadání jsou vyčleněny dvě paralelní řady.

Radek (nový žák): neví.

Ve 2 případech je jedinou neřešenou úloha 12:

Čenda: "4, 8" - Loni chybu neudělal, tahle umožňuje obě interpretace (viz výše): střídání operací i postup v paralelních řadách.

Slávek, který měl i loni zvláštní kombinaci chyb, dělá neobvyklou chybu: "12, 5". Jediná možnost, která nás při zadání "5, 3, 6, 3, 7" napadá, je tato: 5+3 (-2) = 6, 6+3 (-2) = 7. A teď by mělo přijít "7 + 3 (tu napíšu) -2 (skrytý operátor) = 8 (napíšu)". Ale Slávek místo toho dělá chyby: "7+3(+2)=12 ("napíše")", "12-7 = 5 ("napíše"). Pokud náš krkolomný pokus o interpretaci má nějaké opodstatnění, svědčí to pro to, že Slávek jako by důsledně postupoval v řadě sukcesivně, krok za krokem zkouší budovat vždy další člen řady a zkouší hledat stálou (?) kombinaci konstantních operátorů. Pokud postupoval takto, použil dokonce princip, který v celém subtestu použit není: bere totiž do triády tři sousední členy zadání a doplňuje je na příklad o čtyřech členech skrytým operátorem. (Nejznámější řadou tohoto druhu, ovšem bez použití skrytého operátora, je řada "1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21...".)

Nenastal však případ, že by při neřešení řady 13 řešil někdo některou ze zbývajících řad.

Srovnáme s výše uvedenými chyby **6 dětí, které neřeší ani jednu z řad 11 a 12**, zjistíme, že 4 z nich odpovídají v obou řadách "nevím": Míťa (loni odpovídal stejně), Aleš (loni stejně), Evžen (loni nepředloženy), Darina (loni odpovídala u řady 12: "10, 7" - pokus o střídání +/- s konstantním členem).

Kiška, která loni obě úlohy řešila, teď odpovídá na úlohu 11 "nevím", na úlohu 12 pak "4, 7", jako by identifikovala konstantní člen "3". Lze tu opět uvažovat o projevu "matematizace přístupu" k číselným řadám? Kiška svým výkonem stagnuje - z loňských 12 bodů se letos dostává na 11.

Vráťa odpovídá na obě úlohy. V řadě 11 má řešení "7, 11" (loni správně). Toto řešení jsme výše popsali jako identifikaci konstantního operátora "+4". V řadě 12 chybuje stejně jako loni, ale s jiným řešením: "5, 2" (loni 9, 11). Je tu logika stabilní? Snad dílčím způsobem. Jeho loňské řešení jsme považovali za projev hledání konstatního operátora ve složité struktuře vznikající zahrnutím "trojek jako čísel". Logika letošního řešení se zdá komplexnější: jako by šlo o variaci dvou operátorů identifikovaných prostřednictvím zjištění "o kolik" se liší sousední členy: o 2, o 3, o 4 - a Vráťa pokračuje?: znovu o 2, o 3..., ovšem se zanedbáním střídání operací. Redukce střídavého pohybu připomíná loňské řešení, postup "znovu od začátku" jsme letos už viděli u jiných dětí.[16]

V obou úlohách loni i letos a v obou špatně odpovídal také Luděk. U řady 11 dává letos odpověď "35, 36" (loni "4, 7 ", odkazující snad k paralelním řadám), v úloze 12 pak odpovídá "73, 72" (loni "9, 8", které se zdálo vyřazením trojkové řady - ale mohlo také být sečtením prvních dvou dvojic zadání). Logika letošních řešení je zřetelná: u obou řad jde o sestavení členů zadání do dvouciferných čísel - pak řada pokračuje konstrukcí dalších dvouciferných čísel:

řada 11: 1, 5, 2, 6, 3 - transformováno 15, 26, 3? - doplněno 3**5** (analogie 1**5**), 3**6** (analogie 2**6**);

řada 12: 5, 3, 6, 3, 7 - transformováno 53, 63, 7? - doplněno 7**3** (analogie předchozích trojek), 72 (jen tady nerozumíme - ad hoc doplnění? posun v jednotkách namísto v desítkách?). Zdá se, že Luděk je dosud stabilní jen v nestabilitě svých postupů - jako by si pro každý případ vymýšlel zvlášť, "co by s tím tak šlo dělat".

Ve vztahu k úloze 8, o které jsme uvažovali jako o kritériu bazální "počtářské kompetence", pak zjišťujeme, že ze 17 dětí, které vyřešily alespoň 2 z úloh 11, 12 a 13, ji ve 3. třídě nevyřešily jen 3: Marcel, Denisa, Vanda. **Skupina dětí, které řeší úlohy v obou vyčleněných oblastech bazální kompetence, se tak rozrostla z 5 dětí ve 2. třídě na 14.** Přitom z loňské skupiny vypadli Vráťa a Kiška. Z těchto 14 dětí je 9 ze skupiny A+B (z ní má nadále potíže Míťa).

Druhou, nižší úroveň bazální kompetence znamená řešení úloh 8 a 13. (Ve 2. třídě tuto podmínku splňovalo pouze 7 dětí, ve 3. třídě už jich je 17 (z nich jsou ovšem 3 noví žáci).

Tuto úroveň představují Míťa, Mikuláš a Kiška. U Míti to představuje posun: loni sice řešil úlohu 8, ale nikoli 13. Signifikantní se nám zdá, že tento posun v úlohách, o nichž uvažujeme jako o kriteriálních, je spojem s růstem celkového výkonu v subtestu z 9 na 12 bodů. Nárůst vedle úlohy 13 představuje také řešení úlohy 6 (zjevně s ní příbuzné právě kombinací pohybu ve dvou řadách) a 14. Mikuláš řešil úlohy 8 i 13 už loni - a skutečně, stagnuje celý jeho výkon v subtestu na 12 bodech. Kiška tu zaujme tím, jak její loňský výkon "nedrží": loni patřila k těm, kdo řešili všechny tři úlohy 11, 12, 13 i úlohu 8. Letos úlohy 11 a 12 neřeší, zato řeší na rozdíl od 2. třídy úlohu 6 (podobně jako Míťa). V této souvislosti je překvapivý spíše její loňský výkon - nemáme pro něj vysvětlení. (Její výkon v subtestu tak klesá z 12 na 11 bodů.)

Jen Marcel tím drží stálost rozdělení do skupin, které jsme se pokusili vyčlenit ve 2. třídě. Denisa jako by zhoršila svou počtářskou kompetenci (ale právě jen v řadě 8) a zlepšila schopnost pracovat se dvěma kontexty, Vanda se zlepšila především v oné druhé.

Podobné zvraty tu zaznamenává i Vráťa, který letos opět neřeší úlohu 8, také však neřeší úlohu 11 řešenou překvapivě loni. Naproti tomu překvapivě řeší úlohu 17 (loni nepředložena).

Nadprůměrnou či nadstandardní kompetenci charakterizují ve 3. třídě řady 15, 16 a 14. Podle našich předpokladů z úvodu kapitoly tvoří řady 16 a 14 dvojici příbuzných úloh se střídáním dvou konstantních operátorů, případně se shodným operátorem ve dvou nezávislých řadách. Mohou být svým charakterem podobné řadě 11. Při přístupu k řešení jako ke střídání dvou stabilních operátorů se od sebe liší tím, že v řadě 16 jsou oba operátory kladné.

Každou řadu vyřešilo správně 9 dětí. (Úloha 14 byla předložena 23 dětem, úloha 16 pak 21 dětem.) Obě skupiny se pak překrývají jen zčásti a je patrné, že stačí k tomu, aby charakterizovaly nejlepší. **6 dětí, které řeší**

---

[16] Samozřejmě: často se tu pohybujeme na tenkém ledě. Zkouším spekulacemi vytvářet možné interpretace a porovnáváme je často znovu jen se spekulativními interpretacemi a snažíme se tak najít v mnohoznačnostech jednotlivostí nějaké zřetelnější souvislosti a pravidelnosti. Druhou věcí, na kterou je třeba upozornit, je toto: popisujeme-li postupy dětí matematickými formulemi či je vůbec nějak zřetelně popisujeme a vyjadřujeme, pak samozřejmě posouváme jejich charakter někam, kde reálně není. Kdyby děti takto formulovaly svůj postup, patrně by ho dokázaly korigovat. Domníváme se, že jejich postupy mají vůči našim popisům podobu nezřetelných intuitivních náznaků a tušení "tak nějak", které by šly také odbýt jako "hádání". Snažíme se dát tomuto jejich hádání a tušení tvar, který reálně nemá, abychom v něm mohli hledat náznaky logických figur, které děti při řešení evokují.

obě úlohy, dosahuje nejlepších výkonů v celém subtestu (18 - 20 bodů): Jindra, Bořek, Milena, Fanda, Pepík, Vilém.

Splnění jedné z úloh už nezařazuje tak jednoznačně. Těchto 6 dětí obsazuje polovinu míst v mírném nadprůměru s výkonem 12 - 16 bodů.

Překvapivě tu není Gita. Loni řeší řadu 14, neřeší řadu 16 s chybným řešením "10, 13". Letos má v úloze 14 řešení "9, 7". Vypadá to na drobnou chybu při střídání dvou operátorů "+3" a "-1": tato dvojice vytváří implicitní člen "2", který pak interferuje jako chybný operátor. V řadě 16 pak loňské chybné řešení "10, 13" vystřídalo letošní "12, 11". I tady vypadají chyby podobně: jako by dvojice operátorů "+2, +1" vtáhla do hry postup "o 3" - v loňském řešení zcela patrně. V letošním pak je otázka, jak vzniká číslo 12. Je odvozeno až jako druhé od čísla 11 (sousední členy se liší o jednu) při pohybu v téže řadě nebo je součástí chybně konstruované řady "4, 8...", která by poukazovala k vyčlenění dvou řad v zadání? (Naši hypotézu, že pokud existuje u dětí nějaká setrvalá afinita ke stejným postupům, je pro Gitu charakteristický spíše postup konstruování kombinací kroků v jedné řadě než kombinování paralelních řad, a že tedy sedí spíše první interpretace chyby, by mohlo částečně potvrzovat neřešení úlohy 17.)

Co říkají chyby ostatních dětí?

V řadě 14 se objevuje přehození členů řešení - "8, 9" namísto "9, 8" (Lada, Slávek). Při pohybu ve 2 paralelních řadách by to byla srozumitelná chyba - pro Slávka však netypická? Jinou možností je ovšem konfuze identifikovaných operátorů, o které jsme mluvili výše u Gity: operátory "+3" a "-1" vyvářejí falešného operátora se jmenným členem 2. (Jmenný člen 4 není příliš pravděpodobný, protože se nevyskytuje mezi žádnou sousední dvojicí v zadání). Tato konfuze je pak nejčastěji doprovázena i interferencí operací "+/-".

Lze tedy rozlišit různé úrovně chyb, související patrně s úrovní vhledu do úlohy.

- Přehození **posloupnosti operátorů** vidíme zřejmě u Marcela v úloze 16: "9, 11" a mohli bychom ho považovat za nejlehčí chybu.

- Další úrovní chyb jsou problémy, které nastávají ve jmenných členech operátorů - vzniká **operátor s falešným jmenným členem**. U řady 14 to nejspíše vidíme v těchto případech: "9, 7" (Gita, Čenda) a "9, 6" (Denisa - jakoby jediný jmenný člen). Podobnou konfuzi jmenných členů operátorů u řady 16 generuje znovu Denisa (10,13) a Kája (11, 13),

Něco podobného možná dělá Radek. Jeho řešení "8, 8" v řadě 14 je snad možné jen jako pohyb ve dvou řadách s různými operátory: "+1 k sedmičce a +2 k šestce". (Loni ho dával Čenda.) Radkovo "8, 11" v úloze 16 se ovšem nezdá konzistentní s předchozím řešením u 14 - těžko jde o 2 řady. Ledaže by jako jejich operátory identifikoval +1 a +3. To není vyloučené: hledá-li souvislosti také objeden člen, pak se takové rozdíly ("o kolik") objevují.

- Neznamená řešení "3, 1" jen **identifikaci jmenných členů operátorů namísto jejich použití** k pokračování řady? (Loni ho dávala Lada.) Mikuláš generuje toto řešení u obou řad. (Není nakonec i jeho "2, 1" u řady 11 pokusem se stejnou logikou?)

(Naproti tomu Vanda ve svém "6, 3" spíš mate operátory a zanedbává střídání, a její předchozí "3, 1" u řady 14 je zřejmě tímtéž.)

Nejnižší stupeň diferenciace úlohy pak zřejmě představuje:

- **Konfuze operátorů - tedy jak jmenných členů, tak operací**:

Vidíme ji zřejmě v úloze 16 u Martina (10, 6), Kišky (7, 8) a Vandy (6, 3), v úloze 14 pak u Vandy (3, 1).

- **Redukce na jediného operátora**, kterou zřejmě dělá Vráťa jak v úloze 14 (9, 12) - a je v tom konzistentní jak s už předcházející řadou 11 (7, 11), tak s řadou 16 (10, 12). Podobnou redukci dělá Míťa v úloze 16 (9, 10.).

Už jsme konstatovali mnohoznačnost odpovědi "nevím" - v obou úlohách ji dávají Nina a Evžen, v úloze 14 navíc Aleš a Kája.

Úloha 15 je první řadou, která pracuje s implicitním rozvojem řady operátorů. Na druhé straně je tu dobře využitelná metafora s kyvadlovým pohybem, což může možná zpřístupnit řadu některým dětem, které by jinak řadu s metaoperátorem neřešily. Byla předložena 21 dětem, správně ji řešilo 11.

Výsledky řady 15 neznamenají přílišný posun v diferenciaci dětí, dané už výsledky úloh 14 a 16. Ze skupiny šesti nejlepších oslabuje úloha 15 poněkud postavení Fandy - jeho odpověď "nevím" ovšem neříká nic o povaze jeho potíží. Jsou pak relativizovány jak celkovým výsledkem (18 bodů), tak řešením řad 18 a 22, které metaoperátora zahrnují. Tato kombinace by mohla svědčit pro to, že Fanda bere řadu "čistě matematicky" - pak jde totiž o řadu se střídáním dvou metaoperátorů, obtížnější než řady 18 a 22.

Mezi 6 dětmi, které řešily jednu z úloh 14, 16 pak úloha 15 jako by řadila k lepším Čendu, Slávka a Marcela, k horším pak Ladu, Martina a Míťu. To však příliš nekoresponduje s celkovými výsledky, kde schopnost řešit ještě obtížnější úlohy prokazují Čenda a Lada, kdežto Martin, Slávek, Marcel a Míťa se v úlohách 14, 15 a 16 pohybují na hranici svých možností.

Neřešení úlohy 15 spočívá především v odpovědi "nevím", kterou dává 5 dětí. Dvakrát se setkáváme s opačným pořadím konstruovaných členů ("6, 7" - Mikuláš, Martin). Konfuzi v identifikaci členů operátorové řady prokazuje Radek (7, 4) a Lada (8, 6 - tohle řešení má ale možná blízko k přeřeknutí). Vanda se svým "1, 7" jako by dokompletovávala kolekci "čísel do 10"?

Porovnáme-li skupinu 10 dětí, které řešily bezchybně všechny bazální úlohy (8, 11, 12 a 13) s řešiteli všech tří úloh 14, 15, 16, vidíme, že všechny úlohy 14-16 nevyřešil nikdo, kdo do této skupiny nepatřil. Těmito řešiteli jsou Jindra, Bořek, Milena, Pepík a Vilém. Z řešitelů všech bazálních úloh pak je zcela neúspěšná Kája; Lada, Gita a Martin řeší jen jednu z úloh. Fanda a Čenda dvě a nejvíce se tak přibližují nejlepším.

Skupinu velmi obtížných úloh představují jednak úlohy s implicitní řadou 18, 19, 22, dále úloha 17 s dvěma dvojicemi paralelních řad a nakonec úloha 20 s nepravidelným střídáním operací +/-.

Úloha 18 byla předložena 15 dětem, z nichž ji vyřešilo **6 dětí správně**: Jindra, Bořek, Pepík, Vilém, Fanda a Gita.

Chyby ostatních spočívají převážně v redukci na konstantního operátora - většinou "-6" ("23, 17": Martin, Vráťa, Marcel, Denisa - ta ale neví, jak pokračovat po "23"), případně "-2" (Slávek: "27, 25") nebo "-4" (Milena: "25, 21"). Jen Lada ("23, 15" - pokud tu není chyba a nemá na mysli také "23, 17") a Čenda ("23, 20") se pokoušejí o jakési variování operátora, ale není jasné jak. Radek "neví".

Úlohu 19 (předložena 13 dětem) už řeší **správně jen 4 děti**: Jindra, Bořek, Milena, Lada. Podíváme-li se však na chyby, zjišťujeme, že u **tří dalších** jde nejspíše o správnou identifikaci implicitní posloupnosti a drobnou chybu při její aplikaci. Jde o shodná řešení "35, 46" u Viléma a Pepíka a "35, 49" u Čendy. Ostatní odpovědi, kromě Gity (neví), jsou pokusem o konstantního operátora "+8" (Fanda, Vráťa) nebo nejasnými skluzy (Slávek: "35, 55" - sklouzne k implicitní posloupnosti 10, 20, 30...?; Martin: "27, 28"). Marcel zkouší fintu "znovu od začátku": "5, 7".

Úloha 19 je složitější (metaoperátor +2, chybějící členy jsou vyšší čísla). Jak je možné, že Lada, Milena a téměř i Čenda identifikují správně implicitní posloupnost operátorů v této řadě a v úloze 18 nikoli? Obtížnějším parametrem řady 18 je klesající směr vlastně obou posloupností. Pak bychom soudili, že ve hře je počtářská zběhlost, že řada identifikuje vyšší úroveň počtářské kompetence.

Úloha 22 byla předložena už jen 8 dětem, 5 jich řeší správně: Jindra, Pepík, Vilém, Fanda, Čenda. Úlohu komplikuje to, že se implicitní posloupnost dostává až k operátoru "0" a s tím si děti často nevěděly rady. (Uvidíme to i později.) Bořek to tu řeší "22, 27" - namísto dosažení operátoru "0" začíná znovu s operátorem "+5". Lada podobně, začíná ovšem od začátku hned, aniž by ještě pokračovala ve snižování operátora: "26, 30". Také Milena (24, 29) jako by se vyhnula přibližování k nule a začíná operátora zvětšovat - ale buď dělá chybu (pokud chtěla "+2, +3") nebo ho zvyšuje nesystematicky (nesymetricky). Z výsledků se ovšem zdá, že i tak je úloha snadnější než úlohy 18 a 19 a kdyby byla předložena více dětem, bývala by ji asi byla řešila i část ostatních.

Úloha 17 je charakterem zcela odlišná. Byla předložena 15 dětem, řeší ji 5 dětí: Jindra, Milena, Lada, Vráťa. I složení řešitelů napovídá (a tím spíše v souvislosti s tím, co bylo řečeno o rozdílu mezi řadami 18 a 19), že tu jde o jiný druh kompetence, než v předchozích řadách. Jde opět o schopnost operovat sice elementárními kroky, ale v několikanásobném kontextu. Matoucí je tu ovšem znaménko "+" - pro některé děti je zřejmě mimo rámec úvah, že by mohlo být použito jen jako grafický znak, oddělovač či spojovač dvou dvojic. Skutečně se několik dětí pokouší dojít k číselným výsledkům - Bořek odpovídá "10, 16", Pepík "21, 24", Radek "9, 6" - ale to už je možná část "skládanky".

Ve 3 případech je úloha pochopena správně, ale nedaří se udržet diferencovaný pohyb číselných posloupností: "9b +6c, 10b+7c" (Gita), 10b+3c, 12b+7c" (Čenda), "10b+6c, 9b+7c" (Marcel) - naproti tomu ornamentální opakování písmen se udrželo.

Zbylých 5 odpovědí je "nevím", "nechápu".

Konečně **úloha 20** představuje překvapení. Na první pohled velmi jednoduchou posloupnost řeší - ale také jen na první pohled! - jen 2 děti ze 13, jimž byla předložena: Vilém a Fanda. Většina chyb působí nejdříve jako tápavé pokusy o "další sestup", kde většinou je ve hře číslo 5 - celkem v 8 řešeních. K našemu překvapení zůstává neodhalen "tříčtvrťový rytmus" např. i některými, kteří hrají na nástroj či zpívají: Gita, Jindra. (Vilém ovšem zpívá.) Je právě ten překážkou, je v matematice neobvyklý? Jenže: proč by vlastně musel být "tříčtvrťový"? Podíváme-li se na dětská řešení z hlediska variant rytmu "čtyřčtvrťového" či dokonce "pětičtvrťového", jeví se jinak: Je-li zadání taktováno po čtyřech číslech, pak řešení "5, 6" je zcela korektní: 9, 8, 7, 8| 7, 6, **5, 6**. Takové řešení dává Bořek a Martin. Při členění na pětice pak řada vypadá takto: 9, 8, 7, 8, 7| 6, **5, 4**, 5, 4. Takové řešení má Pepík, Jindra, Marcel. Tato řešení musíme zřejmě uznat jako správná. Pak je **správných řešení většina - 7 ze 13**. Zároveň to poukazuje na slabinu úlohy, jejíž ornamentální charakter umožňuje zřejmě více pokračování. Tak i další řešení - "8, 7" (Milena), "6, 6" (Vráťa), "5, 3" (Lada), "7, 5" (Gita) by bylo možno si představit jako pokračovaní rozvoje nějakého ornamentu. Některá z nich můžeme odmítnout snad proto, že už zacházejí se zadáním příliš svévolně a vnášejí do rozvoje operátory, které v zadání nejsou ani implicitně obsaženy. Uznat by tedy bylo nutno jakýkoli rozvoj, který obsahuje střídání operátorů "-1" a "+1" ve shodě s některých možných cyklů v zadání.

Zároveň nás úloha upozorňuje, že i některá řešení jiných řad, která se nám jeví jaké tápavé hledání operátorů, nesystematické zacházení s nimi či jejich konfuze, by možná bylo možno interpretovat jako pokusy o rozvoj podobných "číselných ornamentů" - tříčlenných, čtyřčlenných, pětičlenných...

Celkově i ve 3. třídě vidíme, jak růst kompetence se děje jako růst složitosti souběžných kontextů: buď jako hierarchické komplikování kroků v téže řadě vzájemně závislých, propojených členů, nebo jako komplikování struktury paralelních nezávislých řad.

Výsledky subtestu přinesly ve třetí třídě hodně nerovnoměrný vývoj, výraznou a přitom nestejnoměrnou diferenciaci výkonů: zatímco ve 2. třídě dosáhlo 17 dětí výkonu v rozpětí 8 - 12 bodů (při průměru 10 bodů), nyní se do stejného bodového rozpětí kolem průměru (tedy 11 - 15 bodů při průměru 13) vejde jen 12 dětí. Tato diferenciace "vynesla nahoru" děti ze skupiny A+B. Obsazují prvních 9 míst v pořadí, jen Míťa je až 15.

4. třída

Ve čtvrté třídě nejnižší úroveň bazální kompetence zahrnuje prvních třináct úloh subtestu včetně řad 11 a 12. V obou těchto řadách chybují jen Darina, Evžen a Eduard.

V úlohách 14, 15 a 16 nedělá žádnou chybu 11 dětí, jednu chybu pak dalších šest dětí. Nebudeme-li počítat Eduarda, který předtím chyboval v nižších řadách, pak pro dvě třetiny dětí (16 z 24) ve čtvrté třídě se bazální kompetence posouvá až sem. (Překvapivě je mezi nimi i Vanda, která udělala výkonnostní skok z 9 na 17 bodů.[17]) Mezi těmito dětmi jsou všichni ze skupiny A+B, Nina a Slávek z C, Kiška a Vráťa z D, Denisa a Vanda z E.

Teprve v řadách 18 a 22 začíná další diferenciace výkonů.

Úlohu 18 řeší správně 13 dětí. (Kromě Čendy jsou tu všichni ze skupiny A+B.) Jako výjimky jsou tu Marcel a Eduard, které jsme nezahrnuli mezi ty, kdož prokazují vyšší úroveň bazální kompetence.

V odpovědích skórovaných jako "nesplnil" je tu patrný zřejmě obecný trend: přibývá odpovědí "nevím" na úkor tápavých pokusů. Odhadujeme, že to spíše než s rostoucí obtížností řad (vzhledem k věku jen relativní) souvisí s rostoucí kritičností dětí vůči vlastním řešením, resp. se strukturovanějším vhledem do úloh, který jim umožňuje vyhodnotit zkusmé řešení jako nesprávné a nezveřejňovat ho. Zde jsou 4 takové odpovědi. Logice řešení Čendy (19, 18) ani Slávka (22, 23) nerozumíme. Luděk (25, 20) zkouší zřejmě pokračovat s konstantním operátorem.

Řadu 22 řeší správně 11 dětí, všechny patří k oněm 16 s vyšší úrovní bazální kompetence (7 z nich ze skupiny A+B).

Jediný Fanda loni řešil úlohu správně a letos chybuje: "23, 24". Chce zřejmě přejít ke vzestupnému rozvoji operátora, ale namísto pořadí operátorů "+1, +2" dává mylně "+2, +1". Bořek ve svém řešení "22, 21" aplikuje správně postup, jímž obrací směr a vytváří pohyb symetrický jak směrem, tak růstem operátorů. Eduard má dvojznačné řešení: "22, 23" může být přechod na konstantního operátora "o 1", ale také zopakování jedničky symetricky před dalším symetrickým růstem operátorů (+1, +2,...) - pro to by svědčilo jeho řešení v úloze 19 (viz níže)! Pokusy Marcela (26, 28) a Martina (29,35) můžeme označit jako tápavé - jsou přinejmenším nejednoznačné a pokud pracovali s nějakou logikou, došlo v konstrukci k nějakým chybám.

Řada 19 je pak strukturálně nejobtížnější z této skupiny příbuzných řad s implicitní posloupností operátorů, i když jsme již upozorňovali, že některým dětem možná činí sestupný trend řady 18 větší potíže než struktura této stoupající řady.

Správně ji řeší 7 dětí, které patří nejen k řešitelům bazálních úloh, ale také k nejlepším 10 v subtestu (s výkony 19 - 23 bodů). Šest z nich je ze skupiny A+B, z ostatních je tu Denisa![18]

Ke správnému řešení se podle nás přiblížilo několik dětí: Míťa, v jehož řešení "35, 37" zřejmě selhal jen desítkový šift; Gita a Kiška: "35, 46" a zřejmě i Pepík: "34, 44" (tzn. +9, +10; Pepík tímto řešením v úloze stagnuje - už loni odpovídal "35, 46"). Z dalších řešení stojí za pozornost Vanda tím, že zřejmě pracuje s rozvojem operátorové řady: "32, 40" (+7, +8?) - to je u ní pokrok. Podobný pokus dělá Marcel: "30, 36" (+5, +6?). Další pokusy pracují buď s konstantním operátorem (Luděk: "35, 45") nebo opakováním řady operátorů (Eda: "27, 31" - u něj však proti loňsku ohromný pokrok!).

5 dětí tady odpovídá "nevím" (mezi nimi i Milena, která loni úlohu řešila).

Úlohou stejného charakteru, avšak obtížnější, protože rozvoj operátorové řady je s metaoperátorem "+4", je **úloha 23**. Řeší ji 5 dětí z 16, jimž byla předložena.

---

[17] Její výkon v páté třídě bude nižší - 14 bodů. Opakovaně se tak setkáváme (např. také u Martina, u Luďka i dalších) s trajektorií, kdy je výkonnostní skok následován stagnací.

[18] Opět případ oné trajektorie, kterou jsme zmiňovali: z 13 bodů ve 3. třídě vzrostl její výkon v subtestu na 19 bodů, v 5. třídě pak víceméně stagnuje (20 bodů).

Z nesprávných odpovědí bylo 5 "nevím". Většina ostatních řešení zřejmě identifikuje metaoperátora jako "*2" (svádí k tomu začátek řady: 4, 8, 16 - ale: 28, 44) a buď v této logice počítají správně (88, 176 - Lada, Vanda, Marcel) nebo chybně (Vilém: 84, 172, možná i Denisa: 108, 236? - jednotky odpovídající dvojnásobkům by pro to svědčily). Edovo "68, 106" znamená, že identifikoval metaoperátora "+8".

Podíváme-li se na tuto skupinu úloh vcelku jako na oblast kompetence kvalitativně odlišnou od jiných úloh přibližně stejné obtížnosti (řady 17 a 20), zjistíme následující. Žádná z úloh sama o sobě není jednoznačným kritériem diferenciace dětí, které splnily bazální úlohy. Tuto roli však plní jako skupina, přičemž mezi žádnou dvojicí úloh nevidíme nějak jednoznačné souvislosti, jejich splnění a nesplnění můžeme najít prakticky ve všech možných kombinacích - s tím, pochopitelně, že obtížnější úlohy jsou častěji neřešeny. Rozdělíme-li všechny děti do skupin podle počtu splnění těchto čtyř úloh, dostaneme následující skupiny:

Všechny čtyři úlohy vyřešil pouze Jindra.

Tři úlohy vyřešili: Pepík (neřeší úlohu 19), Lada (23), Vilém (23), Gita (19), Fanda (22), Čenda (18).

Dvě úlohy vyřešili: Bořek (neřešil 22, 23), Milena (19, 23), Denisa (18, 23), Kiška (19, 23), Vanda (19, 23).

Jednu úlohu vyřešili: Míťa (řešil 18), Nina (19), Eda (18), Marcel (18).

Žádnou pak Martin, Slávek a Vráťa, kterým však úloha 23 už nebyla předložena.

Je tu tedy jen malý překryv mezi řešiteli bazálních úloh a těmi, kdo řešili některou z těchto obtížných úloh: Slávek a Vráťa, kteří patří k prvním, tu neřeší žádnou z úloh, a naopak Marcel a Eda, u nichž jsme o dosažení bazální kompetence pochybovali, jednu z nich řeší. Vytvářejí tak jakousi hraniční skupinu.

Úlohu 17 řeší 11 dětí (z nich 3 řešily loni). Jedinou, kdo řešil úlohu loni a letos nikoli, je Milena. Dělá však jen drobnou chybu (10b+6c, 12b+6c).

Poněkud nezvládnutější - dalo by se říci o stupeň - je řešení Bořka (10b+6c, 13b+8c), další stupně nediferencovanosti pak představují Marcel (6b+9c, 10b+7c - snad horší než jeho loňské "10b+6c, 9b+7c"), dále Eda (7b+7c, 6b+6c) a Slávek (6b, 6c).

5 dětí odpovídá "nevím", vesměs ty, které tak odpovídaly už loni nebo jim byla úloha předložena poprvé.

Už ve 3. třídě jsme konstatovali nejednoznačnost toho, co je u **úlohy 20** správné řešení. Autory testu předpokládané řešení "7, 6" uvádí 6 dětí. Můžeme však říci jen to, že jde o děti které vycházejí ze seskupování čísel zadání do trojic.

Ze čtveřic vychází správné řešení "5, 6", které uvádí dalších 5 dětí. Z pětic pak řešení "5, 4" další 2 děti. Celkově se tak kloníme k tomu uznat **13 řešení.**

Při tomto posunu kritéria dosahuje úloha 20 přibližně stejné obtížnosti jako úloha 17. Mají tyto dvě "ornamentální" řady, z nichž jedna se vytváří posloupně rozvíjeným ornamentem a druhá je více simultánně skládanou kombinací, kde posloupnosti uvnitř řad jsou elementární povahy, něco společného? Podíváme-li se na distribuci četností, nezdá se, že by tyto dvě řady měly k sobě blíž než kterékoli jiné.

	20 S	20N
17 S	**8**	**5**
17 N	**3**	**4**

Z distribuce ve třetí třídě lze snad usuzovat jen to, že řešení úlohy 20 spíše předchází řešení úlohy 17, ale i to může být souvislost zprostředkovaná.

Na závěr rozboru výsledků ze 4. třídy poznamenejme, že se už objevují ojedinělá řešení úloh 21 (4 děti z 19, jimž byla předložena), 25 (3 děti z 8) a 24 (2 děti ze 14). Omezují se na skupinu nejlepších v subtestu: Pepík, Lada a Vilém řeší dvě z nich, Jindra, Gita, a Milena jednu. Jen Milena je výjimkou, letos patří v subtestu jen k průměru. (Dosáhla 18 bodů - stejně jako loni. V příštím roce se zlepší na 22 bodů a posune se do nadprůměru.)

5. třída

V páté třídě poněkud mizí dosavadní obraz mírného či strmějšího růstu kompetence. Oproti 4. třídě vykazuje úspěšnost v řadě položek stagnaci či dokonce zhoršení. Jen v několika položkách roste, jak bychom očekávali. Složení třídy se přitom změnilo jen málo, přišli 2 noví žáci (podle celkového výsledku testu chlapce řadíme do skupiny B, dívku do E). Změny v dřívější třídách byly větší, např. mezi 3. a 4. třídou odešly 4 děti. Protože patřily spíše k podprůměrným, mohlo to snad způsobit výraznější posun mezi 3. a 4. třídou. Nijak to ale nevysvětluje vývoj v páté třídě.

Prvních 10 úloh už v 5. třídě prakticky nebylo zadáváno, jen 2 noví žáci je absolvovali bez chyby. Když další úlohy rozdělíme do skupin podle toho, zda v nich výkon třídy stagnoval, zhoršil se či naopak vzrostl, dostáváme následující obraz.

K **poklesu** došlo u tří úloh: 13, 22 a 23.

Oproti 4. třídě (bez chyb) najdeme teď **v řadě 13** celkem 4 chyby (Nina, Darina, Eda Evžen), které mají charakter chyb, které jsme viděli už ve 3. třídě.

Pokles úspěšnosti řešení **řady 22** je markantnější. Ve 4. třídě ji řešilo správně 11 dětí, nyní pouze 6. Zahrnuje to **nesprávná řešení 6 loňských řešitelů**: Gity (20, 20), Niny (23, 27), Marcela (20, 20), Kišky (neví), Vandy (22, 24) a Denisy (neví). Nově se tu oproti loňsku objevuje řešení "20, 20", které vypadá jako akceptace operátoru "0" s předchozím obrácením směru posloupnosti. Proč k němu dochází, když pak nejde o to vyhnout se nule, není jasné.

Jediným, kdo se zlepšil při řešení této řady, je Evžen - byla mu ovšem zadána poprvé. Určitý pokrok i při chybě je snad patrný u Martina ("20, 20" oproti "29, 35"), Marcela ("20, a neví" oproti "26, 27") a Fandy ("22, neví" - oproti "23, 24"; avšak Fanda už ve 3. třídě řadu řešil!).

V řadě 23 bylo loni pět správných řešení, letos jen 2. Správné řešení tu zopakovali Jindra a Gita, naopak Pepík, Čenda a Fanda ho nepotvrdili. Čenda se vrátil k chybě i letos nejobvyklejší - "88, 176" (operátor "*2" - použito 4x, jednou s chybou), Fanda a Pepík odpovídají "nevím". (To je vůbec nejčastější odpověď - 10x.) Konečně třetí nejčastější odpovědí je letos pokus o rozvoj implicitní řady, kde však je metaoperátor identifikován jako "+2" - tedy "62, 82" (občas s chybou ve výpočtu) - namísto jako "+4".

V řadách, v nichž dochází ke stagnaci, je třeba prozkoumat, zda zůstává oproti 4. třídě stabilní skupina řešitelů a zda se mění charakter chyb.

V úloze 11 chybují 3 děti stejně jako loni:
zhoršení: Luděk a Nina;
zůstali: Eda;
zlepšení: Evžen a Darina.

Luděk zkouší opakování od začátku (1, 5), Nina konstantního operátora (7, 11). Eda (loni "nevěděl") zanedbává jen střídání operací (7, 10).

V úloze 12 chybuje 5 dětí oproti 3 loni:
zhoršení: Nina, Kiška a Luděk;
zůstali: Eda;
přibyli: Helena;
zlepšení : Darina a Evžen.

Luděk dělá drobnou chybu, prohodil pořadí operátorů (4, 7). Podobně možná chyba Heleny (7, 3) opakuje poslední člen zadání omylem - jenže v tom případě nevíme, jak by pokračovala.

Kiška jako by pracovala s trojkou (z trojkové řady?) jako operátorem a odčítala/přičítala k 7 (poslednímu členu zadání)? (Objevuje se v její chybě **snaha vzít členy zadání jako možné operátory**?) Nezvyklá je chyba Niny (14, 21), která je zřejmě aplikací konstantního operátora "*3". Není to ovšem stejná snaha jako předtím u Kišky? Eda (9, 12) se zřejmě snaží znovu pracovat od začátku se střídáním operátorů "+2, +3".

V úloze 14 loni udělalo chybu pět dětí, letos šest:
zhoršení: Míťa, Nina, Eda;
zůstali: Luděk;
přibyli: Tomáš, Helena;
zlepšení: Slávek, Evžen, Vanda.

Míťa a Eda (oba "9, 10") při správných jmenných členech nestřídají směr operace. Ke konfuzi dvou operátorů a vzniku falešného členu "2" došlo zřejmě u Tomáše (9, 7). Helena zřejmě identifikuje konstantního operátora (9, 6).

Luďkovo "5, 1" může být totéž - ale jak by vznikl falešný člen "4"? Ani jako případný "ornament" se nám to nedaří rozluštit.

V úloze 16 loni udělalo chybu šest dětí, letos sedm:
zhoršení: Lada, Vilém, Kiška, Vanda;
zůstali: Martin, Marcel, Evžen;
zlepšení: Milena, Darina, Luděk.

Většina chyb se tu zdá zřetelných. Drobnou chybou je "9, 11" se záměnou pořadí operátorů (Lada). Řešení "9, 10" je způsobeno střídáním operace +/- spolu se střídáním operátorů (Vilém, Kiška). V dalších dvou řešeních vidíme konfuzi operátorů "+2, +1" v triádě, v níž vzniká falešný operátorový člen "3" - "10, 13" (Vanda), "11, 12" (Martin).

S chybou Evžena máme podobné potíže jako u předchozí řady s Luďkem. Pokud řešení "10, 6" vzniká konfuzí operátorů, není jasné, jak se Evžen dostává k operátoru "-4". (Jeho loňské řešení přitom také jako by pracovalo se čtyřkou: "4, 8".) Možná jde o rozklad do dvou řad, kde v první je posloupnost určena správně a ke konfuzi dojde v druhé: 2, 4, **6** - namísto 2, 5, ( )?

Vidíme, že okruh chybujících dětí se mění a je tvořen jen z menší části těmi, kdo úlohu neřešili loni. Opakovaná zhoršení v těchto úlohách, které jsme ve 4. třídě považovali za úlohy patřící k bazální kompetenci, vidíme u Niny, Kišky, Edy a Luďka. Naopak opakovaná zlepšení nacházíme u Dariny a Evžena.

Jen mírné zlepšení je pozorovatelné u úloh 15, 17, 20 a 18.
V úloze 15 loni udělalo chybu 8 dětí, letos 7:
zhoršení: Milena, Nina, Vanda;
zůstali: Eda, Luděk;
přibyli: Tomáš;
zlepšení: Martin, Darina, Kiška, Evžen.
Milena jen obrací pořadí členů: "6, 7". Tomáš dobře identifikuje střídavý pohyb i jeho pořadí, ale špatně druhý člen (7, 5). Vanda přehazuje pořadí operací a navíc špatně navazuje na rozvoj operátorové řady: "2, 4" znamená zřejmě operátory "-3, +2" (namísto správného "+2, -1"). Eda při podobné chybě operace ani nestřídá a dostává se tak k "8, 10". Největší redukci dělá Luděk, pracuje s konstantním operátorem "+3" (8, 11).
Zdá se, že oproti chybám v předchozích třídách ukazují tyto rostoucí tendenci hledat ne-li přímo nějaký rozvoj operátorové řady, pak alespoň nějaké střídání operátorů. Tendence řešit úlohy identifikací konstantního operátora klesá. Může to ovšem být částečně také efektem toho, že řady s konstantním operátorem (v úlohách 1 - 10) vlastně už nejsou dětem zadávány.

V úloze 17 loni udělalo chybu 11 dětí, letos opět 11:
zhoršení: Míťa, Darina, Vráťa, Luděk;
zůstali: Martin, Marcel, Kiška, Eda, Vanda;
přibyli: Tomáš, Helena;
zlepšení : Milena, Fanda, Bořek, Nina, Evžen.
Drobné chyby dělají Helena, Vráťa a Kiška, když se dopouštějí jen jedné chyby v posloupnostech jedné paralelních číselných řad. Větší - a systematickou - chybu v tomtéž dělá Míťa: "10b+3c, 12b+1c". Posloupnosti paralelních číselných řad zcela nezvládl Eda (5c+9a, 4a+9b).

V úloze 20 podle naší reinterpretace udělalo loni chybu 8 dětí, letos 6:
zhoršení: Míťa, Vanda;
zůstali: Luděk;
přibyli: Tomáš (nový), Helena (nová), Evžen (loni nezadána);
zlepšení: Gita, Slávek, Darina (loni nezadána), Denisa, Eda, Marcel, Nina.
Autory testu předpokládané řešení "7, 6", vycházející z trojic, volí letos 10 dětí; řešení "5, 6", vycházející ze čtveřic, volí 4 děti a řešení "5, 4", vycházející z pětic, volí také 4 děti.
Letošní chyby se omezují na tři typy: Helena a Vanda se zřejmě pokoušejí (možná pod vlivem okolních řad) o jakýsi rozvoj operátorové řady: 7, 5. Řešení "7, 8" je zřejmě doplněním ornamentu s bodem symetrie na členu "6" - řada by mohla pokračovat zase zpátky k počátku: 6, **7, 8**, 7, 8, 9.
Nejhorší se zdá řešení Luďka (9, 6), které se zdá svévolné, ať má jakoukoli logiku.[19]

V úloze 18 loni udělalo chybu 9 dětí, letos 8:
zhoršení: Vanda;
zůstali: Martin, Slávek, Darina, Nina, Denisa, Luděk;
přibyli: Evžen (loni nezadána);
zlepšení: Čenda, Kiška (loni nezadána), Vráťa.
Úloha se tedy ukazuje jako jedna z vývojově nejstabilnějších, a platí to i celkově: její reliabilita (počítaná jako relativní četnost případů opakovaného zadání, v nichž nedochází k nesplnění po předchozím splnění) dosahuje 95%.
Zdá se, že se tu u dětí objevují dva postupy. Postup "znovu od začátku" tu nabývá kvalitativně nové podoby: týká se totiž operátorové řady. Děti se zřejmě stávají citlivé na její rozvoj, ale zjednodušují řešení tím, že namísto aby řadu dál rozvíjely, opakují ji. Nejčastěji ovšem jen tak, že se vracejí na její počátek a pracují s prvním operátorem jako konstantním. Některá řešení pak vypadají jako nezdařené pokusy o rozvoj, ale zdaleka nemáme jistotu. Např. Luďkovo "28, 20" vypadá, že dokončuje sestup operátorových členů až k "1" a pak chce možná začít operátorovou řadu opakovat? Podobně vypadá i řešení Slávka, když udává "23, druhý nevím". Také Vanda (27, 25) pracuje zřejmě s rozvojem, když operátora dále snižuje - dělá pak dál chybu, nezvládá rozvoj? S

[19] Začínáme nabývat dojmu, že postup ad hoc je možná výraznou charakteristikou Luďkových řešení. jako by žádné příliš nesouviselo s tím, jak uvažuje jinde či dříve.

konstantním operátorem patrně pracuje Marcel (21, 13) - identifikoval ho chybně na počátku řady (inverzní doplnění triády 7 -1 - ?)?

Skupinu úloh, kde došlo k většímu růstu výkonů, tvoří řady 19, 21, 24 a 25.
V úloze 19 loni udělalo chybu 15 dětí, letos 11:
zhoršení: nikdo;
zůstali: Gita, Martin, Slávek, Marcel, Nina, Vráťa, Luděk, Vanda;
přibyli: Darina (loni nezadána), Evžen (loni nezadána), Helena (nová);
zlepšení: Pepík, Milena, Míťa, Kiška, Eda.
Úloha tedy výrazně představuje jednu z těch, v nichž se odehrává vývojově diferenciační pohyb mezi 4. a 5. třídou, zároveň má stejně jako úloha 18 vysokou vývojovou reliabilitu.
Také tady zjišťujeme v chybách většinou snahu o rozvoj operátorové řady: "34, 44" je výrazem operátorů "+9, +10" (Martin, Vráťa, Luděk), "34, 45" znamená "+9, +11" (Helena), "27, 30" vypadá na první pohled tápavě, ale je zřejmě myšleno jako opakovat rozvoj operátorové řady od začátku: "+2, +3". Také u Gity bychom odhadovali, že "31, 45" vzniklo chybou: "33, 45" by dávalo rozvoj operátorů "+8, +10" (jen špatně navazující na předchozí "+2... +8"). Podobně i Slávek se svým "37, 52" možná pokoušel o rozvoj "+12, +14" nebo "+12, +16".
Dosti skrytý je rozvoj operátorové řady v řešení Vandy, ale zdá se , že tam je: Vanda udává podle nás místo dalších členů číselné řady členy řady operátorové, jenže dělá "šiftovou" chybu a místo (správných) "10, 12" udává "10, 22".
Jen Marcel pracuje jasně s konstantním operátorem odvozeným z poslední dvojice zadání: "33, 41".

Další úlohy budeme popisovat prostřednictvím **počtu správných řešení**.
Úlohu 21 loni řešily 4 děti, letos pak 10 (z 21):
zhoršení: Lada;
řeší znovu: Pepík, Gita, Vilém;
zlepšení: Čenda, Milena, Fanda, Jindra, Marcel, Vráťa, Eda.
Jen drobnou chybu udělala Lada. V řešení "65, 126" je druhý člen skoro jistě početní chybou.
Letos na rozdíl od čtvrté třídy už většina nesplnění neměla podobu "nevím" - daly ji 3 děti. Jinak vidíme jako v předchozí řadě pokusy o rozvoj operátorové řady, většinou sčítáním nebo násobením. Násobením vznikají řešení "66, 132" (Denisa, Kiška), ale zřejmě i Vandino "66, 92". Sčítáním je zřejmě vytvářena operátorová řada s metaoperátorem "+2" u Bořek: "51, 71" jako "+18, +20". Některé další pokusy jsou mnohoznačné, skýtají možnost různé interpretace včetně případných chyb, jak se tu děti pohybují ve větších číslech, nikde však nejde o konstantního operátora.

Úlohu 24 loni řešily 2 děti, letos pak 6:
zhoršení: nikdo;
řeší znovu: Pepík, Milena;
zlepšení: Lada, Bořek, Nina, Denisa.
Už předchozí úloha mohla být vzata jako střídání dvou nekomplementárních operací v simultánní kombinaci, ale mohla být řešena i rozvojem operátorové řady s metaoperátorem "*2". Úloha 24 je pak řešitelná jen posloupností operací "*2, -1".
Chybná řešení dětí většinou identifikují střídavý pohyb "o 1", většinou i jako "zpětný" (-1). Třikrát tak vidíme řešení "15, 14" (součet předposledních dvou čísel zadání mínus jedna? - Tomáš, Eda, Kiška), dále pak "14, 13" (Jindra: [10+(10-6)], -1], "16, 15" (Gita: 6+10, -1) a "11, 10" (Míťa: 6+5, -1?)
Dvakrát tu je řešení "7, 8" (Helena, Fanda), které ale vypadá, jako by se chtěly doplnit dvě paralelní řady v zadání: 2, 4, 6, ( ),10, a 3, 5, ( ), 9.
Vilém zřejmě zkouší tentýž operátorový člen s různými operacemi: "18, 20" jako "*2, +2". podobně Vráťa: "18, 16" jako "*2, -2"?
Ostatní řešení zřejmě hledají nějaký rozvoj operátorové řady: Slávek ("14, 20", tedy "+5, +6"), Marcel ("14, 18" jako "+5, +4").

Úlohu 25 loni řešily 3 děti, letos pak 7:
zhoršení: nikdo;
řeší znovu: Lada, Vilém, Jindra;
přibyli: Fanda (loni nepředložena), Tomáš (nový);
zlepšení: Milena, Gita.
Jde o řadu, která je řešitelná pouze jako posloupnost dvou nezávislých řad.
Většina ze 7 nesprávných odpovědí je "nevím" - čtyři děti. Tři zbývající chyby se zdají být hledáním různých střídavých pohybů. Nejsme schopni interpretovat jejich logiku jednoznačně:

Bořek: "46, 91" - kombinace "*2∧-2, *2∧-1"? Eda (23, 38) zřejmě zkouší dva operátory s tímtéž členem zadané řady: "24-1, 24 +14" ? Vráťa jasně násobí "*2", zřejmě ve dvou nezávislých řadách: "22, 48".

Zbývající úlohu 26, kterou loni neřešil nikdo z osmi dětí, jimž byla předložena, řeší i v páté třídě pouze Gita (byla předložena 14 dětem). Z ostatních dětí odpovídá 10 "nevím".

Vilém jako by zkoušel střídat operátory "*4, *4∧-2", ale udělal chybu?: "112, 330". Eda jako by zkoušel střídat rozvoj "čtyřkové" operátorové řady s odčítáním konstantního "-2": "50, 48".

Je zjevné, že děti se tu pokoušejí v neznámé situaci kombinovat dosavadní principy. Pokrok možná spočívá právě v tom: nezůstávají u výběru jednoho z poznaných principů, nýbrž pouštějí se do jejich složitějších kombinací, do kombinace různých kontextů.

Děti berou zřejmě v úvahu stále větší úseky řad a množství triád. Jsou k tomu také v řadách nuceny. Podíváme-li se na řady z tohoto hlediska, pak - vedle rozdělení, které jsme uvedli na začátku kapitoly - je lze rozdělit podle toho, z kolika prvních členů zadání lze odvodit princip rozvoje řady. Z tohoto hlediska by jejich rostoucí obtížnost vypadala takto:

ze 2 členů - řady 1, 2, 3, 5, 8, 6 (dvojité členy), 7 (dvojité členy), 10 (dvojité členy), 17 (čtverné členy);
ze 3 členů: 4 (?), 11, 14, 15, 16, 18, 22;
ze 4 členů: 12, 19, 23;
z 5 členů: 21(?), 24, 25
ze 6 členů: 20, 26.

Větší problémy pak přináší nejen sama složitější struktura konstrukce řady, ale také množství členů, které je třeba vzít v úvahu, aby byla vyloučena konkurující řešení.

Z tohoto hlediska vytvářejí **zajímavé dvojice** řady 18 a 22, a dále 19 a 23.

Řady 18 a 22 mají obdobný konstrukční princip i obdobnou obtížnost z hlediska, které jsme právě nastolili, přesto je jejich reálná obtížnost pro děti odlišná. Navíc je tu onen fenomén překvapujícího poklesu úspěšnosti v řadě 22. Mohlo by tu jít o onen případ, kdy postupující rozvoj kompetence paradoxně narušuje dosavadní dovednosti? V obou řadách je dítě konfrontováno s postupně klesajícím operátorem. V řadě 22 se však dostává až k nutnosti použít nulu. Samotná nezbytnost toho by nemohla vysvětlit, proč to v páté třídě dokáží méně často. Není tu však ve hře to, že děti berou v úvahu již také další možnosti pokračování řady a nikoli jen ony dva členy, o něž jsou žádány, zatímco dříve se spokojovaly s nejbližšími kroky? Není pak to, že řada 22 už jako by neměla po tomto řešení kam pokračovat, zatímco řada 18 ještě ano, příčinou jejich rozdílné obtížnosti? Nakonec i v řadě 18 se zdá, že některé děti svým chybným řešením hledají možnosti pokračování za bodem, kde operátor dosáhne nuly. A možná někteří z nich dělají chyby právě v uvažování o pokračování operátorové řady do záporných hodnot.[20]

Dvojice řad 19 a 23 ukazuje na jiný problém. Obě řady jsou opět velmi podobné konstrukčně i množstvím členů, které je třeba vzít v úvahu. Nezdá se, že samotná záměna operátora "+2" za "+4" by přinesla tak velký rozdíl v úspěšnosti řešení. Domníváme se, že zatímco řada 19 se odehrává na lichých číslech, u nichž není v případě operátora "+2" žádný problém s konkurencí operace násobení, zavádí řada 23 rozvoj operátorové řady "o 4" na číslech, která jsou všechna dělitelná čtyřmi a vytvářejí tak pro děti zřejmě spleť konkurujících variant. Pokles úspěšnosti pak může vlastně mít obdobný charakter jako v předchozím případě: řada se komplikuje tím, že se pro děti stává dostupný rozvoj operátorové řady operací násobení.

Podívejme se na závěr, co přinášejí nejobtížnější úlohy 21 - 26 v diferenciaci obrazu vývoje kompetencí ve třídě. Žádné z dětí nedokázalo řešit ani pět z těchto šesti úloh.

Čtyři úlohy řešily Milena a Gita, 3 úlohy Pepík, Jindra, Vilém a Lada, dvě pak Fanda a Čenda. Všech těchto 8 dětí je ze skupiny A+B a znovu tak potvrzuje, jak diferenciační pohyb vývoje kompetence v subtestu je výrazným projevem (indikátorem? korelátem?) rozumového vývoje, jak ho postihuje test ve svém celku.

Pouze jednu z nejobtížnějších úloha pak řeší skupina dětí, v níž nacházíme i jednotlivé děti z dalších skupin: vedle Bořka a Tomáše (z A+B) také Marcela, Ninu (skupina C), Vráťu (D) a Denisu, Edu a Evžena (E).

V tomto textu se už bohužel nedostaneme k rozboru vztahů výkonů jednotlivých dětí v tomto subtestu a v úlohách subtestu Počty, abychom dokázali určit přesněji povahu např. překvapivé kompetence Denisy nebo např. povahu relativního selhávání Míti, jediného ze skupiny A+B. Je to důsledek onoho střídavého vzepětí a následné stagnace, které jsme u několika dětí konstatovali? A jaká je vůbec podstata těchto cyklů, kde a jak se hromadí potenciál změn?

---

[20] Je ovšem třeba upozornit, že z hlediska celého souboru dosahuje úloha úspěšnosti řešení na úrovni, kterého naše třída dosáhla ve 4. ročníku. Museli bychom předpokládat, že naši třídu zastihl test oproti jiným třídám v odlišné fázi vývoje. Jinak bychom u ní museli hledat nějaký specifický faktor - přitom ale platí, že ve většině řad dosahuje až překvapivě obdobné úspěšnosti jako celý soubor.

POZNÁMKA NA ZÁVĚR

Celá kapitola je vlastně textem přípravným, předběžným. Některé hypotetické závěry se v textu objevily a bylo by je tu snad možno shrnout, ale ve chvíli, kdy text dokončujeme, máme od něj příliš malý odstup, než abychom dokázali na tomto místě promyšleně prezentovat hlubší souvislosti.

Vzhledem k čistě empirickému charakteru práce také neodkazujeme na literaturu. Explicitní diskuse s ní bude snad možná až po dalších syntetizujících krocích.

PŘÍLOHY

Úlohy subtestu Počty

(U slovních úloh uvádíme znění, u dalších pak popis zadání a znění otázky. Ve znění vycházíme z vydání: Stanfordský Binetův inteligenční test. Psychodiagnostika Bratislava, 1995. Někde zadání mírně upravujeme, aby více odpovídalo instrukci, kterou jsme reálně dávali.)

V úlohách 11 a 12 jsou pomůckou kostky s klasickým označením stěn tečkami o počtu 1 - 6. Kostky se vkládají do "zásobníku" - jakési dřevěné lišty, která umožňuje je řadit.

11 (Sčítání): Vložíme do zásobníku dvě kostky v pořadí 2 - 4. Dáme dítěti kostku s úkolem položit ji ke dvěma kostkám v zásobníku "tak, aby na ní bylo tolik teček, kolik je dohromady na obou těchto kostkách". Ukážeme, případně i řekneme, že jde o tečky jen na horních stěnách.

12 (Řada): Vložíme do zásobníku kostky v pořadí 1 - 2 - 3 - 4. Dámě dítěti dvě kostky, aby je dalo k ostatním, tak jak patří. (Test sice uvádí přesné znění instrukce, ale děti vědí o co jde vlastně dříve, než začneme mluvit, takže na instrukci příliš nezáleží.)

13 (Děti): Úloha exponuje obrázek, na kterém si dvě děti házejí s míčem a přichází k nim chlapec. To doprovází instrukce: "Dvě děti si hrají s míčem. Přichází si s nimi hrát další dítě. Kolik dětí tam bude potom?"

14 (Tužky): Úloha exponuje obrázek, na němž je uspořádaně seřazeno sedm stejných tužek. K tomu je zadání: Tady máme 7 tužek, které patří Michalovi. Když dá tři tužky Janičce, kolik mu jich ještě zůstane?"

15 (Mezi): Úloha exponuje čtyři obrázky s různým uspořádáním dvou postav a stromu a instrukci: "Ukaž mi obrázek, na kterém je děvčátko mezi stromem a chlapcem".

16 (Délka): Exponován obrázek, na němž je "vodorovně" položena tužka a pod ní pravítko číselně označenými dílky (a neoznačenými půldílky). Tužka i pravítko začínají na pravém kraji obrázku, tužka dosahuje špičkou na úroveň dílku "6". Otázka zní: Kolik centimetrů je dlouhá tato tužka?"

(Pokud má úlohu v zadání hrát to, že měřítko není realistické a jde o dílky ve skutečnosti větší než 1 cm, mohlo by to přivést do rozpaků děti až mnohem později, kdy by to mohly brát jako "chyták".)

17 (Koláč): Úloha prezentuje obrázek, na němž z koláče hvězdicovitě rozčleněného na pět částí je jedna z částí poněkud vysunuta, a otázku: "Jakou část z celého koláče představuje tento kousek?" (Barvy na obrázku nejsou příliš realistické.)

18 (Počet kostek): Obrázek, na něm 5 různých uspořádání kostek. Na vzorovém jsou 4 kostky v řadě, dítě má ukázat, na kterém dalším obrázku je stejný počet kostek. Žádné z dalších spořádání není stejné jako u vzoru.

(Správné uspořádání se čtyřmi kostkami má tvar ležícího "L". Jediným typem chyby je pak uspořádání, kde jsou čtyři kostky ve svislé řadě, ale k nim je přiložena další řada kostek.)

19 (Dělitelnost 2, 3, 6): "Které je nejmenší celé číslo dělitelné dvěma, třemi a šesti?"

20 (Čtverec na 9 částí): Obrázek nijak nečleněného šedého čtverce. "Jaký je nejmenší počet přímek, který musíš nakreslit, aby se čtverec rozdělil na devět stejných částí?"

21 (Hrníčky): Čtyři obrázky s různými počty hrníčků a talířků - talířky vždy ve skupině dole, hrníčky nahoře. "Ukaž mi obrázek, na kterém je polovina hrníčků ve srovnání s počtem talířků."

22 (Dvoukoruna): "Je hodně způsobů, jak je možné rozměnit dvoukorunu. Uveď pět způsobů, jak se dá dvoukoruna rozměnit."

23 (Mince): Obrázek, na něm neuspořádaně jedna desetikoruna, jedna pětikoruna, jedna dvoukoruna a dvě koruny. "Kolik korun dávají dohromady tyto mince?"

24 (Písek): Obrázek se dvěma jakoby dřevěnými bedýnkami, položenými souběžně a s užšími stěnami v jedné rovině. Rozměry bedýnek jsou popsány u stran, šířky a výšky shodně 30, resp. 10 cm, délky (na trojrozměrném obrázku vlastně "hloubky") pak 30cm a 60 cm.

"Váží-li písek v malé krabici 10 kg, kolik bude vážit písek ve velké krabici?"

25 (Dělitelnost 3, 4, 8): "Které je nejmenší celé číslo dělitelné třemi a čtyřmi a osmi?"

26 (Lipták): "Pan Lipták dostává pravidelný plat 30 Kč za hodinu při čtyřicetihodinovém pracovním týdnu a za každou přesčasovou hodinu dostává 1 a 1/2 svého hodinového platu. Za minulé dva týdny pan Lipták nevynechal ani jeden pracovní den. Odpracoval několik hodin přesčas. Jeho hrubý plat činil 2 625 Kč. Kolik přesčasových hodin pan Lipták za minulé dva týdny odpracoval?"

27 (Máslo): "V místní prodejně mají na prodej dvě balení másla. Balení A o váze 20 dkg stojí 18 Kč, balení B o váze 15 dkg stojí 10,80 Kč. Které máslo je lacinější?"

28 (Čtverec na 100 částí): Obrázek nijak nečleněného šedého čtverce. "Jaký je nejmenší počet přímek, který musíš nakreslit, aby se čtverec rozdělil na sto stejných dílů?"

29 (Zlomek): "Kolik jsou 2/5 (čteme: "dvě pětiny" - M. R.) vyjádřeno v desetinných číslech?."

30 (Pětikoruna): "Je hodně způsobů, jak je možné rozměnit 5 Kč čteme "pětikorunu" - analogicky se zadáním úlohy 22 - M. R.). Uveď pět způsobů, jak se dá pět koruna (často též pozměňujeme na "pětikoruna" - M. R.) rozměnit."

31 (Nábytek): "Kus nábytku stojí 6000 Kč. Majitelé ho budou splácet 24 měsíců v měsíčních splátkách po 275 Kč. O kolik víc musí zaplatit v měsíčních splátkách za tento kus nábytku, než by zaplatili, kdyby hned při nákupu uhradili plnou cenu?"

32 (Konve 1): "Matka poslala syna k pumpě, aby jí přinesl přesně 2 litry vody. Dala mu pětilitrovou a třílitrovou konvici. V žádné z nich nebyly žádné značky na měření. Jak mohl chlapec naměřit přesně dva litry vody, když nesměl použít jiné konvice než tyto dvě a množství vody nesměl odhadovat. Trochu nám pomůže, když začneme s plněním konvice pětilitrové. Má pětilitrovou a třílitrovou konev a musí přinést přesně dva litry - jak to udělá?"

33 (Konve 2): "Matka poslala dceru k pumpě, aby donesla přesně 1 litr vody. Dala jí třílitrovou a osmilitrovou konev bez míry. Jak je možné naměřit přesně jeden litr vody a nepoužít nic jiného, než tyto dvě konve, když množství nesmí odhadovat. Měla by začít s naplněním třílitrové konve. Uvědom si - má třílitrovou a osmilitrovou konev a musí přinést přesně 1 litr - jak to udělá?"

34 (Hubnutí): "Jedna žena vážící 75 kg chce zhubnout na 60 kg. Zhubne-li za týden o 1,5 kg, kolik týdnů bude potřebovat k tomu, aby dosáhla vytčeného cíle?"

35 (Dlaždice): "Kolik kusů dlaždic o rozměrech 15x15cm je potřeba na zhotovení čtvercové dlažba o rozměrech 180x180cm?"

36 (Autopůjčovna): "V půjčovně aut požadují za zapůjčení auta 240 Kč za den plus 2 Kč za každý ujetý kilometr. Pan Novák si půjčil auto na jeden den. Jeho účet zněl na 590 Kč. Kolik najezdil kilometrů?"

37 (Taxi): "Cesta taxíkem stojí 10 Kč za první 1/9 km a 2 Kč za každou další 1/9. Cena za každou minutu čekání je 2 Kč. Kolik zaplatíme za cestu taxíkem dlouhou 2 2/9 km, když přitom navíc taxík čekal 5 minut?"

38 (Bratři): "Jan je o 4 cm vyšší než jeho bratr Petr. Ročně vyroste Petr o 3 cm a Jan o 2 cm. Kdy budou Petr a Jan stejně vysocí?"

39 (Člun): "Monika vlastní motorový člun, který jede rychlostí 10 km za hodinu. Pojede navštívit svého přítele 4 km proti proudu řeky a pak se vrátí domů. Běžná rychlost proudu je 2 km za hodinu. Jaký bude výsledný čas, který musí Monika strávit na cestě k příteli a zpět?"

40 (Jablka): "Iveta koupila bednu jablek za 50 Kč. Jablka prodávala divákům na sportovním stadióně po 2 Kč za jeden kus. Po zápasu jí zůstalo 8 jablek. Měla-li z prodaných jablek čistý zisk 30 Kč, kolik jablek bylo v bedně na začátku?"

Úlohy subtestu Číselné řady

U každé řady jsou děti žádány, aby doplnily dvě čísla, která budou v řadě následovat. Zde jsou doplněna správná řešení za pomlčkou tučně.

Úloha 1: 6, 8, 10, 12, 14, 16 - **18, 20**

Úloha 2: 13, 12, 11, 10, 9 - **8, 7**

Úloha 3: 3, 5, 7, 9, 11 - **13, 15**

Úloha 4: 6, 6, 5, 5, 4, 4 - **3, 3**

Úloha 5: 45, 40, 35, 30, 25, 20 - **15, 10**

Úloha 6: 5*a*, 6*b*, 7*c*, 8*d* - **9*e*, 10*f***

Úloha 7: $\frac{3}{10}, \frac{3}{9}, \frac{3}{8}, \frac{3}{7}, \frac{3}{6}$ - $\mathbf{\frac{3}{5}, \frac{3}{4}}$

Úloha 8: 27, 23, 19, 15, 11, - **7, 3**

Úloha 9: 9, 13, 17, 21, 25 - **29, 33**

Úloha 10: $\frac{1}{11}, \frac{1}{9}, \frac{1}{7}, \frac{1}{5}$ - $\mathbf{\frac{1}{3}, \frac{1}{1}}$ nebo **1**

Úloha 11: 1, 5, 2, 6, 3 - **7, 4**

Úloha 12: 5, 3, 6, 3, 7 - **3, 8**

Úloha 13: $\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{3}{7}$ - $\mathbf{\frac{4}{7}, \frac{3}{8}}$

Úloha 14: 2, 5, 4, 7, 6 - **9, 8**

Úloha 15: 10, 3, 9, 4, 8, 5 - **7, 6**

Úloha 16: 2, 4, 5, 7, 8 - **10, 11**

Úloha 17: 2b + 2c, 4b + 3c, 6b + 4c, 8b + 5c - **10b + 6c, 12b + 7c**

Úloha 18: 47, 41, 36, 32, 29 - **27, 26**

Úloha 19: 5, 7, 11, 17, 25 - **35, 47**

Úloha 20: 9, 8, 7, 8, 7, 6 - **7, 6**

Úloha 21: 3, 5, 9, 17, 33 - **65, 129**

Úloha 22: 7, 12, 16, 19, 21 - **22, 22**

Úloha 23: 4, 8, 16, 28, 44 - **64, 88**

Úloha 24: 2, 4, 3, 6, 5, 10, 9 - **18, 17**

Úloha 25: 3, 5, 6, 8, 12, 11, 24 - **14, 48**

Úloha 26: 2, 6, 4, 12, 10, 30, 28 - **84, 82**