POZNÁMKY KE STRUKTUŘE A SÉMANTICE SLOVNÍCH ÚLOH: OD 4. DO 6. TŘÍDY

Miroslav Rendl

OBSAH

DVĚ ROVINY SLOVNÍCH ÚLOH
ÚLOHY S JEDNOU TRIÁDOU
Úlohy na sčítání
Úlohy na odčítání
Úlohy na násobení
Úlohy na dělení
SLOŽENÉ SLOVNÍ ÚLOHY
Úlohy s převahou hledání "části"
Úlohy s dvojí strukturací téhož celku
Úlohy na triády sčítání s podmínkou
Složitější struktury
Komplikace struktury větvením
Komplikace struktury vnořováním
Úlohy se shodnou strukturací dvou celků. Úměra.
Restrukturace úměry rovnicemi
ÚLOHY S GEOMETRICKÝMI ÚTVARY
4. třída
5. třída
6. třída
ZÁVĚR

Naším cílem je v tomto textu podat přehled o nejčastějších typech slovních úloh, s nimiž se děti naší Modré třídy setkávaly v průběhu 4., 5. a 6. ročníku.[1] Ve čtvrtém ročníku začínají slovní úlohy být jedním z typických fenoménů hodin matematiky a oproti předchozím ročníkům jejich četnost narůstá. Zvyšuje se také složitost jejich struktury, kombinace dílčích postupů i nároky na zvládnutí sémantiky textu. Chceme se pokusit vyznat se podobněji, v čem tato rostoucí složitost spočívá.

DVĚ ROVINY SLOVNÍCH ÚLOH

Již v předchozích zprávách (za 4. a 5. třídu) jsme ukázali, že slovní úloha vytváří dvojitý kontext dvou paralelních rovin, z nichž obě se na složitosti zadání nějak podílejí. Jednou rovinou je rovina matematických údajů, obsažených v zadání, a jejich vzájemných vztahů, koneckonců nutně vyjádřených ve výpočtu. Druhou rovinou je sémantika textového zadání, nesená jednotlivými jazykovými prostředky výstavby textu - slovotvornými, lexikografickými i syntaktickými.

Pokoušíme-li se rozlišit strukturu matematické roviny kontextu úlohy (častěji používáme

[1] Pro orientaci v dalším textu je užitečné uvést, že 4. ročník navštěvovaly děti v období září 97 - červen 98, 5. ročník v období září 98 - červen 99 a 6. ročník od září 99 do června 2000.

zkratkovitý výraz „matematická struktura“) a roviny sémantické, je třeba zároveň říci, že v každé úloze tvoří neoddělitelné stránky celku a obtížnost či nároky na řešení úlohy nelze postihnout bez jejich vzájemného ovlivňování a protipohybu, kterým se často ze strany dětí odehrává proces porozumění.

Základní matematickou strukturou slovní úlohy je triáda číselných údajů, z nichž dva jsou známy ze zadání a třetí je třeba zjistit. Každá taková triáda vytváří kontext, v němž jednotlivé údaje jsou obsazeny do pozic členů aritmetického příkladu a spojeny syntagmatem matematické operace. Základním předpokladem toho, aby slovní úloha, odpovídající této nejjednodušší struktuře, byla vyřešena, je „vytvořit správný příklad“ - tj. obsadit údaje i početní operaci v korespondenci se sémantikou textu, se sémantikou jak členů, sémantických participantů, tak se syntagmatickými vazbami mezi nimi, zejména predikátovým syntagmatem.

Některé problémy vznikající už na této nejjednodušší úrovni zmíníme podrobněji v kapitole o monotriadických úlohách.

Z dvojitosti paralelních rovin slovní úlohy vyplývá, že komplikování úlohy se může odehrávat v obou z nich. V předchozích textech jsme vyslovili předpoklad, že značná část úspěšnosti řešení slovních úloh nespočívá v kompetenci zacházet s čísly a zvládat početní operace, nýbrž v kompetenci jazykové - v kompetenci identifikovat různé kontexty (jako členy patřící k sobě a jejich syntagmatickou vazbu), korespondenci syntaktických pozic v textu a v matematické struktuře apod. K tomu zřejmě přistupuje - zejména s komplikováním slovních úloh - kompetence obecnější, spočívající jakoby ve schopnosti pracovat zároveň s více kontexty a zvažovat více možností jejich vztahů.

Komplikování matematické struktury zadání se může dít několika způsoby:

a) Nejjednodušší je zmnožení členů aditivního kontextu, odpovídající součtu více sčítanců. Takový případ pro zjednodušení stále považujeme za jedinou triádu, avšak vícečetnou.

b) Totéž lze udělat pro odčítání, avšak jen hypoteticky. Prakticky je většina úloh, v nichž se vyžaduje odečtení několika množství od téhož menšence, řešena ve dvou krocích: součtem menšenců a jeho následným odečtením. To pro nás představuje už úlohu složenou, se dvěma triádami.

c) Předchozí bod vlastně už ukazuje, jak lze strukturu rozvíjet hierarchicky, způsobem, v němž se jednoduché kontexty stávají součástí kontextů nadřazených, jsou v nich vnořeny: výsledný, hledaný člen jedné triády se stává členem triády vyšší, předpokladem pro nalezení v ní hledaného členu, který ovšem může být použit také jen jako člen v další triádě, která teprve dává výsledek.

d) Strukturu triád lze také pouze větvit - jako když pro každého sčítance konečné mnohočetné triády zavedeme nutnost jeho speciálního výpočtu. (Takže maminku necháme nakupovat nejen 6 rohlíků po 1,50 Kč, ale ještě 4 jogurty po 7,60 Kč, 3 kg cukru po 19,40 Kč....).

e) Konečně jsou zřejmě struktury, kde spíše než o hierarchické vnořování kontextů (jako v bodě c) jde o jejich řetězení. Např. v úlohách s úměrou není celek, z něhož je počítáno jednotkové množství, nijak podřazen druhému celku, který se pak prostřednictví této „jednotky“ strukturuje.

Když se snažíme zakreslit strukturu úlohy, uvědomujeme si často, že je obtížné rozhodnout, co je větvení na téže úrovni, které členy či dílčí kontexty tvoří tutéž úroveň, co je hierarchické podřazení a co sukcesivní řetězení. Uvědomíme si přitom, že už tady vlastně bereme v úvahu sémantiku úlohy, a že tedy tato sémantika při své konkrétnosti zároveň pro nás obsahuje obecný strukturální koncept. Ten je sice nesen konkrétním lexikografickým a syntaktickým uspořádáním textu, avšak je obecnější a může zůstat nezměněn i při jiném konkrétním sémantickém obsazení.

Je struktura, kterou se pak snažíme zakreslit, vyjádřením tohoto strukturálního konceptu, redukovanou strukturou konkrétní sémantiky, která už je totožná nebo těšně, přímo koresponduje s matematickou strukturou úlohy? Bylo by to lákavé, ale není to tak. Matematická struktura, jak se ji snažíme v tomto textu vyjádřit, je vždy srozumitelná a interpretovatelná jen v souvislosti s textem úlohy. Každá její dílčí triáda je - vzata sama o sobě - potenciálně velmi mnohoznačná a může být sémanticky obsazena velmi různě. Tak některé komplikované matematické struktury se v určitém sémantickém obsazení ukazují pro děti jako poměrně snadné a naopak úloha se strukturou vyjádřenou poměrně jednoduše dělá dětem v některých úlohách velké problémy.

I kdyby se nám nakonec podařilo redukovat sémantiku některých typů úloh na základní predikátory a jejich valence[2], zůstávají pořád ještě další dva problémy. První z nich se týká toho, zda zakreslení struktury má vyjadřovat spíše simultánní, statickou strukturu vazeb, vyjadřujících všechny potenciální vazby členů ve struktuře, nebo se má nějak přizpůsobovat postupu výpočtu. První varianta by vytvořila nepřehledná schémata, v nichž vazby členů jsou vždy vzájemné, přičemž mohou znamenat inverzní početní operace. Druhá varianta klade otázku, nakolik lze strukturu zakreslit ve shodě s aritmetickým zápisem výpočtu. Ukázalo se, že tento zápis není v jednoznačné korespondenci s tím, co rozumíme strukturou. Jednak totiž - podle použití aritmetických zákonů o komutativnosti, asociativnosti a distributivnosti a o preferenci početních operací - může mít různou podobu. Kromě toho nereflektuje vztahy části a celku, které jsou ve struktuře triád důležité, nerozlišuje fiktivní členy od reálných apod.

Dalším problémem je, že některé struktury lze zakreslit v různých podobách i z hlediska dospělého pozorovatele. Např. odpovídá opakovanému nalévání třílitrovým džbánem mnohočetná triáda sčítání nebo jednoduchá triáda násobení? A když obsah každého mnohočetného sčítance - vzniklý pokaždé jiným postupem - bude stát 5 korun, bude tomu odpovídat násobení každého z nich nebo až násobení jejich součtu? V prvním případě dostaneme řadu triád násobení na stejné úrovni a nad nimi nadřazenou triádu součtu peněz za jejich obsah. V druhém případě mnohočetnou triádu součtu a nad ní nadřazenou triádu násobení jejich součtu s cenou. Pak se tedy ukazuje, že v některých úlohách lze nejen variovat postup výpočtu a jeho zápis ekvivalentními variacemi ve shodě s aritmetickými zákony, ale že tyto variace odpovídají různým možnostem reálné strukturace.

To jsou dvě různé věci. Zatímco dále v některých úlohách - zejména „na obvod, obsah, obvod a objem“ ukážeme, jak aritmeticky korektní úprava výpočtu zamlžuje korespondenci se strukturou úlohy, jinde různé možnosti postupu odpovídají různé reálné strukturaci, jak ji děti provádějí. Referovali jsme např. už o úloze, v níž děti měly zjistit počet čtvercových dlaždic s udanými rozměry, které jsou potřeba k vydláždění čtvercové plochy (též zadány rozměry).[3] Byla skupina dětí, která nejprve dělením počítala, kolikrát se strana dlaždice vejde do strany plochy, a pak toto číslo násobila sebou samým. Byly naproti tomu děti, které násobením vypočítaly obsah jedné dlaždice a obsah celé plochy a pak dělily tyto dva obsahy. Pro každého z řešitelů by bylo nutno zakreslit strukturu jinak, aby odpovídala jeho vlastnímu nazírání. Pro dospělého samozřejmá ekvivalence obou strukturací přitom pro děti (řekněme v páté třídě) vůbec samozřejmá není.

Musíme tedy konstatovat, že námi naznačená strukturální schémata jednotlivých typů úloh jsou kompromisem, který je do jisté míry subjektivní a intuitivní, vedený někdy ne zcela explicitně vyjádřenou a dobře formalizovanou zkušeností s dětskými postupy. Měl by však přesto dokázat alespoň přibližně odlišit různou strukturální složitost různých úloh, a na základě tohoto rozlišení, prostřednictvím srovnávání úloh se srovnatelně komplikovanou

[2] Tuto inspiraci čerpáme z Příruční mluvnice češtiny (Kolektiv, Nak1adatelství Lidové Noviny 1996).

[3] Viz naši zprávu za 5. třídu: "Matematické myšlení" v testu Stanford-Binet: Od 2. do 5. třídy. - In: Pražská skupina školní etnografie: 5. třída. Příloha závěrečné zprávy o řešení grantového projektu GA ČR "Žák v měnících se podmínkách současné školy". Praha, leden 2000.

matematickou strukturou, poukázat na složitosti druhé roviny, roviny sémantiky textu.

V oblasti jazykové sémantiky úloh je naším základním cílem pouze prezentovat prostřednictvím znění úloh přehled kontextů, s nimiž se děti setkaly, a to na materiálu těch, které jim byly prokazatelně zadány. Nejčastěji jsme byli jejich zadání přítomni a máme poznámky o dětských reakcích a postupech. V některých případech se dále jedná o úlohy z písemných prací, z nichž pak máme zachycená řešení, byť jsme písemné práci přítomni nebyli. Jen v některých případech jde o texty „pětiminutovek“ či „rozšiřujících příkladů“, jejichž řešení jsme nijak neevidovali a které tedy jen dokreslují sémantické obsahy ve třídě zadávaných úloh. Bylo by samozřejmě možné a žádoucí stejným způsobem analyzovat všechny slovní úlohy, které se vyskytují v dětmi používaných učebnicích, ale to byl v tuto chvíli úkol rozsahem nad naše síly.

Pokusíme se spíše ilustrativně poukázat na některé momenty, které by mohly komplikovat úlohu v sémantické rovině textu:

- Je to pochopitelně sama bohatost daná délkou textu, která může působit čtenářské problémy.
- Často se zmiňují tzv. skryté údaje, které děti nemusí chápat jako údaj o množství (týden = 7 dní, dvouhodinový = trvající 2 hodiny apod.).
- Neobvyklost kontextu samého nebo prostředků jeho vyjádření - dala by se snad převést na neobvyklost lexikografického obsazení, užitých lexikografických prostředků. (Fiktivní příklad: Na zahájení festivalu potvrdili organizátoři 158 akreditací. Na večerním rautu bylo 26 reportérů a 47 fotografů, ostatní byli v tiskovém středisku. Kolik jich tam bylo?)
- K lexikografickým komplikacím patří (už ve zmíněné úloze uplatněné) užití více sémantických ekvivalentů pro tentýž údaj. (V sobotu přišlo 86 diváků, v neděli o 5 více. Kolik jich bylo za celý víkend?) Je však zároveň prostředkem tzv. koreference textu - patří mezi prostředky, jimiž se na různých místech textu odkazuje buď v rámci textu (endoforické odkazování) - typicky např. jde o správné chápání zájmena, které v dalším textu nahrazuje původní označení participantu) nebo dokonce k ukazování mimo text (exoforické).
- Pro děti obtížné mohou být některé méně obvyklé prostředky, vyjadřující vazby participantů. Patří k nim například:

- Je-li posloupnost uspořádání informací v textu jiná, než je chronologie příběhu. (V neděli přišlo 86 diváků, to bylo o 5 více než v sobotu. Kolik jich bylo za oba dny?)

- Jsou-li některé vazby vyjádřeny implicitně, zamlčeně. V sobotu přišlo 86 diváků, o 5 více než v neděli. Kolik jich bylo za oba dny?)

Obecně lze očekávat, že citlivými místy porozumění struktuře textu budou zejména prostředky, jimiž se v jazyce buduje reference a koherence textu.[4] V tomto textu ovšem neaspirujeme na rozbor textů úloh prostřednictvím lingvistických kategorií, byť do budoucna se nám tato možnost jeví jako relevantní a inspirativní.

Za jeden z nejdůležitějších momentů pochopení a řešení úlohy však považujeme právě korespondenci pozic jednotlivých členů a jejich vazeb v matematické struktuře. Již dříve jsme popsali takové problémy zejména ve vztahu k sémantickému obsazení pozic dělence, dělitele a podílu ve struktuře dělení a možnosti vzniku sémanticky prázdných, tedy se sémantikou textu nekorespondujících výpočtů.

[4] Viz již citovanou "Příruèní mluvnici češtiny", s.652 - 656, 681 - 698.

ÚLOHY S JEDNOU TRIÁDOU

Monotriadické úlohy, které v prvních třech ročnících školy převažují, začínají od 4. ročníku ubývat. Používají se především pro uvedení do nových číselných oborů. Přitom ovšem nejde jen o procvičení nových, složitějších receptuálních postupů v početních operacích. Jde tu také o to, aby struktury kontextů (jejich strukturální koncepty) byly reprodukovány jako platné i s novými elementy. Vliv těchto nových elementů (obsahujících v sobě vlastně nové, složitější vztahy v číselném prostoru) totiž může narušit jejich dosavadní, byť třeba dávno ustavenou samozřejmost, nepříznakovost.

Kromě toho jsou také používány při komplikaci zadání ekvivalencí různých slovních výrazů (takové úlohy ovšem řadíme spíše k „logickým“), různých jednotek veličin, různých forem čísel nebo číselných výrazů. V rámci takových úloh je pak akcent právě na tuto ekvivalenci - jejím vnořením do kontextu úlohy se vyvíjí tlak na nepříznakové osvojení. (To je nejspíše hlavní princip „procvičování“ - na rozdíl od pouhého „povídání“, v němž by se ekvivalence třeba verbálně konstatovala jako objekt speciální pozornosti a zůstávala by tak příznaková.)

Už jedna triáda svou povahou vytváří dvě úrovně hierarchického členění kontextu. Opakovaně se pak - vlastně od první třídy - setkáváme s tím, že postup „odzdola nahoru“, od částí k celku, je pro děti snazší než postup, při němž má být při známém celku a jednom elementu jeho struktury - jako hledaný člen triadické struktury - zjištěn druhý element.

Popíšeme obecně struktury odpovídající triádám sčítání/odčítání a násobení/dělení.

Při sčítání/odčítání čísla v zadání reprezentují vždy dva soubory předmětů téže sémantické kvality, téže třídy, s nimiž se provádí operace. Struktura triády vyjadřuje členění celku na dvě části. Při sčítání jde o sémantiku buď toho, jaký celek vytváří sklad částí, nebo jaký nový celek vznikne přidáním známého rozdílu.

Také triáda odčítání má tuto sémantickou dvojznačnost. Hledaný rozdíl má buď status hledané druhé části, známe-li celek a jednu část. Může však mít také status odlišnosti dvou celků. Vyjádřením takové sémantiky je otázka „o kolik“.

Rozdíl tedy může mít status jakési fiktivní kvantity, která sama o sobě má jen potenciální význam něčeho, co může strukturovat nějaké další navazující kontexty, v úloze nezahrnuté. Je pomyslným vkládáním jednoho celku do druhého. Reálný status má rozdíl mezi dvěma celky jen při zvláštním uspořádání, kde se jeden celek reálně stává částí celku druhého.

Násobení/dělení přináší mnohem složitější strukturu:

- Jeden činitel vyjadřuje počet předmětů, ale nikoli sám o sobě, ale vždy vztažen k předmětu jiné kvality, jiné povahy, který první předměty nějak obsahuje, je jejich souborem. První činitel bychom mohli nazvat vztažným členem, jednotkou množství. Je - důsledně vzato - nutně vyjádřen vztažně - jako "ptáci v krmítkách", "děti v lavicích", "tužky na jedno dítě", "týdny za měsíc", "kilometry v hodině". Druhý činitel pak je počtem jednotek, jakýchsi souborů, počtem opakování jednoho souboru v prostoru či čase. Celkový počet (celek, součin) pak vyjadřuje druhou kvalitu, která už byla přítomna v sémantice vztažného členu. Jde tedy o dvě kvality, dvě veličiny, uvedené do vztahu vztažným členem.

V úloze, v níž je třeba vypočítat, kolik jsme utržili, když jsme prodali 60 jablek po 2 korunách (za jedno jablko), je vztažným činitelem, jednotkou, cena 2 Kč/jablko, počtem souborů je počet jablek. Celek jako součin těchto dvou činitelů může být sémanticky obsazen pouze "korunami" - ovšem ve významu "tržby", "utržených peněz", nikoli ceny!

Toto zadání by patrně nepřineslo dětem potíže. Aby mohly dospět k výsledku, stačí identifikovat činitele jako elementy struktury násobení - a to nerozlišeně, jakoby analogicky ke komutativnosti násobení.

Avšak nerozlišení přesné korespondence sémantických členů u dělení, kde je znám celek a hledá se jeden strukturotvorný element, už není možné. Nelze obsadit na místo dělence vztažný člen a na místo dělitele celek.

Vidíme, že vedle matematické operace samotné musí být správně identifikováno obsazení jejích jednotlivých členů. V případě nesprávného obsazení hrozí sémanticky prázdná konstrukce, která neodpovídá nejen kontextu zadání, nýbrž vůbec žádnému potenciálnímu kontextu. Zdá se, že rozpoznání nesprávnosti operace dodatečným ověřením korespondence s textem je pak obtížnější, nesprávnost neexistujícího, nemožného jako by neměla svůj zjevný protiklad.

Mísení sémantiky vztažného členu se sémantikou obou zbývajících počtů (souborů i celku) a jejich záměny vytvářejí situaci, kde sémantika výsledku je jakoby libovolná. Násobením i dělením jablek a korun jako bychom se mohli dostat i k jablkům, i ke korunám.

Ke konfuzi přispívá, když v sémantice vztažného členu není jeho vztažnost explicitně vyjádřena, když není vyjádřeno, že jde o (jednotkové) množství na jeden soubor. Ve znění úlohy výše jsme mohli vynechat ve výrazu „po 2 korunách (za jedno jablko)“ celou část v závorce. Význam výrazu by se tím nezměnil, ale jeho identifikace pro dítě by se stala obtížnější. Také výraz „cena“ se může korektně použít nejen jako „cena za kus“, tedy jako označení vztažného členu, ale také jako „cena za 60 jablek“ - tedy ve významu hledané sumy.

Další nejednoznačností trpí význam samotného slova dělit. V předchozí zprávě[5] jsme referovali o časté chybě i velmi dobrých žáků v úloze, v níž jako mezikrok v chtěli zjistit cenu 1 dkg másla. Věděli, že je třeba „dělit“ - ale velmi často dělili počet dekagramů cenou za něj (tedy sumou, celkem). Ve hře je tu patrně zdání, že je třeba dělit oněch 20 dkg - jakoby rozdělit na dvacet jednotlivých dekagramů a dostat se tak k 1 dkg.

V kapitole o složených úlohách typu úměry zmíníme ještě některé další problémy sémantického obsazení vztažného členu a potažmo triád násobení a dělení.

Problém reálnosti a fiktivnosti členu se zdá u násobení a dělení mnohem naléhavější. Úlohy, kdy vkládání jednotkového množství (tedy vztažného členu) do celku je jen pomyslné, jsou často ještě komplikovány tím, že samotné toto jednotkové množství je pomyslné. Vztažný člen mnohdy představuje pomyslnou strukturaci, jíž v realitě nic konkrétního neodpovídá a dítě je pak zřejmě nuceno držet ji jen příznakově. Srozumitelné nejsou pro děti často ani konvenčně zafixované jednotky. Ve fyzice pak můžeme např. sledovat, jak jednotky hustoty (g/cm^3, kg/m^3) jsou pro některé děti prázdným souslovím a nikoli ekvivalentem hustoty jako vztahu hmotnosti a objemu. Navíc konvenční "jednotka" se s jednotkovým množstvím kryje jen v těch nejjednodušších zadáních. Častěji je vztažný člen (jednotkové množství) v úloze vyjádřeno jako určitý počet konvenčních jednotek. Např. máme-li zjistit, kolikrát naplníme sklenici o objemu 0,3 litru z 1,5litrového džbánu, není tu jednotkovým množstvím ani 1 litr, ani jeden decilitr, nýbrž obsah jedné sklenice, tedy explicitně "množství (deci)litrů vody na 1 sklenici".

Strukturu monotriadických úloh není nutno vyznačovat u jednotlivých úloh, protože v zásadě odpovídá aritmetickému zápisu. Struktura jednotlivých typů vypadá následovně.

Sčítání:	Odčítání - hledání druhé části:	Odčítání - hledání odlišnosti:
A + B = Z	A - B = Z	A - B = z
Z	A	A
↗ ↖	(-) ↘	(-) ↘
A (+) B	B → Z	B → z

[5] Již zmiňovaná zpráva za 5. třídu.

Násobení:	Dělení:
A * B = Z	A : B = Z
Z	A
↗ ↖	(:) ↘
A (*) B	B → Z

Případně bychom mohli vyznačit fiktivnost jednoho strukturotvorného členu - u násobení by pak vyznačené "b" dopovídalo zadání, že něčeho je b-krát více, u dělení by "z" odpovídalo zjišťování, kolikrát je A větší než B (případně B menší než A).

Ve vyznačování struktury značíme písmeny ze začátku abecedy známé členy, písmeny z konce abecedy členy hledané. Velká písmena značí členy, které mají reálný status, malá označují status fiktivní (někdy je však obtížné o tom rozhodnout). Tzv. skryté údaje, implicitně vyjádřené textovými výrazy, značíme jako známé a dáváme je do závorky. Znaménka početních operací zakreslujeme mezi členy, s nimiž se bude pracovat při výpočtu hledaného členu. Dáváme je do závorky čistě kvůli grafickému zvýraznění.

Úlohy na sčítání

(Znění některých úloh, pokud je rekonstruováno jen ze znění terénních poznámek, není úplné.)

4. třída

19.9.97 Tvořit slovní úlohy. Sv. Vít má 299 schodů, sv. Mikuláš 215 schodů, Petřín 199 schodů. Kolik všechny dohromady, *o kolik méně sv. Mikuláš než sv. Vít* apod.

6.2.98 Maminka ukládá od ledna na vkladní knížku každý měsíc 1 000 Kč. Doplň záznamy o spoření. Kolik peněz maminka uložila? (Tabulka pro záznamy o spoření..)

20.2.98

1	3	4	2	5	2

Čísla říkají, kolik kostek je tam nad sebou. Kolik kostek je tam dohromady?

6.4.98 Výstavu Zahrada Čech zhlédlo první den konání 65 148 návštěvníků, druhý den 82 045 návštěvníků, třetí den 61 899 návštěvníků. Kolik návštěvníků zhlédlo výstavu? Zaokrouhli na tisíce.

6.4.98 Opakování úlohy s kostkami z 20.2.98

22.6.98 Vyznač na teploměrech teplotu podle zadání. Teplota [na obrázku -9°, ale trochu nepřesně] vzroste o 12°C.
Teplota [na obrázku +5°, ale trochu nepřesně] klesne o 8°C.

5. třída

4.11.98 Korunovační klenoty a jejich váhy - koruna: 2358 g, žezlo: 1013 g, jablko: 762 g. Kolik by musel držet, kdyby byl králem?

26.5.99 Maminka koupila ovoce za 83,60 Kč a zeleninu za 41,90 Kč. Kolik korun měla před nákupem, jestliže jí zbylo v peněžence 24,50 Kč?

26.5.99 Do obchodu s hračkami dodali stavebnice po 158,- Kč v celkové hodnotě 10270,- Kč a panenky po 365,- Kč v celkové hodnotě 15330,- Kč.
a) Kolik stavebnic dodali do obchodu?
b) Kolik panenek dodali do obchodu?
c) V jaké hodnotě byla celková dodávka?

Úlohy na odčítání

4. třída

19.9.97 Tvořit slovní úlohy. Sv. Vít má 299 schodů, sv. Mikuláš 215 schodů, Petřín 199 schodů. *Kolik všechny dohromady*, o kolik méně sv. Mikuláš než sv. Vít apod.

26.9.97 Karlův most měří 520 metrů. Kolik chybí do 1 km?

26.9.97 Čísla 1-3-5-7 dávají letopočet položení základního kamene (Karlova mostu). Co můžeme vypočítat z letošního letopočtu a 1357?

26.9.97 Stavba sv. Víta (gotická) byla zahájena r. 1344. Co můžeme vypočítat?

26.9.97 Když v r. 1929 skončila dostavba (sv. Víta), slavilo se 1000 let od jeho založení. založení. Kdy byl založena?

29.9.97: Národní divadlo bylo založeno r. 1868. Jak dlouho je od jeho založení? Dostavěno bylo 1881. Jak dlouho se stavělo?

24.10.97 Tok Sázavy je dlouhý 220 km, toku Vltavy má 435km 400m. Urči rozdíl délky těchto řek.

23.1.98 Řidič složil 760 bochníků chleba pro 2 obchody. V prvním obchodě vyložil 345 bochníků chleba. Kolik bochníků veze do druhého obchodu? *Ve kterém obchodě mají více bochníků a o kolik?*

23.2.98 Nejdelší souvislý tunel podzemní dráhy má moskevské metro. Je dlouhý 30,7 km. Nejdelší silniční tunel je ve Švýcarsku, měří 16 320 m. Který z obou tunelů je delší a o kolik m (km)?

23.2.98 Česká koulařka Helena Fibingerová vytvořila 2 světové rekordy. První rekord (1976) měřil 21,99 m, druhý rekord (1977) 23,22 m. O kolik m (cm) svůj rekord Fibingerová vylepšila?

27.5.98 Anička psala domácí úkol od čtvrt na pět do tři čtvrtě na pět. Jak dlouho ho psala?

22.6.98 Vyznač na teploměrech teplotu podle zadání. *Teplota [na obrázku -9°, ale trochu nepřesně] vzroste o 12°C.*
Teplota [na obrázku +5°, ale trochu nepřesně] klesne o 8°C.

22.6.98 Uč. přibližuje Edovi na penězích příklad: Má 100 Kč, potřebuje 1000 Kč. Kolik si musí půjčit?

<table>
<tr><td>Sešity (na psaní), datum.</td><td></td></tr>
<tr><td>Ukazuje jim 20-30 = -10 na modelu "kolik si ode mě musíš půjčit?".</td><td></td></tr>
<tr><td>Podobně 50-90 = -40, 100-250 = -150 (Bořek původně píše -100).</td><td></td></tr>
<tr><td>Pak jim kreslí:
ZÁPORNÁ KLADNÁ
⟵--------------┬----------------------⟶
----|---------------|----------------------|----
-10 0 +25</td><td>Přibližně takhle - viz fieldnotes s. 4. (Tam nemám popsanou nulu, ale asi tam musela být.)</td></tr>
<tr><td>2/60: Teploměry - vyznač teplotu podle zadání.</td><td></td></tr>
<tr><td>Teplota vzrostla o 12 stupňů. -9+12 = ? - Vilík něco "střelil od boku". - Uč.: to je ta tvoje blbá matematika. - Vráťa správně (po zakreslení do teploměru).</td><td>Dotazem u kolegyně jsem dodatečně zjistil, že Vilík řekl "třináct". Vypadá to jako problém s desítkovým šiftem při správném určení jednotek. Ale není to příznak skládankového postupu?[6] Nenarazí děti se skládankami na problém u záporných čísel? Pochopitelně, že Vráťa dojde ke správnému výsledku, když si kreslí postup na teploměru - tenhle model mu vnutí postup v číselné řadě. Kdyby ho používali systematicky dostatečně dlouho, mohli by si ještě při učení záporných čísel koncept pohybu v číselné řadě dodatečně vytvořit.
Učitelka Vilíkovu odpověď nijak nezkoumala, vzala ji jako plácnutí a využila to jako argument pro to, že s matematikou to u něj opravdu není v pořádku. (Vilík pak dostal na vysvědčení z matematiky jedinou dvojku. Je v tom jen jeho nepozornost nebo i způsob počítání?)</td></tr>
<tr><td>Marcel začárává jednotlivé dílky teploměru, ale stejně si není jist výsledkem.</td><td>Jako by se pohyboval na názorné číselné ose, ale nebyl si jist korespondencí tohohle pohybu se slovním zadáním? nebo s příkladem?</td></tr>
</table>

Tzn. ani to, co považujeme výše u Vráti za samozřejmé, zase tak samozřejmé není, když se do hry dostane přechod do záporných čísel? Proč přitom s penězi problémy nemají, proč model dluhu bezproblémově funguje? Funguje tady, ale učitelka ho využila jako svou letitou zkušenost, kterou explicitně zmínila. Má přitom zato, že důvodem je každodenní zkušenost s penězi. Ale není tu ještě nějaký strukturální rozdíl? Mohl by to pak být hezký příklad rozdílných postupů ve školní a neškolní (kulturní) situaci při řešení téhož (nebo zdánlivě

[6] Ke "skládankám" viz naši zprávu za 3. třídu: Sčítání a odčítání dvouciferných čísel. - In: Pražská skupina školní etnografie: 3. třída. Příloha závěrečné zprávy o řešení grantového projektu GA ČR "Žák v měnících se podmínkách současné školy". Praha, leden 1998.

téhož) matematického problému. Možná ho vidíme už v následujícím případě.

70-80 - Lada u tabule: -10	
90-89=1 (Marcel) - Uč.: a kdyby to bylo 90-91? - Marcel: mínus jedna.	*Tady zase Marcel vypadá, že to chápe. Ale možná právě v tom rozlišení, které učitelka vytvořila, kdy se pohybuje v různých směrech od nuly jen o jednu?*
100 - 1000 - Eda - Uč. mu to přibližuje na penězích - ví: 900.	*Tedy že 900 si musí půjčit. Ale to je přesun (v zásadě kladného) počtu od jednoho majitele k jinému, od jedné hromádky na druhou. Eda asi neřeší úlohu 100-1000, ale 100+( )=1000, v níž se pohybuje v oboru kladných čísel.*

Je možné, že tyhle netušené okliky, jimiž se dají řešit některé úlohy jinak, než jak vidí jejich podstatu dospělá matematika, se pak dospělé matematice jeví jako mechanické naučení jednoho typu příkladů. Ve skutečnosti by ale nešlo o mechanické naučení určitého příkladu se zápornými čísly, nýbrž o jeho převedení na jinou logiku, která ovšem při jiném typu příkladu nemusí fungovat. To se pak jeví jako nemožnost aplikace při změněném zadání. Problém by ovšem nespočíval v tom, že se děti něco mechanicky naučí, ale v tom, že používají jinou logiku, než si dospělí myslí. Problém je pak v nalezení takových příkladů či zadání, která opravdu nutně vyžadují použít tu logiku, která na nich má být zavedena či procvičována, která neumožní uchýlit se k logice vývojově či kulturně nižší. To je možná podstata našeho zjištění už z první třídy, že způsob (logika) počítání se přetváří až pod tlakem vyššího typu úloh, přestože potenciálně je obsažena (avšak právě jen jako možnost, nikoli nutnost) v úlohách typu nižšího.

5. třída

21.10.98 Rodina Markova si dělá měsíční rozpočet a vyúčtování. Vypočítej, jaký je rozpočet této rodiny a jaké byly její skutečné výdaje v průběhu jednoho měsíce. [Tabulka s plánovanými a skutečnými výdaji rodiny v 8 položkách - rozdíly zapisovat do sloupců „zbylo“ nebo „chybělo“. Troj- a čtyřciferná čísla.]
Uč.: Jsou v plusu nebo v mínusu?

4.11.98 Seřaď světadíly podle počtu obyvatel. [Tabulka s počty.] Kolik obyvatel žije na všech obydlených světadílech? O kolik obyvatel má Amerika více než Evropa? O kolik obyvatel má Afrika méně než Asie? Využij údaje v tabulce a počítej další úlohy.

4.11.98 Transsibiřská magistrála měří 9 438 km a Bajkalsko-amurská magistrála 3 145 000 m. Která z obou železničních tratí je delší?

16.12.98 Kamarádky Eva a Zuzka pletou šály, které budou dlouhé 140 cm. Eva zatím upletla $\frac{25}{100}$ m a Zuzka $\frac{40}{100}$ m. Kolik cm zbývá každé z děvčat uplést?

3.2.99 Český diskař Ludvík Daněk jako první na světě překonal hranici 65 m výkonem 65,22 m. O kolik m (cm) tuto hranici překonal? (Kolik mu chybělo při jeho předchozím světovém rekordu 64,55 m?

Slávkovi vyšlo 34 cm (aby překonal „tuto hranici“) - počítal 65,22 - 64,55? (ano - ale počítal pod sebe?)	*Dvojitá chyba: jednak anaforické „tuto hranici“ bere jako starý rekord 64,55. (Potvrdil mi pak o přestávce, že porovnával tato dvě čísla.) To udělal i Fanda - ukazuju mu pak v textu, jak „tuto hranici“ odkazuje k předchozímu použití slova: „hranici 65 m“.* *Kromě toho Slávek nějak špatně počítal. Je to chybný rozdíl 55-22? (jak k tomu dospěl, to už nevěděl).*

3.2.99 Nejdelší souvislý tunel podzemní dráhy má moskevské metro. Je dlouhý 30,7 km. Nejdelší silniční tunel je ve Švýcarsku, měří 16 320 m. Který z obou tunelů je delší a o kolik m (km)?

5.5.99 Budeme se různě dlužit. Co si chce koupit Martin: Počítač, k tomu tiskárna. Pak si různě našetří 3000. Kolik má ještě dluh?

5.5.99 Máš dluh 1 000 korun a ještě si 1 500 korun půjčíš. Kolik máš dluh?

Pepík: -1000 - 1500 - 2500 (Po otázce: kolik máš dluh?)	*Sémantika je podle mě zrádná, vůbec ne tak jednoznačná, jak uč. předpokládá, je v tom celý ten maglajs, který vrcholí v podvojném účetnictví: když se zeptám na dluh, pak ten vlastně není záporný. Dluh sám o sobě už je synonymem záporného znaménka: mám dluh 1000 <=> mám -1000.*
Uč.: něco těžšího: *50+(-30) = pak pod vedením uč.: 50-30=20.* *+ a – dává jaké znaménko? - Gita: děleno?*	*Žádná logická dedukce, prostě hádá, jak by mohlo kanonické pravidlo vypadat, a hádá z všech čtyř početních úkonů. Je vidět, jak je pro ni všechno možné - pochybuju, že je za tím nějaká logická úvaha.* *Uč. to korigovala úplně neutrálně.*
70 - (+50) *Uč.: Když plus a mínus dává mínus, co nám bude dávat mínus a plus? - Jindra: plus (!)*	*Další perla, ukazující, že pravidla, která tu uč. formuluje, jsou pro děti zavedena zvenku jako kanonická.*

Tři děti zmíněné v záznamu patří mezi velmi dobré žáky.

5.5.99 Učitelka zadává stav řeky, oni říkají rozdíl oproti normálu (bez znamének).

26.5.99 První kosmonaut, J. A. Gagarin, vyletěl do vesmíru v roce MCMLXI. Kolik je to let?

26.5.99 "Král rybníků" Rožmberk má plochu hladiny 489 ha, hráz je vysoká 12 m. Postavil ho Jakub Krčín v letech MDLXXXIV až MDXC. Jak dlouho se stavěl? (nadbytečné údaje)

6. třída

14.3.00 Vítěz etapy Závodu míru ujel etapu dlouhou 123 km za 3 h 3 min 7 s. Jakou časovou ztrátu na vítěze měl závodník, který etapu ujel za 3 h 10 min 4 s?

Úlohy na násobení

4. třída

12.9.97 Jízdenka z Prahy do Olomouce stojí 100 Kč. Doplň tabulku a zjisti, kolik korun zaplatí každá skupina cestujících? (Použij oba způsoby.)
[Tabulka - doplnit ceny pro 5, 4, 2, 7, 9 cestujících - sčítáním i násobením.]

19.9.97 Jak je vysoká Petřínská rozhledna (60 m). Eiffelka je 5x vyšší - kolik měří?
Jaký je příklad na zadání "Petřín 5x nižší"?

26.9.97 Tvořit úlohy na příklady.
17*4: Bonbóny za 17 Kč pro 4 děti. [Myšleno pro každé z nich.]
6*18: Taška stojí 6 Kč, tašky pro 18 lidí. Kolik to stojí?
5*14: 5 dětí, každé dostane 14 dárečků. Kolik dárečků dostanou?

4.5.98 Jeden svazek osmidílné encyklopedie stojí 326 Kč. Kolik Kč stojí celá encyklopedie? Slávek nejprve 326:8.
Každý svazek encyklopedie má 1296 stran. Kolik stran mají všechny díly?

5. třída

23.9.98 Zkus vytvořit slovní úlohu k vybranému výpočtu.
"14*3": Vilém: Bylo 14 dětí a každé dostalo 3 bonbóny . Kolik bonbónů bylo v bonboniéře?
(Možnost konfuze bonboniéry jako souborového činitele.)

23.9.98 Lada: 18 králíkáren a jen 5 králíků... to nejde.

Lada: "Je 18 králíkáren a jenom 5 králíků... ne, to nejde." - Uč. opravuje na kotce.	*Jde o příklad 5*18. Lada ovšem nezadává sémanticky králíky jako vztažný člen (to by musela říct "a v každé 5 králíků"), nýbrž jako celek ("je jenom 5 králíků"). To by korespondovalo s příkladem na dělení, který by nebyl sémanticky prázdný, ale nesmyslný z toho důvodu, že počet králíků v králíkárně by vyšel v desetinném čísle. (Jí to ovšem jako nesmysl zní možná hlavně z toho důvodu, že vidí, že to není na násobení - není schopna vznést otázku po celku.) Učitelka to korigovala, ale trochu to zároveň zmátla tím, že zaměnila králíkárny za kotce a změnila tak i to, co bylo nepodstatné, totiž vyhovující sémantiku souborového členu. Správně ovšem zadala vztažný člen: v každém bylo 5 králíků.*

Slovní úlohy s jednou triádou násobení byly tedy zadávány na začátku čtvrté i páté třídy, a to často "v obráceném gardu": utvořit úlohu na příklad. Později se občas používaly pro zadání s více než trojcifernými čísly.

Úlohy na dělení

4. třída

19.9.97 Jak je vysoká Petřínská rozhledna (60 m). Eiffelka je 5x vyšší - *kolik měří?*
Jaký je příklad na zadání "Petřín 5x nižší"?

10.10.97 Utvořit úlohu na příklad 91:7.
91 dětí a rozdělit mezi ně 7 pomerančů. Kolik dáme každému? - 13 každému.
Poznámka.

Je to krásná ukázka toho, jak matematická struktura ve strukturálně shodném jazykovém zadání by vnutila tomuto zadání nesmyslnou sémantiku. To se nestane, děti se nedělí mezi pomeranče, sémantika je příliš nepříznaková, než aby se to stalo. Proto se obrátí, ale tím se zruší korespondence počtů.

Problém je v tom, že se tato korespondence narušila hned na počátku:

"rozdělit něco mezi někoho, tzn. kolik každému" se špatně obsadilo čísly: při přiřazení toho, co se má dělit (matematicky dělenec - sémanticky pomeranče) se matematickému dělenci přiřadil sémantický dělitel: 91 dětí. Zbytek pak už doplňuje tuto původní konfuzi: matematickému děliteli je přiřazen sémantický dělenec.

Je to možné proto, že "děti" jsou samy o sobě sémanticky nejednoznačné: mohou být v různých vztazích sémantickým dělencem i dělitelem. Gita mohla vyjít od zadání 91 dětí, ale pak by musela respektovat děti v pozici dělence a zvolit (tomuto implicitnímu syntagmatu) sémanticky přiměřené paradigmatické členy: děti lze dělit do skupin a otázka pak není kolik každému dítěti, ale kolik v každé skupině.

Jak jsou matematické struktury induktivní, jak indukují logiku sémantiky je patrné i v příkladu s Honzou a čarodějem (viz níže ve složených úlohách), ale také ve vtipu "kolik má noha židlí". Toto převrácení sémantické struktury tu učitelka vůbec nepostřehla - prostě proto, že struktura počtů seděla.

17.10.97 Vysvětlování k příkladu "0:3". Máš nic a rozdělíš to třem kamarádům. Co dostaneš?

0:3 - Fanda: nemá řešení.	*Fanda vzápětí aplikoval poučku o dělení nulou na dělení nuly. Učitelka. to vysvětluje, včetně příkladu "máš nic a rozdělíš to třem kamarádům - co dostanou?"* *Ovšem stejnou logiku by mohli použít takhle: Máš 3 a vůbec to nerozdělíš. Kolik budeš mít? Problém je, že to "vyjde" stejně jako při dělení jednou, ale samo to nevypovídá o nemožnosti nulou dělit.*

17.10.97 Kolik kamarádů můžeš podělit 78 ořechy tak, aby každý dostal stejně a žádný ořech nezbyl?

4.5.98 Taneční soubor - tančili po trojicích, čtveřicích, šesti či osmi - bylo jich do 50.
Spíše logická úloha - je třeba kontrolovat 4 podmínky.

4.5.98 Učitelka při ilustračních slovních úlohách v rámci písemného dělení: Máš 4 jabka a 9 kamarádů - kolik každému?

Vanda: 63 468 : 9 *Sepíše 4 a dělí: 4:9 je 2 (je v inverzní triádě). - Uč.:Máš 4 jabka a 9 kamarádů. Kolik dáš každému? - Vanda: 2 - Uč. jí to kreslí. - Vanda už ví, že 2 ne, tak zkouší 3. - Uč.: Jablek máš o hodně méně než kamarádů - můžeš jim dát jedno? - Vanda míní, že může. - Uč.: Bylo by to spravedlivé? Dotlačí ji k odpovědi "nic" a co je "nic" v matematice.*	*Možná, že tohle je příznačná ukázka nesamozřejmosti dělení. Vandě se nezdá nic divného na tom, že by jabka rozdělila kamarádům. Uč. se asi měla ptát, kolik by dostal každý a nechat ji operaci provést. Jenže k tomu neměla připravené ani pomůcky ani dost času. Zavedla místo toho, že jim nemůže takhle dát nic, jabka jí zbydou a musí skočit koupit další, aby je mohla rozdělit spravedlivě.*
Uč.: znovu: kolik je 5:8? - Vanda: 1 - Uč. znovu přes kamarády s jabkama. - Vanda váhavě dochází k nule. - Pak znovu totéž: 6:7. - Vanda už neříká "1", ale s odpovědí "nic" váhá.	*Vanda zjevně přijala učitelčino řešení jako formální a vnucené autoritou - k žádnému "aha" u ní nedošlo, a to - řekl bych - ani co se týče kanonického postupu (receptu) "jak se dělí menší číslo větším".*

červen 98 Kolik knih je v jedné skříni, je-li všech knih 1824 a jsou ve třech skříních?

Úloha byla součástí písemné práce. Z 11 dětí, od nichž ji máme, jediná chyba - numerická.

5. třída

26.5.99 Písařka v kanceláři napíše v průměru 180 písmen za minutu. Za jak dlouho přepíše text, který má přibližně 12 000 písmen?

26.5.99 Do obchodu s hračkami dodali stavebnice po 158,- Kč v celkové hodnotě 10270,- Kč a panenky po 365,- Kč v celkové hodnotě 15330,- Kč.
a) Kolik stavebnic dodali do obchodu?
b) Kolik panenek dodali do obchodu?
c) V jaké hodnotě byla celková dodávka?

Také jednoduchých úloh s jedinou triádou dělení je poměrně málo. Většinou úloha kombinuje několik otázek - např. "kolik zbyde". I tato formulace ukazuje, že v úlohách na dělení se zbytkem jde už o dvě triády, že jsou to nejjednodušší typy složených úloh:

A
↙ ↘
Y + Z
(:) ↘
B → X

Takto zakresleno, je **dělení se zbytkem** strukturou dvou triád. Je komplikováno tím, že zadaný dělitel není v přímém vztahu k celku, a je třeba pro něj nejprve najít dělence, který spolu se zbytkem tento celek tvoří. Struktura tak připomíná jiné zadání, jímž dále ve složených úlohách říkáme rozklad na sčítance s podmínkou - např. že jeden sčítanec má být o 4 větší než druhý. Zde má vlastně jeden ze sčítanců být násobkem zadaného dělitele. Toto zadání je ovšem poměrně složité jen tehdy, pokud se nepoužije písemného dělení. (To řeší receptuálně přesně tento problém, je mechanickým předpisem pro řešení této struktury.) Při řešení zpaměti se využívá toho, že okolí každého (přirozeného) čísla "do 100" je zmapováno z hlediska potenciální příslušnosti k příslušné násobkové řadě. Přestože těchto potenciálních násobků je řada, není pro děti tento úkol ve 4. třídě složitý. Předchází mu totiž už od druhé třídy obrovské úsilí věnované systematickému nacvičování takového přiřazení. Ve třetí třídě už bývá také přímo vnořeno do příkladů na dělení se zbytkem. Proto děti hledané číslo Z rychle identifikují. Později, když násobení a dělení zpaměti není tolik procvičováno a navíc začíná být tolerováno používání kalkulaček, jsme svědky toho, jak přinejmenším některé děti samozřejmost strukturace číselného prostoru prostřednictvím násobkových řad zase postupně ztrácejí. Posílí se ovšem znovu osvojením pravidel dělitelnosti a jejich procvičováním v šesté třídě. (Zatímco první postup strukturace z hlediska dělitelnosti můžeme považovat za kanonický, druhý postup představuje generativní učení, kdy číselný prostor je strukturován či spíše rekonstruován prostřednictvím explicitního gramatického pravidla.)

4. třída

24.10.97 Na plavání se žáci dělí do skupin tak, že jich v jedné musí být aspoň 12. Na kolik skupin se rozdělí vaše třída?

7.11.97 Ve skladu jsou 54 kola na čtyřkolky. Kolik jich lze vyrobit? Kolik kol zbyde?

16.1.98 76 dnů - kolik je to týdnů? (Obměny počtu dní.)

5. třída

20.1.99 Mám 20 Kč, známka stojí 4,60 Kč. Kolik známek mohu nejvíce koupit?
(Nina má potíže, Darina také. Vráťa dobře.)

26.5.99 Jízdenka na lyžařský vlek stojí 8,50 Kč. Kolikrát se Michal sveze, má-li stokorunu? Kolik Kč mu zůstane?

Vidíme, jak v páté třídě jsou tyto úlohy komplikovány především zavedením desetinných čísel.

Další úlohy s kombinací několika otázek představují ty, které uvádějí děti do vztahů představovaných úměrou, za jejíž specifický typ se dají považovat i úlohy "na procenta". Jde opět - důsledně vzato - o složené úlohy, které jsou ovšem prostřednictvím explicitních otázek rozloženy na sérii jednoduchých úloh na násobení a dělení.

4. třída

4.5.98 Týdenní náklady na domácnost jsou 2578 Kč. Jaké jsou průměrné náklady na jeden den (měsíc, rok)?

5. třída

30.9.98 Dám si ušít halenku. 1 halenka - 2 m látky, 2 halenky...?, 3 halenky...?
Bonboniéry: 1 bonboniéra - 40 Kč
Lego: 1 lego - 1000 Kč

27.1.99 50% sleva - kolik to je ze 2000 Kč, ze 4000 Kč?
Jak se vypočítává 1%.

27.1.99 Jak vypočítáme 30%, když víme 1%?
(Martin zkouší: 40:30? 40 a 30? - uč. vysvětluje.)
Pak 60%.

27.1.99 Kde se setkají s procenty. Říkají „veřejné mínění“, „kolik procent tuku“, „na kolik procent je něco hotové“, „úroky“.

26.5.99 Zemědělské družstvo dovezlo za 5 dní do cukrovaru 3155 t cukrové řepy. Kolik tun řepy dovezli průměrně za den? Kolik tun řepy navezli za měsíc (22 pracovních dnů)?
(Rozložení úměry na dvě monotriadické úlohy.)

Konečně případem rozložení vztahů v úměře do preskribované rovnice či soustavy rovnic a v důsledku této prestrukturace do monotriadických úloh na násobení a dělení, jsou také úlohy s veličinami, v nichž je vyčleněn vztažný člen jako samostatná veličina (rychlost, hustota). Probereme je v rámci diskuse o úměře u složených úloh.

SLOŽENÉ SLOVNÍ ÚLOHY

Typickým fenoménem začaly být v hodinách matematiky od čtvrté třídy. Jejich nejjednodušší strukturu odrážejí např. už úlohy na dělení se zbytkem uvedené výše.

```
     A
   ↙ ↘
 Y (+)  Z
    (:) ↘
    B → X
```

Jen variacemi této tříúrovňové struktury se dvěma triádami jsou následující úlohy.

29.9.97 4*15 + 14 =

```
        Y
       ↗ ↖
    Z (+) C
   ↗ ↖
 A (*) B
```

Na letním táboře jsou všechny děti rozděleny do družin. Čtyři družiny mají po 15 dětech a jedna družina má 14 dětí. Nejprv odhadni a potom vypočítej, kolik dětí je na táboře.

3.11.97 15 + 3*15 =

```
      Y
     ↗ ↖
  A (+) Z
       ↗ ↖
     A (*) b
```

V jednom pytli je 15 kg soli, ve druhém třikrát více. Kolik je v obou pytlích?

3.11.97 268 + (268+54) =

```
        Y
       ↗ ↖
    Z (+) C
   ↗ ↖
 A (+) b
```

Za rašelinu dostali David 268 Kč a Adam o 54 Kč více. Kolik mají dohromady?

Tady jde snad o nejsnazší takovou strukturu, protože v obou triádách jde o kontext korespondující se sčítáním

23.1.98	(5-1) * 70 = Y ↗ ↖ Z (*) C ↗ ↖ A (-) 1	Řezání trubky - na 5 částí, každý řez trvá 70 vteřin. Jak dlouho nám to bude trvat? (Nadbytečný údaj o délce trubky "2 metry".)

Komplikací úlohy je nutná zkušenost, že řezů je vždy o 1 méně, než je částí. Bylo by to snad možno přirovnat k úlohám, které dále charakterizujeme jako úlohy s akcentem na sukcesivnost postupu, v nichž nelze zanedbat rozdíl mezi simultánní a sukcesivní strukturací, jak to matematické struktury dělají

6.4.98	37 260 + (37 260-783) = Y ↗ ↖ A (+) Z ↗ ↖ A (-) b	Masokombinát zpracoval 37 260 kg masa a o 783 kg méně uzenin. Kolik masných výrobků celkem zpracovali?
24.4.98	(3425*28)*2 = Y ↗ ↖ Z (*) C ↗ ↖ A (*) B	Kolik kusů broušeného křišťálu bylo třeba připravit na výrobu 28 lustrů do reprezentačního sálu, jestliže 1 lustr je vyzdoben 3 425 kusy broušeného křišťálu? Kolik křišťálových ozdob by bylo třeba na výrobu lustrů do dvou takových sálů?
červen 98	(14*12)*2 = Y ↗ ↖ Z (*) C ↗ ↖ A (*) B	Na první galerii je po 14 sedadlech ve 12 řadách. Na druhé galerii je po 12 sedadlech ve 14 řadách. Kolik diváků je v obou galeriích?

Úloha byla součástí písemné práce. Z 11 dětí, od nichž ji máme, ji 6 řeší správně, 4 dělají početní chybu. 1 neřeší vůbec.

22.6.98	a*b*c = Y ↗ ↖ Z (*) B ↗ ↖ A (*) C	Automobily Forman a Golf se vydaly na cestu po Evropě. Forman měl průměrnou spotřebu benzínu 7 l na 100 km, Golf 6 l na 100 km. Jaké byly náklady na benzín u těchto aut, jestliže 1 l benzínu stál v průměru 1 DM? (Vzdálenosti jednotlivých měst vyhledej v tabulce.) [2 tabulky - jedna se vzdálenostmi, druhá s trasami.]
6.1.99	168,80 + (168,80 + 26,20) = Y ↗ ↖ A (+) Z ↗ ↖ A (+) b	Olga dostala k narozeninám dvě knihy. První stála 168,80 Kč, druhá byla o 26,20 Kč dražší. Kolik korun stály obě knihy?

Úlohy s převahou hledání "části"

Několik dalších úloh se od předchozích liší tím, že - vyjádřeno v grafice schémat - v téže struktuře členů směřují některé šipky dolů. Jinak řečeno, zatímco v předchozích úlohách byl konstruován z částí či strukturujících elementů celek, zde jde o hledání části. Došli jsme k přesvědčení, že úlohy s hledáním části (resp. strukturujících elementů) vytvářejí strukturu kladoucí vyšší nároky na myšlení. Podílí se na tom zřejmě několik skutečností:

Jednou z nich je už výše zmiňovaná sémantická obtížnost dělení.

Dále se zdá, že vytváření celku neklade takové nároky na simultánní strukturaci, na anticipaci celkové struktury. Výsledek každého mezikroku jakoby vede řešitele dál, nabízí se mu další krok, aniž by musel mít příliš přesně diferencovanou představu o dalším postupu. Naproti tomu ve struktuře s převahou hledání části je nutný střídavý pohyb mezi tím, "co mohu vypočítat hned" a "jak to souvisí se strukturou celku" (tedy známého celkového množství). Zvláště ve víceúrovňových strukturách je třeba držet, co jsem vypočítal, v nejasném, jen možném vztahu k celku, vztahu, jehož význam se stává zřejmým nebo se potvrzuje až dalšími kroky. Uprostřed struktury je jakýsi sémantický přeryv, mezera, která musí být zaplněna, zkonstruována nalezením příslušných členů.

V kombinaci s mnohoznačnosti některých sémantických participantů (zejména při dělení), které (resp. jejich počet) mohou v jednom kontextu být vztažným členem (jednotkovým množstvím) a v jiném činitelem souborovým (např. počet chlapců v oddíle = na jeden oddíl vs. počet ořechů na jednoho chlapce), ocitá se navíc řešitel v situaci, kdy musí brát v úvahu obě možnosti a dávat je do vztahu k dalším parciálním kontextům (které mohou vytvářet podobné nejednoznačnosti).

Strukturu s **hledáním části či strukturujícího elementu** vykazují následující úlohy.

21.11.97

(10*12) - (10*5) =

```
        Z = Z
  ↗   ↑    (-)↘
A (*) (C)    Y → X
             ↗ ↖
           A (*) B
```

nebo jednodušeji (12-5) * 10 =

```
   Y
  ↗ ↖
A (*) Z
    ↗ ↖
  (C) (-) B
```

Zahradník koupil 10 sáčků cibulek tulipánů. V každém sáčku byly cibulky jiného druhu. Zahradník chtěl mít pestrý záhon, proto odebral z každého sáčku po pěti cibulkách. Kolik cibulek ještě nevysadil, když v každém sáčku byl původně tucet cibulek? (Uč.: „atypiš“.)

Ve druhém případě sice struktura vypadá jako konstruování celku, ovšem tomuto celku sémanticky odpovídá rozdíl. Zjednodušení struktury tak předpokládá uvědomit si, že celkový počet cibulek k výpočtu nepotřebujeme - tedy poměrně náročný předběžně strukturující předpoklad.

6.2.98

120 : (5-1) =

```
     A
    (:) ↘
    Z → Y
   ↗ ↖
B  (-)  (c)
```

Za 120 min je kmen rozřezán na 5 dílů. Kolik minut trval jeden řez?

13.2.98 150 + 150:10 =

Y
↗ ↖
A (+) Z
↗ ↖
A (:) b

150 - 150:10 =

A
(-) ↘
Z → y
↗ ↖
A (:) b

Sadař sklidil 150 kg jablek. Hrušek sklidil 10krát méně. *Kolik kg hrušek sklidil?*
Kolik jablek a hrušek sklidil?
O kolik kg hrušek sklidil méně než jablek?
(Kiška umí „10krát méně" až na figuře „já mám 100, ty máš 10x méně" - protože 100:10 je 10.
Má potíže i s rozlišením "dohromady" a "o kolik méně" u poslední otázky.)

11.11.98 [(65*24) - 1170] : 65 =

C
↙ (:)
A (-) Z ← B
↘ ↙
Y

24 žáků páté třídy jede na výlet; paní učitelka vybírá od každého 65 Kč. Již vybrala 1170 Kč. Kolik dětí ještě nezaplatilo?

Zakreslená struktura platí při postupu "24 - (1170:65)". Při jiném možném postupu "[(24*65) - 1170] : 65" by jedna triáda přibyla. Ve schématu pak vidíme onu již výše zmíněnou dvojí strukturaci téhož celku - zde jako parciální strukturu.

Z = Z
↗↑ (-) ↘
A(*)B C→Y
(:) ↘
B → X

Výsledky této pětiminutovky máme od 17 dětí. (Chybí 3 velmi dobří žáci a dva slabší.)

Správně má 10 dětí, dále 1 má jen numerickou chybu při násobení.

Darina a Kiška zaměňují ty, co nezaplatili, s těmi co zaplatili (1170:65=18 dětí) - což je ovšem určitá redukce struktury.

Ostatních 6 - překvapivě včetně výborných žáků Fandy a Niny - má nějakou chybu přinejmenším v korespondenci jednoho výpočtu. Pokud přitom jde o úvodní výpočet, neidentifikují pak strukturu ani částečně.

26.5.99 (100 - 16) : 30 =

B
(-) ↘
C → Z
(:) ↘
A → Y

Teta koupila 30 vajec. Platila stokorunou a vrátili jí 16,- Kč. Kolik korun stálo 1 vejce?

26.5.99

a) (750 000 - 250 000) : 4 000 =
(750 000 - 370 000) : 6 000 =
(750 000 - 186 000) : 10 000 =
b) (750 000 - 250 000) : 36 =
(750 000 - 370 000) : 36 =
(750 000 - 186 000) : 36 =

```
 A
(-) ↘
B → Z
   (:) ↘
   C → Y
```

Adamcovi, Bendovi a Cibulkovi si začali v lednu 1997 šetřit na byt v ceně 750 000 Kč. Bendovi měli 250 000,- Kč a šetří 4 000,- Kč měsíčně. Adamcovi měli 370 000 Kč a šetří 6 000,- Kč měsíčně. Cibulkovi měli 186 000 Kč a šetří 10 000,- Kč měsíčně.
a) Zjisti, ve kterém měsíci kterého roku bude mít každá z uvedených rodin ušetřeno na byt.
b) Jakou částku by musely uvedené rodiny měsíčně spořit, aby si mohly koupit byt za 3 roky?

Ve struktuře zde zanedbáváme stanovení konečného měsíce spoření, postihujeme jen "počet měsíců".

7.4.00

A:
(62,5 - 8,75) : 6,8 =
B:
(54,5 - 9,65) : 8,6 =

```
 A
(-) ↘
b → Z
   (:) ↘
   c → Y
```

A: Automobil ujel 62,5 km, cyklista o 8,75 km méně než automobil a chodec ušel 6,8krát méně než ujel cyklista. Vypočti dráhu chodce s přesností na setiny.
B: Hmotnost prvního výrobku je 54,5 kg, druhý výrobek má hmotnost o 9,65 kg nižší. 3. výrobek váží 8,6krát méně než druhý výrobek. S přesností na setiny vypočti hmotnost třetího výrobku.

Písemná práce - psalo ji 19 dětí (chybí 5 dětí - 1 velmi dobrý, 1 průměrný a 3 slabší žáci.

Správně řeší úlohu 8 dětí, dalších 7 má při správném postupu jen drobnější numerické chyby (vesměs při dělení).

Větší numerické chyby má Helena, která chybuje při odčítání i dělení .

Úlohu vůbec neřeší 1.

2 strukturální chyby dvou spíše velmi dobrých žáků považujeme za zdánlivé, resp. za chyby čtenářské: Tak Míťa počítá „auto:cyklista“ - tedy jako by cyklista ujel 8,75krát méně (namísto o 8,75). Bořek počítá „auto : chodec“ namísto „cyklista : chodec“.

Dá se konstatovat, že strukturálně je úloha pro děti triviální, potíže dělají jen početní operace s desetinnými čísly, především dělení.

26.5.99

576 : (62+34) =

```
    C
   (:) ↘
   Z → Y
 ↗ ↖
A (+) B
```

Prodali stejný počet míčů po 62 Kč jako švihadel po 34 Kč. Utržili 576 Kč. Kolik prodali míčů a kolik švihadel?
(Složený dělitel sugeruje, že je třeba hledat dvě čísla.)

2.6.99

50 : (1+3) =

```
    C
   (:) ↘
   Z → Y
 ↗ ↖
A (+) B
```

Michal a jeho tři kamarádi nesou plný pytel cementu. Kolik kg připadá na každého z nich?
Kolik potřebovali písku, jestliže chtěli namíchat suchou betonovou směs, v níž by cement tvořil čtvrtinu (pětinu) celkové hmotnosti?
(Fanda: 50:3 = 160 = 17,6)

Úlohy s dvojí strukturací téhož celku

16.12.98	(9 dl + 6 dl + 3 dl) : 2dl = Z = Z ↗ ↑ ↖ (:) ↘ A(+)B(+)C D→Y	Teta připravila nápoj z 9dl minerálky, 6 dl džusu a 3dl ovocného kompotu. Kolik l(itrů) nápoje připravila? Kolik 2dl sklenic jím mohla naplnit?

Jde o strukturu, ve které jde o dvojí strukturaci téhož celku a kterou lze považovat za pouze dvouúrovňovou. Podobná je další úloha, kde však jde ve druhé strukturaci o dělení se zbytkem a je tedy poněkud složitější.

16.1.98	(31+28+31) : 7 = (zb.) Z = Z ↗ ↑ ↖ ↓ ↘ A(+)B(+)C D(+)Y (:) ↘ X→ V	Doplň (tabulku): čtvrtletí - kolik je v nich a dnů (počet dní jako součet dní v daných měsících) - pak převod na týdny a dny)
23.2.98	(12*5) - (12*5 - 5) = Z = Z ↗ ↑ (-) ↘ a(*) B B→ y	Do města 12x dále než do sousední vesnice, kam je to 5 km. O kolik dále do města? (Martin počítá jako 12-5.)

Poněkud skrytou a také složitější formou dvojí strukturace téhož celku je vlastně i další úloha.

22.6.98	(7-5)*500 </> (Praha - Paříž)*2 , resp. [(7-5)*500] : 2 = Y </> Y ↗ ↖ ↗ ↖ A (*) Z D (*) (E) ↗ ↖ (B) (-) C	Pan Ševčík z Prahy se chystá na týdenní dovolenou autem. Rozhoduje se mezi cestou do Athén, Lisabonu nebo Paříže. Nechce ujet více než 500 km za den, 2 dny nechce cestovat vůbec. Které cílové místo si vybere? [Odkaz na tabulku se vzdálenostmi.]

Úloha obsahuje dva skryté údaje: "týdenní" jako 7 dnů a dále ekvivalenci "jet někam" = "jet tam a zpátky" = "2 x vzdálenost mezi danými místy". U slovesa „cestovat“ zadání předpokládá jeho význam jako synonymum jízdy autem, ale může znamenat také „být na dovolené mimo domov“ vůbec.

Úlohami s dvojí strukturací téhož celku jsou vlastně také **převody některých složených jednotek** a výpočty **aritmetického průměru**.

16.1.98?	40*3600:1000 = Z = Z ↗ ↑ (:) ↘ A (*) (B) (C) →Y	Vítr fouká rychlostí 40 m za sekundu. Kolik je to km za hodinu?

Skryté údaje jsou naučenými přiřazeními jednoduchých jednotek: sekund hodině (B) a kilometrů metrům (C), v nichž je ovšem už vložen kontext jejich vztahu části a celku.

11.5.98	$(a_1+a_2+.....+ a_n) : n =$	Průměrná výška ve třídě - součet údajů od

$$\begin{array}{c} Z \\ \nearrow\nwarrow \\ \Sigma\ (:)\ n \\ \nearrow\quad\nwarrow \\ A_1...+....A_n \end{array}$$

jednotlivých dětí, pak dělí počtem údajů (dětí).

Struktura zjišťování aritmetického průměru je zvláštní tím, že se v ní metaúdaj o počtu údajů objevuje jako číselná hodnota. V ostatních úlohách má počet údajů strukturotvornou roli, ale do vlastního výpočtu nevchází.

14.4.99	aritmetický průměr	průměrná váha ve třídě
14.4.99	aritmetický průměr	průměry z dvojic čísel do dvaceti - Evžen „moc nerozumí“ - chce každé číslo vydělit dvěma.
14.4.99	aritmetický průměr	průměry z trojic čísel do dvaceti (Marcel nedělí písemně: 10, 11, 7 - 3,3; 12, 8 ,7 - 9,3 4, 2, 7 - 4,3)
21.4.99	aritmetický průměr: (125+186+193+460) : 4 =	Knihy stojí 125 Kč, 186 Kč, 193 Kč a 460 Kč. Kolik Kč stojí ∅ kniha?
21.4.99	aritmetický průměr	Průměr známek z matematiky ve třídě, na škole (jako průměr průměrů - nevážený)
21.4.99	aritmetický průměr	Průměr známek ve fiktivní třídě - v jednotlivých předmětech.
21.4.99	Kde se setkali s průměrem.	Průměrný počet obyvatel na jeden byt, kolik se v průměru sní za den, kolik průměrně místa jeden obyvatel na Zemi. [Všechno vztažné veličiny.]
21.4.99	aritmetický průměr	Vypočítat průměrný věk ve své rodině.
14.3.00	aritmetický průměr teplot v průběhu dne (potenciální kolize se speciálním termínem a jemu přiřazenou konstrukcí)	Uč.: průměrná denní teplota - jako součet všech naměřených teplot (v průběhu dne) a vydělit počtem (měření). Spočítat z hodnot v grafu: -8, -4, -2, 0, 1, 3, 7, 5, 0, -6 (Fanda součet jako sečtení bez znamének -myslí, že se 4 kladná a 4 záporná vyruší?)

Úlohy na triády sčítání s podmínkou

13.1.99 (240 - 15) : (2+1) =
triáda sčítání s podmínkou

```
   A
 (-) ↘
B → Z
  ↙ ↘
 Y (+) X
      ↗ ↖
     Y (*) c
```

Jitka a Zuzana měly 240 Kč. 15 Kč utratily za zmrzlinu, za zbytek nakoupily dárky. Jitka utratila dvakrát více než Zuzana.
Jitka utratila: .....
Zuzana utratila: ......

Struktura této úlohy je daleko složitější než úloh následujících - patřila by až k úlohám čtyřúrovňovým. Specifikou těchto zadání součtu s podmínkou je nutnost zvažovat obě části (sčítance) celku simultánně, s respektováním zadaného vztahu. Je-li ovšem tímto zadaným vztahem rozdíl (o tolik a tolik větší či menší), zdá se, že si děti rychle osvojí postup, při němž tento rozdíl dají nejprve z celku stranou, aby zbytek rozdělily napůl a k jedné polovině pak požadovaný rozdíl přidaly. Naproti tomu byl-li zadán jako poměr, patrně si ještě potřebný postup (vzít součet členů poměru jako počet dílů celku, jenž pak umožňuje části konstruovat jako jejich násobky) neosvojily.

Úloha byla součástí písemné práce, kterou máme od všech 24 dětí.

Martin na závěr označuje úlohu za těžkou - ale namítají, že ho dělali ho předevčírem. (To měly "asi 3 děti jedničku".) Je tedy patrně dosti znehodnocena tím, že mnozí zřejmě mohli reprodukovat postup čistě paměťově.

14 dětí má úlohu správně;

1 numerická chyba (Slávek);

1 (Eda) má zřejmě lehkou strukturální chybu (ale po paměťové reprodukci může mít velký význam, může jít o nepochopení);

5 dětí odečítá 240-15, zbytek pak většinou dělí napůl (4 děti - z nich Helena zjevně považuje oněch 112,5 za střed, od něhož jednak půlku odčítá, jednak k němu půlku přičítá) - jen Evžen dělí 225 nějakým jiným postupem (140 a 95 - možná ale také vyvažuje kolem nějakého středu).

2 jen naznačují nějaký způsob dělení 240 (Luděk a Marcel)

Naprosto bez náznaku korespondence je Vanda - jen odčítá 240-15=235, pak s tím ale nepracuje a zřejmě nějak půlí „60“.

20.1.99 (50 -10) : 2 =
triáda sčítání s podmínkou

```
   A
  ↙ ↘
Z (+) Y
     ↗ ↖
    Z (+) b
```

V lovecké družině je 50 pánů. Náhončích je o 10 více než střelců. Kolik je náhončích a kolik střelců?
(Zvládají.)

27.1.99 (26 - 10) : 2 =
triáda sčítání s podmínkou

```
   A
  ↙ ↘
Z (+) Y
     ↗ ↖
    Z (+) b
```

Sourozenci měli 26 ořechů, jeden měl o 10 více. Kolik jeden, druhý.
(9 jedniček ze 17 dětí)

26.5.99	(1126 - 108) : 2 = triáda sčítání s podmínkou A ↙ ↘ Z (+) Y ↗ ↖ Z (+) b	Maminka koupila Honzovi a Daně bundy. Zaplatila za ně 1126 Kč. Kolik korun stála Danina bunda, když byla o 108 Kč levnější než Honzova?
červen 99	(14 - 2) : 2 = triáda sčítání s podmínkou A ↙ ↘ Z (+) Y ↗ ↖ Z (+) b	V tělocvičně cvičilo 14 chlapců a dívek. Dívek bylo o 2 více. Dívky: .... Chlapci: ....

Úloha je z písemné práce, kterou máme od 17 dětí (chybí 7 dětí - 3 velmi dobří žáci, 1 průměrný, 3 slabší).

Řeší správně 12 dětí.

4 chyby spočívají v tom, že berou zadání tak, že chlapců je 14 a dívek o 2 více (Darina, Vilém, Eda, Vanda) - jde tedy spíš o čtenářskou chybu?

Literárně by bylo možno snadno úlohu přepsat do znění: „V tělocvičně cvičilo 14 chlapců a dívek... Dívek, těch bylo o 2 více.“ - Tomu by pak řešení odpovídalo.

Poslední chybující je Nina, která má řešení „9 a 5“ - zjevně jako 14:2, dívek o dvě více: 7+2, chlapců o 2 méně: 7-2. (Běžná chyba nerespektující strukturu v rámci dané množiny, kdy součet musí zůstat týž - tedy dvojitost ubírání a přidávání: když někde jednu uberu, zároveň ji jinam přidám a vzniká rozdíl „o 2“, nikoli „o 1“.)

Složitější struktury

Komplikace struktury větvením

Jde tu o úlohy, jejichž členění lze zakreslit stále jen ve třech úrovních, avšak obsahují přitom 3 - 5 triád. Nejprve uvedeme úlohy s převahou hledání celku.

4.11.97	4256 + (4256:2) + (4256*3) + (4256-2987) = V ↗ ↑ ↑ ↖ A(+) Z (+) Y (+) X ↗↖ ↗↖ ↗↖ A(:) b A(*)c A(-)d	Ve skladě mají 4256 kg pomerančů, mandarinek je 2krát méně, banánů je 3krát méně, citrónů je o 2987 kg méně než pomerančů. Kolik kg ovoce mají celkem?

Písemnou práci máme od 20 dětí, chybí 2 (jeden velmi dobrý, jeden slabší žák).

Správně: 6 dětí

Drobná početní chyba: 4

Menší strukturální chyba: 6 (5x chybí pomeranče, 1x banány), u 2 z nich k tomu i početní chyby.

Velké strukturální chyby či neřeší: 4

Velmi podobnou strukturu mají další úlohy: jde vždy o součet mnohočetných triád, jejichž sčítance jsou zadány rozdílovým či podílovým koeficientem (fiktivním členem) - "o tolik/tolikrát více/méně".

září - říjen 98	4956 + (7*4956) + (7*4956 - 9198) =	Ve skladě mají 4956 q hrušek, jablek je 7krát více, švestek je o 9198 q méně než jablek. Kolik q ovoce mají celkem?
září - říjen 98	4250 + (6*4250) + (4250:2) + 396 =	Ve skladě je 4250 q jablek, hrušek 6krát více než jablek, švestek je 2krát méně než jablek. Ořechů je 396 q. Kolik produktů je celkem? (Čenda: Utržili 32 271 produktů.)
6.1.99	Úloha o číslech: 23,6 + (23,6+6,8) + [23,6+(23,6+6,8)] =	První číslo je 23,6, druhé je o 6,8 větší, třetí je součtem prvních dvou. Jaký je součet všech tří čísel?

Tato úloha patří do úloh o číslech, které zde jinak nezahrnujeme. Struktura, která je obdobná jako u ostatních složených úloh, je obsazena "číselnou" sémantikou. Uvádíme ji zde kvůli pěkné ukázce konfuze struktury kontextu i paradigmatických členů. Konfuze je zřejmě umocněna tím, že verbálním korespondentem členů kontextu je „číslo“:

2/37 Slávek: Vypočítáme tím to třetí číslo. - uč. se to pořád nezdá (nevím, kam míří - vlastně: chce "druhé číslo"). - uč. zavádí pomocný příklad: 10 Kč, já mám o 5 více - konečně ho dotáhne k tomu, že to není "oba dohromady". - Když se vrací k zadání 2/37, Slávek zase tvrdí, že 23,6+6,8 jsou obě čísla dohromady.	*Byla to velká scéna, kde jsem ze začátku nechápal, co se děje, a měl jsem Slávkovu původní formulaci za správnou. Jenže v úloze bylo "první číslo 23,6", "druhé číslo o 6,8 větší" a "kolik obě dohromady" (nevím zda označeno za "třetí číslo", ale uč. pak o něm tak mluvila). Slávek vzal 6,8 jako "druhé číslo". Nebylo to nic nevinného - uč. dobře postřehla (na rozdíl ode mě, kterému to došlo až když začala Slávka pérovat), že narazila na něco podstatného.*

Ani při zavedení pomocného příkladu s korunami Slávek dlouho nechápal, o co jde, a že 5 Kč není suma, kterou uč. "má", ale suma, o kolik má víc. I když pak lehce věděl, že má "15", jakmile se vrátili k tomu, kolik mají dohromady, okamžitě tohle rozčlenění zase neudržel a začal s rozdílem počítat jako se sumou, kterou má jeden z nich.

Mám za to, že je to událost mimořádného významu: Ukazuje, jak i v rámci matematického "kontextu sčítání/odčítání" může dojít ke konfuzím, když jsou v zadání přítomny oba základní korespondující sémantické kontexty: "dát dohromady" a "o tolik více/méně", jak tu dochází k potížím analogickým těm při "násobení/dělení" - potížím s identifikací a korespondencí verbálních členů a členů matematických operací. Tady je to vše ještě komplikováno tím, že tu nejde o dva členy, ale o tři, přičemž první a druhý vůči třetímu jsou ve stejném vztahu jako první a onen explicitní rozdíl 6,8 vůči druhému: tvoří kvantitativně jeho části. Problém s totožností je tu dán také tím, že zadání je metajazykové - jde o čísla: když první číslo je 23,6 a druhé je o 6,8 větší, je oněch 23,6 (které vchází do součtu při hledání druhého) součástí druhého nebo ne? V tomto smyslu je to mnohoznačné a jednoznačnosti to může nabýt jen v jazykovém zadání pracujícím s kontextem reality. Pak měli všechna tři čísla ještě sečíst. To vše pak je ještě umocněno tím, že jde o desetinná čísla..

Přesto má Slávek pořád tendenci se plést a říkat, že "druhé číslo" je 6,8 (a ne 30,4). - Uč. ho musí pořád udržovat v soustředěnosti na právě objevenou či formulovanou diferenci.	

17.2.99	1+2+4+(2*4)+(2*2*4)+(2*2*2*4)+(2*2*2*2*4) =	Máš kabát a na něm 7 kapes. Do první kapsy dáš 1 jablko, do druhé 2, do třetí 4, ... zdvojnásobíš počet jablek u každé kapsy. Kolik jablek bude ve všech kapsách? Jen text - bez záznamu ze třídy.
28.4.99	0,5 + 3*0,5 + 2*0,5 =	Honza se učil matematiku 0,5 hodiny týdně, Ondra třikrát déle než Honza, Lucka dvakrát déle než Ondra. Kolik Hodin strávili týdně nad matematikou? Kolik je to minut?

V dalších úlohách jde o převažující tendenci **hledání části či strukturujícího elementu**.

7.11.97	27 : (2*2) = (zb.) A ↙ ↘ Y (+) Z (:) ↘ X → (V) ↗ ↖ C (*) D	Rozděl 27 ponožek dětem, aby každé mělo 2 páry. Kolik ponožek zbyde?

V porovnání s nejjednodušší strukturou dělení se zbytkem je zde navíc triáda složeného dělitele "dva páry". Tato složenost je však natolik jednoduchá, pro děti samozřejmá, že se nebude příliš lišit od zadání dělitele přímo a dolní triádu bychom nejspíš nemuseli zakreslovat. Zvláštností úlohy je také to, že nepadne explicitní otázka na počet dětí (který však je nutně implicitně ve hře).

11.5.98	48 - (48:6)*4 = A (:) ↘ B → Z (-) ↘ (*) ↘ C → (Y) → X	Karel chtěl rozdělit proužek papíru dlouhý 48 cm na 6 stejných dílů. 4 díly už odstřihl. Kolik cm papírového proužku mu zůstalo zatím vcelku?

Dvě dolní úrovně představují strukturu dvou celků, strukturovaných tímtéž vztažným členem, která je typická pro úměru. Obtížnost úlohy je v tom, že se na vztažný člen (počet centimetrů na jeden díl) neptá. Strukturu by bylo možno explicitovat otázkami: Kolik centimetrů měří jeden díl? Když jeden díl měří 8 cm, kolik měří zbylé (2) díly?

13.10.98	120 = 4*20 + 2*x A (-) ↘ Z → Y ↗ ↘ (:) ↘ B (*) C D → X	Na dvoře bylo dohromady 120 noh zvířat. Čtyřnohých zvířat bylo 20. Kolik bylo dvounohých?

21.10.98 rozdíly troj a čtyřciferných čísel - a rozdíl jejich sum

A_1...(+)...A_n B_1...(+)...B_n
↘ ↙   ↘ ↙
Z   (-)   Y
↘   ↙
X

Rodina Markova si dělá měsíční rozpočet a vyúčtování. Vypočítej, jaký je rozpočet této rodiny na měsíc a jaké byly její skutečné výdaje v průběhu jednoho měsíce. (Učitelka: Byli v plusu nebo v mínusu?)
[Tabulka s plánovanými a skutečnými výdaji rodiny v 8 položkách - rozdíly zapisovat do sloupců „zbylo“ nebo „chybělo“.]

Komplikace struktury vnořováním

Nejprve opět uvádíme úlohy s **převahou konstrukce celku**.

7.11.97 [846 + (846:2) + (846:2+196)] * 9=

V
↗   ↖
X   (*)   D
↗ ↑ ↖
A (+) Z   (+) Y
↗↖   ↗↖
A (:) b   Z (-) c
↗↖
A (:) b

V sobotu bylo v divadle 846 diváků, v neděli jich bylo dvakrát méně než v sobotu. V pondělí jich bylo o 196 více než v neděli. Kolik diváků bylo v divadle ve všech třech dnech? Vstupenka (po slevě) stála 9 Kč, kolik celkem utržili?

Zde máme problém, který jsme už zmiňovali v úvodu. Korektně by bylo možno úlohu vyjádřit uvedenou pětiúrovňovou strukturou. Avšak vzhledem k tomu, že se ve výpočtu pro "diváky v pondělí" (Y) už zjištěný "počet diváků v neděli" (Z) opakuje, odpovídá postupu dětí spíše jen čtyřúrovňová struktura bez opakování celé "nedělní" triády.

21.11.97 [75 + (75-25)] * 50 =

X
↗ ↖
Y (*) C
↗ ↖
A (+) Z
↗ ↖
A (-) B

Auto s vlekem převáželo pytle brambor. V každém pytli bylo 50 kg brambor. Na autě bylo naloženo 75 pytlů, na vleku o 25 pytlů méně. Kolik brambor převáželo auto s vlekem?

15. 1.(?) 98 (147-69)*5 + 69*3 =

V
↗   ↖
Y   (+)   X
↗ ↖   ↗ ↖
C (*) B → Z (*) D
(-) ↗
A

V jídelně je 147 dětí, z toho 69 děvčat. Kolik ovocných knedlíků musí uvařit, když počítají, že každý chlapec sní 5 knedlíků a každé děvče 3 knedlíky?

15. 1.(?) [294 + (294+189)] * 8 =
98

```
        X
      ↗   ↖
    Y  (*)  C
   ↗ ↖
A (+) Z
     ↗ ↖
   A (+) b
```

V sobotu bylo v kině 294 lidí, to bylo o 189 méně než v neděli. Vstupenka stála 8 Kč. Kolik Kč utržili za oba dny?
[opačná chronologie]

Dvě předchozí úlohy byly součástí čtvrtletní písemné práce v pololetí čtvrté třídy. Máme ji od 17 dětí (5 chybí - řekněme 3 velmi dobří žáci, jeden průměrný, jeden slabý).

První úlohu (v písemce značena jako č. 7) řeší správně 10 dětí, další 4 mají jen drobnou numerickou chybu.

Strukturální chyby mají tedy 3 děti.

Evžen místo násobení dělí počty chlapců a děvčat počty knedlíků - jinak je ovšem struktura správně - takže jde vlastně o jedinou chybu v korespondenci syntagmatu „na každého tolik a tolik knedlíků“.

Velké strukturální chyby mají Slávek (chybná korespondence celých dílčích kontextů, resp. už úvodního „147 dětí, z toho 69 děvčat“ - interference s počtem knedlíků na chlapce a syntagmatem „o kolik méně“; kromě toho i numerické chyby),

a Vanda (opět chybně už úvodní kontext - počet chlapců sčítáním „děti + děvčata“; pak jakoby správně počet knedlíků pro chlapce, ale výsledek násobí počtem knedlíků na dívku - zjevně mimo rozpoznání struktury).

Na pohled složitá struktura je tedy dobře zvládnuta. Složitost struktury je zřejmě usnadněna její "symetrií" - zcela analogickými kontexty v obou větvích.

Druhá úloha (v písemce č. 8) se ukazuje jako obtížnější:

Správně ji má 5 dětí (vesměs velmi dobří žáci).

Jen drobnou numerickou chybu má ovšem jeden ze slabších (Eda při sčítání).

Drobné strukturální chyby mají 4 děti: Darina (zapomněla sobotu - násobit i sečíst), Jindra (jako Darina), Fanda (také jako Darina), Denisa (špatně „o kolik“ - v sobotu více).

Jako středně velké (strukturální) chyby se dají označit chyby u 2 dětí: Vandy (špatně „o kolik“, pak zapomněla sobotu), překvapivě Míťa (jako výše Darina, ale i další chyby: špatně údaj ze zadání, špatně formulace zápisu).

Velkých strukturálních chyb se dopouští 5 dětí:

Konzistentní se zdají u Evžena (obráceně syntagma o kolik více, chybná korespondence syntagmatu násobení - dělí počty diváků cenou vstupenky => syntagmatická korespondence, oproti paradigmatické, která je v pořádku?).

Martin (korespondence „o kolik méně“, možná i chybné přiřazení receptuální procedury ; struktura členů „1. den - 2. den“).

Slávek (korespondence „o kolik“, korespondence sčítání interferuje s násobením - tedy mísení dílčích kontextů).

Vráťa („neděle“ jako [(294*8)-189] - tedy korespondence „o kolik“, resp. mísení kontextů?)

Marcel (korespondence „o kolik“) - neřeší.

Lze předpokládat, že syntax s „opačnou chronologií“ se na problémech podílí. Nepřímo pro to svědčí potíže se zápisem, které měly i některé děti, které pak počítaly s adekvátním syntagmatem sčítání.

23.1.98 2678 + 4*2678 + (4*2678 - 3979) =

```
       X
 ↗   ↑    ↖
A (+) Z   (+)  Y
    ↗ ↖     ↗ ↖
  A (:) b   Z (-) c
```

Ve skladě mají 2 678 q hrubé mouky, hladké je 4krát méně než hrubé, polohrubé je o 3 979 q méně než hladké. Kolik q mouky mají celkem? (Povídání, co se z jaké mouky dělá.) (Slávek zapomíná hrubou mouku.)

Podobně jako v úloze o divácích v divadle ze 7.11.97 bychom mohli v předchozí úloze včlenit do triády polohrubé mouky celou předchozí triádu hladké mouky a tím zakreslit ještě další úroveň. Domníváme se však, že to neodpovídá reálnému postupu dětí.

13.2.98 [2176 + (2176+1987)] * 30

```
        X
    ↗    ↖
  Y  (*)  C
 ↗ ↖
A (+) Z
    ↗ ↖
  A (+) b
```

Na OH bylo ve středu 2 176 diváků, to bylo o 1987 méně než ve čtvrtek. Vstupenka stála 30 $. Kolik $ utržili za oba dny? ("Převrácená „chronologie“ údajů - uč.varuje před „slovní hříčkou“).

16.12.98 [408 + (408:12) + (408:12+158)] *5

```
            V
        ↗      ↖
    X       (*)   D
 ↗     ↑     ↖
A  (+)  Z   (+)   Y
     ↗ ↖      ↗ ↖
   A (:) b   Z (+) c
```

Ve sběrně vykoupili první den 408 kg jablek. Druhý den dvanáctkrát méně a třetí den o 158 kg více než druhý den. Kolik Kč zaplatili celkem za jablka, jestliže 1 kg byl za 5 Kč? (Fanda dobře, Jindra a Marcel se tváří suverénně. Slávek a Vanda za pět?, Denisa nestihla. - Tomáš mi o přestávce dodatečně zpaměti reprodukuje zadání i postup!)

20.2.98 (152-87)*7 + 87*5 =

```
               V
          ↗        ↖
      Y    (+)     X
    ↗ ↖          ↗ ↖
  C (*) B →  Z (*) D
         (-) ↗
             A
```

Na táboře bylo 152 dětí, z toho 87 děvčat. Kolik ovocných knedlíků musí uvařit, jestliže počítají, že každý chlapec sní 7 knedlíků a každé děvče 5 knedlíků? (Otázka s podmínkou)

21.10.98 [826 + (826+369)] * 90

```
        X
    ↗    ↖
  Y  (*)  C
 ↗ ↖
A (+) Z
    ↗ ↖
  A (+) b
```

Na výstavě J. Lady bylo v sobotu 826 návštěvníků. To bylo o 369 méně než v neděli. Vstupenka stála 90 Kč. Kolik utržili? („Inverzní chronologie“ syntagmatu „o kolik“. Strukturálně shodná úloha jako v písemce v lednu 98 - s analogickou úspěšností: jen 5 jedniček!)

V dalších úlohách převažuje **hledání části či strukturujícího elementu**.

27.5.98 (180:2) ± 1/3*(180:2) =

```
   A
 (:) ↘
B → Z
     (-) ↘
    Y → X
   ↗ ↖
 X (*)C
```

Petr a Pavel dostali 180 kuliček, o které se spravedlivě rozdělili. Potom Petr obehrál Pavla o třetinu jeho kuliček. Kolik kuliček má nyní Petr a kolik Pavel?
(Vráťa má potíže udržet celkovou strukturu?)

13.1.99 1 000 - [265,40 + (265,40+78,90)] =

```
      C
    (-) ↘
    Y →  X
  ↗ ↖
A (+) Z
     ↗ ↖
    A (+) b
```

Kniha stála 265,40. Druhá byla o 78,90 Kč dražší. Kolik Kč stály obě knihy? Kolik Kč mi vrátili z 1 000 Kč?

Úloha je z písemné práce, kterou máme od všech 24 dětí.

Správně ji řeší 7 dětí.

11 dětí se dopouští jen drobné numerické chyby - z nich 9 při odčítání „1000-609,70“, přičemž 7 z těchto devíti dělá chybu „=391,30“.

1 má více numerických chyb (Helena).

4 děti dělají „menší“ strukturální chybu (Bořek, Slávek, Kiška a Luděk) - vesměs redukují strukturu: po výpočtu ceny druhé knihy už nepočítají s první knihou. (Kiška přitom píše výslovně odpověď "obě knihy stály 344,30 Kč".) Ostatní tři odpovídají pouze na druhou otázku.

Velké strukturální chyby má Evžen. Jednak nepočítá s první knihou, navíc pak odčítá "344,30 -1 000 = 656,70“.

Tedy ve větších problémech je 5 dětí.

5.5.99 100 - [(3*19,80) + 2*x +21,60] = 0,60

```
   C
 (-) ↘
D → X
      (-) ↘
       V   ↘
     ↗ ↑ ↘ ↓
  Z (+) F   Y
 ↗ ↖     (:) ↘
A (*) E   B → U
```

Koupila jsem 3 kg cukru, 2 kg mouky a máslo. Pokladní mi vrátila na 100 Kč 60 haléřů. 1 kg cukru stál 19,80 Kč, máslo 21,60 Kč. Kolik stál 1 kg mouky?

Tuto pětiminutovku máme od 23 dětí, z nich jeden autor je nejistý (Slávek). Chybí písemka Míti (velmi dobrý žák).

5 dětí má úlohu správně;

1 (Vráťa) má správně odpověď, aniž však v předchozích výpočtech explicitně zachází s vrácenou částkou. Není vyloučeno, že poslední krok dělá zpaměti (pak by částku za každý kilogram mouky snížil o polovinu vrácené částky) . (Učitelka zjevně považovala číslo v

odpovědi za opsané.)

2 mají drobnou numerickou chybu (Fanda a nejspíš i Eda, když po odečtení 0,60 pracuje s 99,60.)

1 (Tomáš) má 2 drobné chyby - 1 numerickou, jednou špatně opsal předchozí výsledek.

4 děti mají jednu menší strukturální chybu: Pepík (počítá 2 kg másla místo mouky - dostává se tak ovšem mimo a vůbec úlohu neřeší), Martin (útratu za mouku nedělí 2, ještě drobná numerická chyba při nepovinné zkoušce), Denisa (počítá je s 1 kg cukru, k tomu numerická chyba při 58:2) a Vilém (nepočítá s vrácenou částkou, k tomu početní chyba: 19:2 = 8,50)

8 dětí dělá větší, resp. četnější strukturální chyby (Bořek, Evžen, Luděk, Helena, Jindra, Marcel, Darina a patrně "anonym" Slávek). Potíže jsou s vrácenou částkou (všichni), s dělením částky za mouku dvěma (šlo o 2 kg) (3 z nich), někteří počítají s částkou za cukr jako za 1 kg (4 z nich) - k tomu početní chyby.

2 děti (Vanda, Kiška) dělají velké chyby. Vanda kumuluje předchozí tři zmíněné chyby (počítá 1 kg cukru, nepočítá s vrácenými penězi, nedělí částku za mouku). Kiška po zkusmých gumovaných výpočtech (zřejmě 100-19,80) zapsala nakonec pod sebe „59,40+21,60“, dál už nic.

Takže 9 dětí vypadá, že v zásadě úlohu řeší, nemají se strukturou potíže. Další 4 se jim blíží, úloha je jim dostupná. Proti tomu 10 dětí dělá četnější chyby, z nich 8 by úlohu zřejmě zvládlo při vedení dospělým. Vanda a Kiška se zdají mimo. (To vše ovšem může být momentální konfigurace, výkyvy u jednotlivců na jednu i druhou stranu jsou možné.)

26.5.99 28 600 - [13845 + (13845 - 6 373] = A
13 680 - A =
A D
(-) ↘ (-) ↘
Y → X → U
↗ ↖
B (+) Z
↗ ↖
B (-) c

Vlasákovi měli uspořeno 28 600 Kč. Koupili si televizor za 13 845 Kč a koberec, který byl o 6 373 Kč levnější než televizor. Jaké byly jejich úspory po těchto nákupech? Kolik Kč budou muset ještě uspořit, jestliže si chtějí koupit ještě mikrovlnou troubu za 13 680 Kč?

Úlohy se shodnou strukturací dvou celků. Úměra.

Typická úměra udává v jedné triádě první celek a souborový člen (korespondující s jedním sémantickým participantem, udávajícím, na kolik dále strukturovaných souborů je celek členěn). Tyto údaje pak umožňují zjistit vztažný člen (udávající množství druhého sémantického participantu v jednom souboru). Prostřednictví vztažného členu je pak strukturován druhý celek. U toho je udán jeden ze dvou zbývajících členů (celek nebo počet souborů) a žádá se zjistit člen zbývající.

Jde tedy o operace v takovéto struktuře:

1. celek 2. celek
(:) ↘ ↗ ↑↓
počet → jednotka → počet
jednotek jednotek

Jak jsme viděli výše, jsou jako úvodní úlohy k úměře zaváděny takové, v nichž je počet souborů v prvním celku roven jedné a je tím rovnou dán vztažný člen, který není třeba počítat. Úlohy se tak mění v úlohy na násobení.

30.9.98:

Dám si ušít halenku: *1 h .... 2 m (látky)* *2 h .... 4 m* *3 h .... 6 m* *Uč.: "Tři už by mně úplně stačily."*	*Kladu si otázku, zda prezentace i věta učitelky nejsou matoucí. V úměře totiž nejde primárně o to, že čím víc halenek, tím víc metrů (a už vůbec o to, kolik nám stačí). Primární fór úměry je v tom, že nevím, kolik na jednu halenku, že to vím třeba pro 7 halenek a tážu se po 2. Takhle se dětem úměra jeví jen jako spousta nových (zbytečných) slov pro triviálně známou řadu násobků.*

V úlohách, které zaznamenáváme dále, jde už reálně o analogickou strukturaci dvou celků. Přesto jsou ovšem některé explicitní otázkou po vztažném členu rozkládány de facto na dvě monotriadické úlohy.

23.3.98	(240:3) * 8 = úměra B Y (:) ↘ ↗ ↖ A → Z (*) C	Ze 3 kg drátu 240 kroužků - kolik z 8 kg? Jakou hmotnost má 1 kroužek? (Uč.:„Jakej moment pro nás bude důležitej? kilogram, tři kila nebo vosum?“)
4.5.98	(2578:7) = x; x * 30, x* 365 (kvaziúměra) B Y (:) ↘ ↗ ↖ (A)→ Z ; Z (*) (C)	Týdenní náklady na domácnost jsou 2578 Kč. Kolik na den (měsíc, rok)?
21.10.98	úměra: 6:72 = 2:x B Y (:) ↘ ↗ ↖ A → Z (*) C Porovnání výsledného Y s 20 Kč nezahrnujeme.	6 šálků stojí 72 Kč. Bude mu stačit 20 Kč, když chce koupit 2 šálky?

11/57 - Luděk: pomalu čte, 2 původně jako "dvě", přestože jde o šálky.	*Uč. to komentuje, že má čtení na úrovni druhé třídy.*
Luděk k tabuli: *š ..... 6* *uč. mu to opravuje na :* *6 š ..... 72* *2 š (uč.: víme to?) .... x*	*6 šálků stojí 72 Kč, bude mu stačit 20 Kč, když chce sestře k narozeninám koupit 2 šálky?*
Uč.: Co vypočítá? - L: 6:72 - Uč.: Co tím vypočítá? - L: Kolik stojí 4 šálky.	*Uč. se nejeví, asi je u Luďka připravena na leccos.*

6:72 - sleduje tahle posloupnost (v rámci správné triády násobení) posloupnost členů ve verbálním zadání? Další postup jako by napovídal, že Luděk potřebuje nějak rozdělit šálky - oddělit z těch šesti ony dva, které chce koupit. Neodpovídá pro něj tedy tohle dělení oddělení dvou šálků? To ovšem možná začíná platit až ve chvíli, kdy je učitelčinou otázkou nucen hledat pro svůj zkusmý příklad korespondující sémantický význam.

Původní dělení je možná výsledkem jiných intuitivních postupů: Když se vychází od šesti šálků a chceme jich méně (2), tak se dělí. Je tu možná jakási intuitivní analogie mezi násobením a sčítáním (jak se dostat od menšího čísla k většímu) a dělením a odčítáním (od většího k menšímu). Možná, že kdyby otázka zněla po ceně např. osmi šálků, že by Luděk násobil?

<table>
<tr><td>Uč. Co musíme vypočítat? - Luděk neví - Uč. kreslí 6 čárek: | | | | | |
-----v----
72 Kč</td><td>Pod 6 čárkami dělá svorku a pod ní píše 72 Kč.</td></tr>
<tr><td>Uč.: Co by bylo dobré vypočítat? - L: 2 šálky</td><td>Tady už uč. rezignuje a ptá se ostatních.</td></tr>
<tr><td>Vráťa: 72:6 - uč.: co vypočítáš? - V: Kolik stál jeden šálek.</td><td>Někde jsem se všiml - už vím: u řešení konví v S-B - že Vráťa byl schopen explicitně diferencovat korespondující členy matematického a jazykového kontextu. Tady to ukazuje, když dobře chápe, že uč. se ptá na korespondující verbální výraz.</td></tr>
<tr><td>Luděk počítá (pod sebe).</td><td>Uč. ho nechává, když si (myslím spontánně) dělí 72:6 pod sebe, ačkoli např. posledně procvičovali řadu takovýchhle příkladů (a se zbytkem!) zpaměti.</td></tr>
<tr><td>Uč.: My se ptáme na 2 hrnky. - Luděk: dvakrát víc. 2*12... třicet... ne, 24.</td><td>Tady Luděk bez zaváhání korespondenci vidí. Ve hře jsou dvě věci: Jednak jde o násobení, jednak je tu explicitní zadání vztažného členu. Ale navíc to ještě může usnadňovat souborový činitel "2", který je speciálně snadný.</td></tr>
</table>

Proč je snadný? Protože je členem sémanticky familiárních syntagmat půlení a zdvojnásobení, která jsou běžnou součástí jazykové sémantiky. Aby se násobení dvěma stalo skutečně násobením, musí se vřadit do matematického kontextu, do kontextu násobení a ukázat tedy v paradigmatickém řetězci s násobením třemi, pěti, osmi... Jinak zůstává speciální separovanou operací.

*Ve 2*12=30: předvádí tu Luděk záměnu "dvanáct" a "patnáct"? Vychází z naučených příkladů, v nichž je nepříznaková sluchová podoba?*

4.11.98	úměra: 6:420 = 2:x B Y (:) ↘ ↗ ↖ A → Z (*) C	Honza kupoval šálky na kávu. Za 6 šálků 420 Kč. Kolik by zaplatil za 2 šálky? Stačilo by mu 150 Kč? - (Eda správně.)
26.5.99	(90:5)*3:2 = úměra. B Y = Y (:) ↘ ↗ ↑ (:) ↘ A → Z (*)D C→ X	Na podzim stálo 5 kg jablek 90 Kč. V zimě měly 2 kg těchto jablek takovou cenu, jako 3 kg na podzim. Kolik korun stál v zimě 1 kg jablek? [Ekvivalent „5 kg za 90 Kč = cena na podzim“. Ekvivalentní strukturace dvou celků prostřednictvím ceny za kg, pak dvojí strukturace téhož celku: rovnovážná soustava.]
červen 99	úměra: 125:10 = x : 1000 A Y (:) ↘ ↗ ↖ B → Z (*) C	Ze 125 kg mléka se vyrobí 10 kg másla. Kolik mléka je třeba na výrobu 1000 kg másla?

Úloha je z písemné práce, kterou máme od 17 dětí (chybí 7 dětí - 3 velmi dobří žáci, 1 průměrný, 3 slabší).

Úlohu řeší správně 9 dětí.

Chyby jsou trojího druhu:

1. Vznikající výpočtem přes 1 kg:

1.1. Nesprávné a nežádoucí zaokrouhlení množství mléka na 1 kg másla (125:10 = 12). Násobení poté nedává správný výsledek: 12*1000 = 12 000.

(Martin, Darina)

1.2. Početní chyba při násobení: Pepík násobí pod sebe 100 * 12,5 a dělá při tom chybu.

2. K výchozímu množství mléka ze zadání se připisují tři nuly, násobí se tedy tisícem (přímo udaným množstvím, nikoli poměrem obou množství z úměry). (Denisa, Eda, Nina, Vanda)

Ojedinělou a nejednoznačnou chybu udělal Slávek: „2 500“ (bez výpočtu, rovnou odpověď) může být pouhým přepsáním, nebo za ním je neadekvátní zkusmý výpočet (např. 125*2*10).

Oba typy chyb mohou znamenat strukturální nepochopení vztahů v úměře, druhý typ chyby se zdá indikovat takové nepochopení pravděpodobněji. (Naopak Pepíkovi je skoro jistě struktura jasná.)

17.6.99	dráha - rychlost - čas $s_P = v_P * [(s_P - s_L) : (v_P - v_L)]$ též jako úměra	Pes se rozběhl za liškou vzdálenou 30 m. Skoky psa byly 2 m dlouhé, skoky lišky 1 m dlouhé. Zatímco pes udělal 2 skoky, liška udělala 3 skoky. Jak velkou vzdálenost uběhl pes, než dohonil lišku? [Jednotka času vyjádřena prostřednictvím rozdílné rychlosti Rychlost i čas nevyjádřeny, skryty v sémantice textu.] (Chyby: všichni, jen Jindra má patrně 3 body za nějak částečné řešení?]

Poslední úloha, se kterou se děti setkaly při přijímacích zkouškách do matematické třídy, je patrně velmi obtížná, pokud by z jejích údajů měly děti dosazovat do rovnic o dráze, rychlosti a času. (Uvádíme řešení ke kterému jsme touto cestou dospěli a které slovně vyjádřeno by znělo: poměr rozdílu drah a rozdílu rychlostí násobený rychlostí psa, přičemž rychlosti jsou vyjádřeny v metrech za neurčitou jednotku času, definovanou pouze shodností pro psa i pro lišku (oním časovým úsekem, za který udělá pes dva a liška tři skoky).

Pochybujeme, že je takové řešení dětem na konci páté třídy dostupné a domníváme se, že správné řešení, které jsme viděli od žáka z jiné třídy, je intuitivní. (V naší třídě neřešila úlohu většina z 15 dětí, které se zkoušek zúčastnily, možná dokonce nikdo - nejisti jsme si u dvou chlapců.) Vyžaduje přeformulovat úlohu právě do vztahů úměry: Dvěma skoky snížil pes rozdíl o 1 metr, kolika skoky jej sníží o 30 metrů? Nebo ještě lépe: Na jeden metr rozdílu potřebuje pes 2 skoky, kolik potřebuje na 30 metrů? A kolik metrů přitom urazí, když jeden skok má dva metry? I tak zůstává struktura složena jednak z "kvaziúměry" (protože je tu vztažný člen zadán přímo, resp. kryje se s prvním celkem: 2 skoky na jeden metr, a hledá se druhý celek skoků pro 30 takových souborů. Druhý celek je pak třeba redefinovat, restrukturovat zcela opačnou "jednotkou" (vztažným členem): 2 metry na jeden skok!

Použitá struktura údajů "dva skoky a každý dva metry" na jedné straně usnadňuje intuitivní řešení, protože jde o velmi snadnou triádu, na druhé straně mate identifikaci vztahů a zvyšuje pravděpodobnost, že správné řešení bude náhodné, že "vynásobit to dvěma" má pro dítě nezřetelnou či neadekvátní korespondenci.

Na úloze je ovšem dobře vidět, jaké potíže máme, když chceme formulovat pozice členů v jednotlivých triádách, když chceme formulovat adekvátní sémantické vyjádření toho, co jednotlivými výpočty zjišťujeme, obecně řečeno celou sémantickou mnohoznačnost vztahů úměry, zejména sémantickou relativitu vztažného členu.

Vezměme triviální zadání dvou členů: 7 dětí a 35 koláčů. Znění úlohy i korespondence členů se zdají jednoznačné či nanejvýš dvojznačné podle toho, je-li 35 koláčů celkem (pak mají dohromady 35 koláčů - můžeme se např. ptát, kolik dostane každý či kolik v průměru každý upekl) nebo vztažným členem (pak je zadání "na jedno dítě 35 koláčů" - s jakýmkoli dalším sémanticky přijatelným dotvořením úlohy, které toto respektuje). Nezdá se ale možné konstruovat člen "kolik dětí na jeden koláč".

Vezměme však jiné znění úměry: Z 12 stromů sklidíme švestek na 600 kompotů.

Nejspíše se nabízí otázka typu: Kolik kompotů uděláme ze sklizně z 8 stromů? Tedy zajímá nás vztažný člen "počet kompotů na jeden strom" -> pak z 8 stromů 8x více.

Je opačný vztah participantů ve vztažném členu nesmyslný? Může nás zajímat "kolik stromů na jeden kompot"? Na první pohled snad podivná formulace nabývá okamžitě na smyslu, bude-li otázka v předchozí úloze znít: Kolik stromů nám stačí pěstovat, abychom měli po sklizni zásobu 420 kompotů?

Tedy i forma vztažného členu je relativní, je determinována až zněním otázky. A to jsme zatím nevzali v úvahu nepřímou úměrnost:

5 traktorů zorá pole za 2 dny. Co je tu celek, co počet souborů, jak vypadá vztažný člen?

A) Kolik traktorů zorá pole za 4 dny? Zajímá nás "počet traktorů na den" -> na 4 dny potřebujeme 4x méně traktorů.

B) Kolik dnů to bude trvat 3 traktorům? Zajímá nás počet dní na 1 traktor - 3 traktorům to bude trvat 3x méně.

Úlohy využívající v zadání pojmy dráhy, rychlosti a času (či jejich synonymní výrazy) mohou mít dvojí podobu. V úloze "Když za 3 hodiny ujede vlak 150 km, kolik ujede za 5 hodin?" nijak nepotřebujeme pojem rychlosti. Je to klasická formulace přímé úměry. Přesto by děti při výpočtu možná pojem rychlosti použily, protože k němu dojdou při výpočtu vztažného členu: kolik km ujede vlak za jednu hodinu. Tady by některé děti (v 6. třídě pod vlivem látky z fyziky asi už většina) zcela samozřejmě považovaly výpočet za "rychlost", jiné by možná měly "aha" zážitek, pro některé (v šesté třídě patrně zcela výjimečně) by zjištěné číslo zůstalo nespojeno s pojmem rychlost.

Stejnou formu úměry má úloha, když ji změníme takto: "... za jak dlouho ujede 250 km?" Apriorní pojem rychlosti tu najednou věc komplikuje. Pro řešení úměry potřebujeme vztažný člen "počet hodin na 1 km". Při jeho formulaci je logika vztahů v úměře zřejmá. Vypočítáme-li však nabízející se "rychlost", ocitáme se ve slepé uličce. Tu pak lze řešit prostřednictvím rovnic o rychlosti, dráze a času. Máme-li je k dispozici, pak víme, že pro čas je rovnice $t = s/v$. Dráha $\underline{s}$, je zadána přímo, rychlost $\underline{v}$ jsme zjistili předchozím výpočtem, zbývá dosadit.

Rovnice o dráze, času a rychlosti (a stejně tak o hmotnosti, objemu a hustotě) jsou tedy rekonstrukcí vztahů úměry, v níž je namísto dvojí možné podoby vztažného členu (resp. jeho determinace sémantikou otázky) jedna z jeho možných forem ("množství dráhy na jednotku času") postulována jako fyzikální veličina. Trojitá rovnice (pro dospělé stále jedna a tatáž, pro děti v šesté třídě snad bez výjimky tři různé rovnice) pak umožňuje druhou podobu vztažného členu nebrat v úvahu. Tím se zřejmě zároveň redukuje výše ilustrovaná sémantická komplikovanost úloh na úměru. Také matematická struktura zadání je převedena na jednoduchou triádu násobení či dělení nebo jejich posloupnost. Zároveň se tak umožňuje řešit úlohy složitější, které např. pracují s více různě strukturovanými celky a ekvivalencí jejich jednotlivých parametrů. S těmi se děti do konce 6. třídy zřejmě nesetkaly. Z úloh uvedených níže odpovídá jim odpovídá jediná - úloha z 15. 2 . 2000 o hmotnosti stejně velkých tyčinek z olova a oceli. Jen u ní uvedeme strukturální schéma, odpovídající dvojí strukturaci téhož celku.

Restrukturace úměry rovnicemi

15.2.00	V = 326 * 917 násobení	m = 326 kg, ρ = hustota ledu = 917 kg/m3 (Co máme spočítat? - Vráťa: Máme vydělit... Pepík nevěděl u výsledku jednotky.)
15.2.00	m = V : ρ dělení	Dubový kmen 3,7m^3 (a tentýž smrkový) ρ_S = 650 (- čeho? - Kiška: kilometrů krychlových... ne... kilogramů krychlových. Jednotka jí nedává žádný smysl.) ρ_D = 700 kg/m^3 Který kmen má větší hmotnost. „falešná“ či „odborně nekorektní“ synonyma: „dubové dřevo má větší hmotnost“.

Uč.: Z čeho se dalo usuzovat, že hmotnost dubového vyjde víc? - Martin: že už tam bylo větší (ukazuje nezřetelně k tabuli) - uč.: co to je? - M: ró - uč.: jaká je to veličina? - M: hmotnost - uč.: dubové dřevo má větší hmotnost.	*Myslel jsem původně, že uč. míří k obecně známému atributu dubového dřeva jako tvrdého, těžkého. Z toho, že dubové dřevo se bere za oproti ostatním za "těžké" je patrné, že hustota je prostřednictvím tohoto atributu v obecném jazyce ve falešné synonymnosti s váhou či hmotností.*

Obecný jazyk formuluje taková synonyma či ekvivalenci veličin s implicitní, zamlčenou podmínkou "stejnosti" třetí veličiny, nebo případně i bez ní - jako metaforu. Tak televizní komentátoři říkají, že obránce "byl rychlejší" jako synonymum toho, že byl u míče dříve, a to i v situaci, kdy měl k míči mnohem blíže a útočník běžel ve skutečnosti rychleji.

15.2.00	$m*(\rho_1) : \rho_2$ dvojí struktura téhož celku? Spíš dvojí strukturace dvou celků (tyčinek) se shodným parametrem (objemu) - rovnovážná soustava V = V ↗ ↑ (:) ↘ m_1 (*) (ρ_1) ρ_2 → m_2	Olověná tyčinka má hmotnost 57 g. Jakou hmotnost má stejně veliká ocelová tyčinka?

Úloha je ukázkou sémantické obtížnosti při kumulaci skrytých údajů a předpokládaných ekvivalencí: skryté údaje (hustoty), „ocel“ jako „železo“, „stejná velikost“ jako stejný objem vytvářejí zdánlivě neobsazené členy triád.

Příklad "na jedničku" - 150/26	
Olověná tyčinka má hmotnost 57 g. Jakou hmotnost má stejně veliká ocelová tyčinka?	
Sami - ale říkají si předem postup.	*Uč. s nimi probírá, zda znají objem tyčinky a nějak je vede - ale jen vlastně dělají evidenci kroků postupu bez číselného obsazení. Pak sami.* *Je to složitá struktura, se dvěma triádami, přičemž zdánlivě je tu jen jeden explicitní člen. Musí si uvědomit, že v obou parciálních*

	kontextech je jeden člen zadán nepřímo jako materiál a možnost k němu najít hustotu v tabulce. Kdyby nebyl kontext "úloh na hustotu" jasně předem vyznačen, byla by to možná extrémně obtížná úloha. Ve druhém kontextu ("ocelová tyčinka") je pak i druhý člen vyjádřen sémanticky nepřímo jako "stejně veliká". Je to dokonce vyjádření nepřesné, protože "velikost" není žádná veličina a kdyby za synonymní výraz považovali délku, bylo by to sémanticky korektní a přitom by tu řešení nebylo možné. Teprve při identifikaci nadřazeného kontextu "hustota - objem - hmotnost" (má hustota nějaký konkurující kontext? - v elektrice asi ano?) je synonymem "velikosti" "objem".
Uč. opravuje písemky a říká známky.	
Kluci jsou na rozpacích ze zadání, kde je "ocel". - Vilík se mě ptá, že ji nemají v tabulce. Radím mu železo.	*Ještě navíc tahle komplikace. Musí vtáhnout do hry navíc řadu implicitních předpokladů, aby to vyřešili: tady zas vědět, že ocel je železo. Kluci (Vilík a Pepa) - dost orientovaně mysleli, že ocel je slitina železa s něčím. Vysvětluju jim, že jen do ušlechtilých ocelí se něco málo přidává, ale v zásadě je to železo. Nabádám je, ať se zeptají učitelky, jestli to tak mají vzít.*
Odevzdali jen Gita s Fandou, pak ještě Vilík. (A Pepa?)	*Pepa šel po limitu, který uč. dala, ale uč. ho ještě vzala. Všichni to asi měli správně.* *Je tedy patrné, že i poté, co se řekl postup, řešili úlohu jen nejlepší. Fakt si autoři sbírky myslí, že tohle je standardní úloha pro šesťáky? I když myslela si to možná spíš učitelka. Dala záměrně těžkou, když je to na jedničku*
Eda říká, že to udělá až doma, že si vůbec neví rady.	*Bodejť.*

14.3.00 6. A	hmotnost - objem - hustota: ρ = m*V násobení	Vypočítejte hustotu kamene, je-li jeho hmotnost 135g a objem 50 cm^3.
14.3.00	hmotnost - objem - hustota: m = (ρ)*V	Objem vody v sudu je 200 dm^3. Urči hmotnost v kilogramech. [Uč.: znáte hustotu vody? - Mohou se podívat. - Pak ještě: hustotu jsi zjistil.... (nechává říct údaj). Pavel má potíže (nesedí mu nabiflovaný příklad?), špatně hustota vody (700), špatné přiřazení jednotek.]

ÚLOHY S GEOMETRICKÝMI ÚTVARY

Četnost úloh, v nichž byl nějak zakomponován obvod či obsah čtverce a obdélníka a později také objem a povrch krychle a kvádru, tvořily zejména v 6. třídě jednu z důležitých oblastí učiva.

Proberme nejprve, jakou strukturu mají jejich výpočty.

Obvod čtverce lze zobrazit dvojí schematizací odpovídající dvojí možnosti aritmetického zápisu.

```
o = a + a + a + a        o = 4* a
          Z                   Z
 ↗  ↑    ↑  ↖            ↗ ↖
A (+)A (+)A (+)A       A (*) B
```

Více variant má obvod obdélníka.

```
o = a+b+a+b             o = 2*a + 2*b        o = 2 * (a + b)
        Z                         X                         X
 ↗  ↑    ↑  ↖                 ↗        ↖                ↗        ↖
A (+)B (+)A (+)B            Z    (+)    Y              Z    (*)    C
                          ↗ ↖        ↗ ↖        ↗ ↖
                        A (*) B   A (*) B   A (+) B
```

Můžeme sledovat, jak se úpravou vzorce směřující k jeho zjednodušení stává složitější jeho struktura.

Obsah čtverce a obdélníka ovšem mají formu jednoduché triády násobení.

```
S = a * a        S = a * b
   Z                  Z
 ↗ ↖               ↗ ↖
A (*) A          A (*) B
```

Sémantická korespondence s konceptem obrazce je zřejmě komplikována tím, že strany jsou čtyři, ale u čtverce se zavádí pouze jedna jako čtverné označení, u obdélníka pa dvě dvojitá. Předčasná "racionálnost" tohoto značení může - podobně jako racionální podoba upraveného vzorce - zakrýt pro dítě korespondenci mezi aritmetickým vzorcem a strukturou geometrického útvaru. Opakovaně se přesvědčujeme, že pro obsah to platí dvojnásob, že korespondence mezi obsahem obrazce jakožto členěného potenciální čtvercovou sítí měrných jednotek a mezi operací násobení stran zůstává dětem skryta nebo je zvládnuta jen příznakově.

Také objem krychle a kvádru je strukturálně podobný:

```
V = a * a * a   V = a * b * c
        Y                 Y
      ↗ ↖              ↗ ↖
   Z  (*) A          Z  (*) C
 ↗ ↖               ↗ ↖
A (*) A          A (*) B
```

Chápeme-li objem v souvislosti s jeho neverbální sémantikou, jeho strukturálním konceptem jakožto geometricky ohraničeného prostoru, lze jej prostřednictvím tří stran strukturovat libovolně. Nezáleží na tom, kterou stěnu vezmeme jako výchozí (řekněme "podstavu"). Stejně tak při strukturaci této podstavy nezáleží na tom, která strana je vzata jako počet pomyslných pruhů a která udává jejich délku (počet fixních jednotek měření). Výsledkem je tatáž strukturace na pomyslné krychličky. S tou zřejmě musí schéma výpočtu objemu korespondovat, pokud nemá být mechanickou reprodukcí vzorce.

Objem krychle stejně jako kvádru je v sukcesivní strukturaci, pomyslně sledující konstrukci tělesa nebo jeho členění, vždy tříúrovňová struktura dvou triád. Avšak ve vzorci je prezentována simultánní struktura jakoby dvouúrovňová, která je ovšem zkratkou, zobecněním všech tří možností trojúrovňového členění. Pro řadu dětí v 6. třídě patrně zůstává jeho struktura skryta.

Strukturu výpočtu povrchu krychle by bylo možno zakreslit takto:

```
S = (a*a) * 6
     Y
   ↗ ↖
  Z (*) B
 ↗ ↖
A (*) A
```

Bylo by ovšem možno zakreslit ji také šestičetnou triádu součtu jednotlivých stěn.

Kvádr nabízí více variant. Kromě šestičetného součtu stěn ještě tyto, vycházející z úpravy vzorce:

```
S = 2*a*b + 2*a*c + 2*b*c:      V = 2*(a*b + b*c + a*c)
              S                              S
      ↗      ↑      ↖                    ↗       ↖
    V  (+)  U  (+)   T                 V      (*)   A
  ↗ ↖     ↗ ↖     ↗ ↖             ↗        ↑        ↖
 Z (*) A   Y (*) A   X (*) A       Z          Y          X
↗ ↖      ↗ ↖      ↗ ↖          ↗ ↖      ↗ ↖       ↗ ↖
B (*) C   B (*) D   C (*) D      B (*) C   B (*) D   C (*) D
```

Aritmetická úprava vzorců spočívá, jak je vidět, částečně v redukci počtu triád, která odpovídá snížení počtu mezivýpočtů. Především ovšem zřejmě jde o úsporu při psaní lineárního zápisu vzorce. Výhodné je také převedení části mezivýpočtů na snadné násobení dvěma.

Vzorce na jedné straně šetří nutnost vždy znovu dedukovat strukturu parciálního kontextu geometrického útvaru - poskytují šablonu, která jej fixuje. Avšak na druhé straně tím, jak nemusí být její korespondence rekonstruována aktivně ve vztahu k reálné struktuře, jak není stále znovu aktivován korespondující strukturální koncept, umožňují vzorce obcházet permanentní rekonstrukci a reprodukci své skryté logiky.

V některých úlohách bylo třeba řešit zadání, v němž se z údaje o objemu krychle měl zjistit povrch či naopak. Takové zadání lze pak zakreslit schématem, vyjadřujícím mj. strukturaci dvou celků shodným členem. Tímto členem je zde obsah stěny.

```
  S       V
↗ ↖    ↗ ↖
6 (*)  a² (*)  a
    ↗ ↖
  a (*) a
```

Dále uvedeme chronologický přehled úloh, z něhož má být především patrné, jakých konkrétních sémantických podob tyto úlohy nabývají. Jejich konkrétní strukturu zakreslovat nebudeme. Místy případně doplňujeme tento přehled některými citacemi záznamů a jimi inspirovanými poznámkami.

4. třída

Následující citace záznamu charakterizuje jakousi startovní čáru v dané problematice, jakýsi počáteční stav zacházení s pojmy obvodu.

3.11.97:

Uč.: Obvod čtverce. - Váhají, nevědí.	*Uč. jen takhle vyřkla pojem - nevědí, co se tím žádá. Uč. musí použít další otázky, ale zůstala myslím i dále (záměrně?) nezřetelná? Nebo přece jen zpřesnila otázku na "jak se vypočítá (zjistí) obvod čtverce"?*
Vilík: všechny strany dohromady.	*Tady mi právě chybí, zda a jak uč. zpřesnila otázku. Vilíkova odpověď může být i popisem obvodu jako geometrického tvaru (lomené čáry).*
Uč.: ale matematicky. - Gita: o= (? - už nevím).	*Možná opakovala Vilíkovu formulaci, jen ji hodila do formy rovnice - když to má být matematicky.*
Lada: o = všechny strany shodné.	*Uč. to nevzala, ale nezabývala se tím, jak to proboha Lada míní. Lze to číst tak, že obvod (lomená čára) má (=) všechny strany shodné? Je to pokus o popis lomené čáry s využitím aritmetické (resp. algebraické) symboliky? Ukazovalo by to, jak je korespondence jazykových a matematických pojmů pořád neurčitá?*
*Milena: o=4*4*	*Čtveřice shodných stran čtverce jako by se jí vnutila i jako délka strany? Nebo to byl jen možný příklad výpočtu pro konkrétní čtverec? Nebo je to nepřesná korespondence jazykového záměru "čtyřikrát ty strany (které jsou čtyři)"?*
*Gita: o=4*a*	*Ve hře je pořád jen elita třídy. Gita tu možná došla k příznakovému užití algebraického symbolu. Nebo si prostě jen poté, co uč. schválila u Mileny "o=4*" - ale něco jiného než 4, jaká je strana čtverce? (myslím, že byl čtverec se stranou popsanou "a" na tabuli, na co uč. ukazovala) - vybavila vzorec, který probírali a který by mohl být tím, co uč. chce?*

*Jak vypočítáme obvod obdélníka? - Fanda: 2*6 a 2*4 - uč.: obecně - Fanda: 2*a a 2*b.*	*Fanda nejdříve říká obvod pro tento (výše zadaný) obdélník. Ovšem "obecně" zároveň odkazuje k popisu stran obdélníka na tabuli, na který uč. myslím ukazuje.*
Uč. jim píše vzorec: *o▭ = (a+b)*2.*	*Trochu mě zaráží, jak vzorec upravila proti tomu, co říkal Fanda, aniž to nějak vysvětlila a ukázala, jak je to totéž. Je to vzorec k naučení ve své nejracionálnější formě. Ale je jim jasné, jak se k ní dopělo? "Vidí" tam ten obvod?* *Je to problém úprav výpočtu a už jsem o tom psal u násobilky: při úpravě výpočtu se může ztratit zřetelnost korespondence s jazykovým či názorným zadáním.*
Umět i o půlnoci.	*Tady je apel na naučení - když k nim přijde o půlnoci, musí ho umět. Uč. žertem hrozí někomu, kdo asi zpochybnil, že by k nim o půlnoci přišla, že na něj opravdu přijde.*

Teď si dosadíme naše rozměry. Kolik je a? –	

Vanda: 6. - Kolik b? - V.: 4.	
Uč. přepisuje vzoreček s čísly.	*Píše ho přesně pod algebraický tvar vzorce tak, aby strany byly přesně nad sebou a korespondence obecných a dosazených hodnot byla zřejmá.*

Záznam o dva měsíce později pak ukazuje velmi podobné zavedení obsahu.

Vypočítat obvod - "to je, když chceme oplotit plot, oplotit pozemek"	*K tomu ukazuje na čtverci narýsovaném na tabuli: kdybychom měli tady chatu a chtěli mít kolem pozemku plot.*
*Fanda: a+b+c+d. - Uč. chce obecný vzorec - Fanda: 4*3 - Uč. chce, jak se ta strana jmenuje (?) - F: 4*a.*	*Nemohli se dobrat k tomu, co je obecný vzorec, uč. přitom řekla poněkud zmateně, že chce vzorec tak, jak by byl, i kdyby čtverec byl RSTU, ale pak to nerozvíjela. Vzorec je vlastně vyšší, modelovou, metaúrovní popisu každého čtverce: "a" je tu nikoli za stranu <u>a</u> ve čtverci ABCD, ale za jakoukoli velikost strany. Je to vlastně algebraická značka, nikoli geometrický popis.*
Uč.: obsah se značí... ví to někdo? - Nikdo.	*Uč. říká, že se to ještě neučili, ale už to před nimi utrousila a je zvědavá, jestli si to někdo pamatuje. Nikdo se nepřihlásil.*
S = obsah - napsat a příště umět.	
Obsah znáte, jen nevíte, že to je obsah - tohle celé je obsah (ukazuje rukou na čtverci na tabuli), tahle celá plocha.	
A ten obsah má vzoreček: *S□ = a*a* *S□ = 3*3* *S□ = 9... čeho?*	*Řeč o tom, jak musí vzoreček znát i když je vzbudí o půlnoci. Někdo možná špitnul nějakou námitku, protože S. rezolutně opakovala: **budeš** ho znát.* *K obsahu se nic nevysvětluje, je to vzoreček k naučení ("obsah má vzoreček" - tzn. něco, co k tomuto pojmu kanonicky patří). Tímto způsobem je tedy (aspoň zatím) geometrický model násobení nechán stranou.*
Jaké jsou to centimetry? - Hlásí se jen holky, Gita správně. - Učí se, že je to ta malá dvojčička: cm^2. Třeba byt se měří na m^2, parcelu taky kupují na m^2.	*Výklad o tom, že se to týká plochy dlaždic, koberce atd. Když jsem pak po hodině koukal k Edovi, s čím měl potíže, došlo mi, že taky mohl spojovat "čtvereční" se čtvercem, který rýsovali a tedy s plochou čtverce. Názorně se čtvereční metr ani centimetr neukázal.*
Naučit obecný vzoreček, pak už jen dosazuješ.	
Samostatně □RSTU a= 4cm *Narýsovat, vypočítat obvod a obsah.*	*Chtěla jim dát složitější zadání (asi s milimetry), ale došlo jí, že nemůže, že neumějí násobit dvojciferným číslem (byť pod sebe, násobí jen jednociferným).*

Uč. kontroluje ostatní - zjistí, že Eda má stejnou chybu, jako Marcel. - Eda. nejdříve zapírá, pak se	*Pak jsem se u něj byl dívat - opsal od Marcela špatně výpočet S=4+4+4+4. (Je to důkaz spíš pro to, že Marcel zas v geometrii tak dobrý není nebo že jim vzoreček pro obsah nedává žádný smysl a klidně ho zamění za jiný výpočet,*

přizná. - Uč.: "opisuješ a ještě lžeš".	*zdánlivě ekvivalentní: 4*4 <=> 4*a <=> a*a. Jenže jen ve výpočtu a při hodnotě a=4. Logická korespondence vzala přitom zasvé.*

9.2.98	2*(750+60) =	Václavské náměstí má tvar obdélníka 750 a 60 m. Ujdeme více než dva kilometry, když náměstí jednou obejdeme? - co budeme počítat? co to je? - Vždycky nejdříve obecný vzorec. - Čeho? (jednotky)

Ujdeme více než dva kilometry, když ho obejdeme?	*Uč. se ptá, co budeme počítat, když máme náměstí obejít.*
Eda si tlačí prsty na spánky, jako by si nemohl vzpomenout.	*Vzpomíná opravdu? Snaží se vybavit si "obvod"? Po tom, co vidíme hned následně u Vilíka, bych o tom pochyboval. Nebo se snaží vybavit si "vzorec"?*
Vilík říká, co budeme počítat: 750+60 krát dvě. - Uč.: Ale co to je? – Vilík po delším váhání: obvod?	*Odpovídá procedurou, nikoli pojmem, který ji zastupuje.*
*Uč.: vždycky nejdříve obecný vzorec, do něj pak dosadíme: o □ = (a+b)*2* *o □ = (750+60)*2*	
*Evžen se hlásí na 810*2 - vyvolán Vráťa: 1620 - uč.: čeho? - Vráťa přemýšlí, má se podívat, v jakých jednotkách to máme. - Vidí (asi v textu): v metrech.*	*Mohlo by to znamenat, že kontext slovního zadání a kontext výpočtu jsou odděleny a propojují se příznakově, není to jednotný kontext.*

Co víš všechno o obdélníku?	
Slávek: že má 2 strany stejně dlouhé?	*Nevím, jestli řekl "dvě strany" nebo "vždycky dvě strany" nebo "dvě a dvě strany" - řekl bych to první, ale nejsem si jist.*
Uč.. jak se to říká v geometrii? - Slávek: rovnoběž... - Jindra: shodné.	*Slávek tázavě zkusil, na co si vzpomněl, ale ani to nedořekl.*
Marcel: 4 vrcholy	
Darina: že má jednu stěnu, když ho vztyčíme.	*Obdélník se tedy dá vztyčit - je to placaté, dvourozměrné těleso. Dál je u Mileny vidět, že jasně tvoří dvojici s kvádrem.*
Milena: těleso se jmenuje kvádr.	*Když se z obdélníka udělá těleso, je to kvádr – tak nějak by to mohlo znít. Jasně jsou to příbuzné útvary.*

Lada: každý roh má 90. - Uč.: To není roh, to je...? - Marcel: vrchol - Milena: pravý úhel.	*Marcel se tu podruhé uplatňuje s vrcholy. Jasně mluví všichni o tomtéž, nerozlišují vrchol jako bod od rohu či (pravého) úhlu.*
Narýsovat: *□RSTU r = 6 cm, s = 2 cm o□ =* *S □ =*	

Evžen váhavě vzorec: o▭ = (r+b) *o▭ = (*	*Nevěděl si s tím rady, i samotné nahrazení písmen obecného vzorce písmeny ze zadání mu to celé rozházelo?*
Luděk mu radí: "krát dvě! - ukazuje kde.	*Evžen to tam snad dopsal, ale dál už se nehnul, ostatní už mezitím byli hotovi.*
Uč. se ptá na obsah, Fanda říká vzorec obvodu. Pak: "aha, obsah" - a správně.	*U Fandy se zdá dobře oddiferencovaná procedura a názorný koncept, ale zaměňuje se koncept verbální.* *Tohle odlišení různých forem a struktur bude důležité: názorný koncept a jeho strukturace (dřív bych kladl důraz na imaginárnost, teď se mi to zdá možná podstatněji vymezené ukazováním, jeho vztahem ke konstrukci jako proceduře), verbální pojem a jeho vztah k ostatním pojmům, k názornému konceptu, ke konstrukci, k verbálnímu popisu konstrukce atd..*
*Jindra měl taky původně S = (r+s)*2, pak to sám podtrhl (jako chybu) a napsal za to r*s.*	

Záznam ilustruje záměny obvodu a obsahu, které děti dělají. Někdy jde ovšem jen o záměnu slovních pojmů, označení - "správně to myslí a špatně říkají". Jindy je pojem správný, ale vzorec mu neodpovídá. Velmi často se však zdá, že převládá paměťové přiřazení vzorců a pojmů obrazcům. Naproti tomu rozlišení tvarů čtverec vs. obdélník je bez problémů už od první třídy!

23. 2. 98 má pětiminutovku na písemnou reprodukci vzorců správně jen asi polovina dětí, 3 děti mají dokonce tři chyby.

11.5.98	obvod, obsah	Uč.: obvod čtverce: kolik pletiva vs. obsah: kupuju celý pozemek, ne jen ten plot, ale celý (ukazuje plochu) Obecný vzorec, pak dosadit.

5. třída

20.1.99	čtvereční jednotky	Co znamená km^2?

Uč.: Co znamená km^2? - maluje mu: tohle je 1 m *|--------------| Jak bys to namaloval? - L. neví. - Uč. mu připomíná "plochu na chatě" - už ví? - Luděk kreslí - uč.: a tohle (svislá strana) - L: $3m^2$ - uč.: Ale! jeden metr čtvereční a tohle (vodorovná strana) taky jeden metr čtvereční.*	*Viz náčrtky na s. 4-5 fieldnotes (ale nic dalšího na nich vlastně není). "Plocha na zahradě" je oblíbený "názorný příklad" toho, co je plocha.* *Luděk podle mě kreslí tuhle plochu a stejně neví, jak to souvisí s metrem čtverečním. Navíc kreslí zřejmě obdélník (představuje si při tom opravdu pozemek jejich chaty?). Uč. ho nenechala říct, kolik podle něj je vodorovná strana - nejspíš by ji udal taky v metrech čtverečních. Představuje si, že "metry čtvereční" jsou metry, kterými se měří délky na zahradě? Uč. se tím nějak dál nechtěla*

	zabývat a rychle to ukončila. Jak se přitom přeřekla, jakoby přijala jeho chybu a také označila délky stran jako "metry čtvereční".

3.3.99 obvod a obsah obdélníka, povrch kvádru
(Jak se vypočítá - vzorce.)

*Jak se vypočítá obvod? - Kiška: (a+b)*2 (Hlásila se asi půlka dětí?)*	
*S = a*b*	
Luděk dosazuje a vypočítává: 12 centimetrů čtverečních.	
Co o kvádru:	*Teď je zjevné, že obdélník byl jen příprava na kvádr.*
Darina: 6 stran (uč. nechává "strany")	
Fanda: 2 protější strany jsou shodné	
*Míťa se pokouší předbíhat: (a*b)*6 - uč. chce <u>jednu</u> "stranu" (postupně začíná říkat "stěnu" a zaměňuje to)*	*Ta závorka je tam samozřejmě pomyslná, Míťa prostě myslí obsah 6 obdélníků.*
*První stěna nedělá problémy: a*b*2*	
*Druhá - uč.: tahle je shodná jako u první (ukazuje společnou stranu s předchozím obdélníkem) a tahle je "c" - Gita: c*b (chtěla rovnou "krát 2").*	
*Třetí - Čenda zkouší: c*d.*	

Myslím, že tohle je chyba indikující možná něco dalekosáhle podstatného. Čenda postupuje analogií s předchozím postupem: první strana společná s předchozí stěnou ("c"), druhá je nová: "d". Že "d" by u kvádru byl čtvrtý rozměr, zatímco je definován jen třemi, ho nijak nezaráží. Celou dobu mám totiž dojem, že "trojrozměrnost" těles pro ně není nic samozřejmého, že by potřebovali hodně, hodně probrat, jak je kvádr definován právě svými třemi rozměry. K tomu by ho potřebovali různým způsobem konstruovat - v realitě skládáním kostek, konstrukcí, vystřihováním a skládáním pláště apod. Možná by hodně pomohly nějaké počítačové programy, které by umožňovaly v dokonalém zobrazení vidět různé rozměry kvádru, shodnost stran, stěn apod., jejich libovolné označování. Nebo aspoň dokonalé zobrazení na tabuli. Mizerné náčrtky (a oni je dělají mizerné) znemožňují vidět souvislosti.

*Pak: jak zjistí povrch? - Martin: vypočítáme a sečteme. - Uč. doplňuje 2*a*b + 2*b*c + 2*a*c.*	*Mám dojem, že to myslel správně. Uč. psala na tabuli výpočty pro jednotlivé dvojice stěn, teď už je měla všechny:* *a*b*2 b*c*2 a*c*2* *Uč. chtěla ono "sečteme", totiž že mezi výrazy patří znaménka +. Odsouhlasila to Martinovi a jen to přehodila: sečteme (= doplníme do vzorce "+") a vypočítáme.*
Načrtnout kvádr. - Fanda svůj.	*Uč. načrtává na tabuli klasický, s nejmenší stěnou jako základnou - tedy "na výšku".* *Fanda načrtává jiný, naležato (viz fieldnotes s. 5) a dopouští se chyby: zadní horní strana není rovnoběžná s přední (a tedy "vodorovná").*

Fanda pak svůj náčrtek vygumoval a nakreslil tam kopii toho na tabuli. Překvapeně jsem zjistil, že mám problém zpaměti jeho původní obrázek reprodukovat, ačkoli jsem měl dojem, že chybu dobře držím. Vedení zadní stěny totiž nebylo náhodné, zcela libovolné, ale sledovalo nějaký jasný směr. Zkusil jsem svislý, ale to nebylo ono. Dospěl jsem pak téměř k jistotě, že byl kolmý k horním stranám, protaženým dozadu (šikmo vpravo nahoru). Jako zadní stěna (teoreticky shodná s předním skoročtvercem) mu pak vyšel "skoročtverec", ale posazený na špičku, ale musel být i nějak šišatý.

K náčrtu si mají připsat "cihla" - ale strany nechávají nevyznačené!	*O přestávce se Fandy ptám, zda v náčrtku vidí ty tři strany či rozměry. Opravdu: viděl dva, ale zarazil se, který je pak ten třetí, sám to nevymyslel, musel jsem mu to ukázat - včetně toho, jak se tam tenhle rozměr čtyřikrát opakuje.*

Mám dojem, že to potvrzuje, ža takovýhle náčrt a popis "cihla" je nahouby - identifikovat kvádr jako tvar umějí už dávno. Co potřebují, je diferenciace jednotlivých rozměrů či možná ještě spíše konstrukčních prvků ve struktuře kvádru.

Počítají povrch při zadání a = 7cm, b = 5cm, c = 2cm. - Uč. je vede, děti se hlásí na jednotlivé výpočty.	
V čem vyjde výsledek? - Lada: centimetry krychlové - Uč.: Já ti dám. Povrch počítáme ve čtverečních.	*Lada patrně vztahuje k tělesům "objemové" centimetry krychlové.*
1/62 - Posledně už dělali "3 druhy tapet". Teď: Do zadání si napsat nad rozměry "a", "b", "c". - Potom: piš vzorec, dneska ještě můžeš z tabule. - Pak dosazují do vzorce a počítají. - U třetí kombinace stran se zarazí Luděk(?) i Darina. Uč. ji musí navést - vede ji zase prostřednictvím vzorce (a popisků v textu)?	*Tenhle příklad měl přece jen určitý potenciál, ale uč. ho nechala být. Sice hledání "3 druhů tapet" vycházelo z požadavku, aby vždycky protější byly stejné a sousední odlišné. Ale přes tohle se dalo dojít právě k identifikaci protilehlých stran jako shodných a vyznačení jejich obsahu jako obsahu dvou shodných obdélníků: vyznačeny jsou stejnou tapetou, odlišnou od ostatních stěn.*

Jenže uč. touhle cestou nešla, nepočítali, kolik budou potřebovat každého druhu tapet a tři členy vzorce tak nebyly vzaty v korespondenci s dvojicemi obdélníků odpovídajícími druhům tapet. Dosazují jen do vzorce, nikoli zároveň s tím do obrázku.

Uč.: Je to těžké? - Vypadají rozpačitě: trochu jo. - Uč. akcentuje, že musí umět vzorečky.	*Uč. sice vedla řeč, jak na to (povrch kvádru) přišli sami. Ale asi sama nemá pocit, že by tomu bezpečně rozuměli.*

2.6.99	336 m = 2*(x + x/2) 72 arů = x * x/2	Obdélníková zahrada má šířku rovnou polovině délky. Vypočítej její obsah, jestliže obvod je 336 m. Vypočítej obvod podobné zahrady, jestliže její obsah je 72 arů. (Fanda i Míťa místo počítání opisují výsledek zezadu z učebnice.)

2.6.99	vzájemná velikost obdélníka a čtverce zadaných jejich obvody	Zda lze z obdélníku o obvodu 16 cm vyrobit tři shodné čtverce, každý o obvodu 8 cm. (Darina opisuje zezadu z učebnice.)

6. třída

28.9.99 - 6. A	obvod čtverce (pojem)	Od slova obejít. - Nemusíme si pamatovat, to si odvodíme. Jen asi 5 souhlasí s "a*4“ - Gita pak: "a+a+a+a"
28.9.99 - 6. A	4*a = (násobení)	Uč. říká stranu, mají říkat obvod: pět a půl; 65; 7,5; dvě a třičtvrtě; pět a třičtvrtě.
28.9.99 - 6. A	o:4 = (dělení)	Uč. říká obvody, mají říkat stranu: 64; 84; 104; 30; 50; 13.
28.9.99 - 6. A	40,5 * 4 = (násobení)	Jak dlouhá je ohrada kolem čtvercového výběhu pro koně, měří-li strana ohrady 40,5m. (Náčrtek. - Dosazování do vzorce: písmena, co neznám, opíšu, co znám, změním na čísla. Záměna jednotek: jakých metrů? - holky: čtverečních.)
28.9.99 - 6. A	30:4 = (dělení)	Lišta ve čtvercové místnosti je dlouhá celkem (tzn. kolem dokola) 30m. Vypočti délku strany. (Náčrtek a dosazení do vzorce. Někdo říká 120m - ztráta korespondence v průběhu postupu? Fanda: Musí tam být dveře. - Uč.: Jistě, to jsme si zjednodušili.)
8.10.99?	A: obvod čtverce -> obsah $(28:4)^2 =$ B: obsah čtverce -> obvod $\sqrt{64}*4 =$	A: Jaký obsah má čtverec s obvodem 28 cm? B: Jaký obvod má čtverec s obsahem 64 cm^2?

Písemku, jejíž součástí je tato úloha, psalo 21 dětí, máme ji však jen od 13. Z nich 12 ji řešilo správně a jen Slávek chybně. Tenhle poměr je ovšem zkreslen - srv. rozložení známek vůbec vs. těch, které nám odevzdali:

Známka	ve třídě	v „našich“ písemkách
1	8	7
2	7	5
3	4	1
4	2	0

Nedostali jsem tedy především 5 ze šesti známek horších než dvojka. Dá se předpokládat, že čtyřkaři a nejmíň polovina trojkařů úlohu nezvládli - tedy 3-6 dětí.

9.11.99	$\sqrt{64} * 4 * 30$ (složená)	Jak dlouho se bude stavět plot kolem čtvercového pozemku s obsahem $64m^2$, trvá-li stavba jednoho metru plotu 30 min. (Nápady? (asi 5 dětí) - Uč. je pak vede. Karel chce nejprve dělit (když už znají obvod), pak „krát“, ale 30*4. Pak má dojem, že říkal totéž - totiž 30*32).
10.11.99	obvod čtverce -> obsah A: $(30:4)^2$ B: $(22:4)^2$	A: Jaký obsah má čtverec, jehož obvod je 30 m? B: Obvod čtverce j 22 km. Jakou plochu zaujímá tento čtverec?

Písemnou práci s touto úlohou máme od 22 dětí, chybí dva slabší žáci.

12 dětí řeší úlohu správně.

Numerickou chybu dělá 5 dětí, z toho 4 při násobení.

Strukturální chyby vidíme u 4 dětí: Slávek (násobí místo dělí), Eda (dělí i násobí: 30:4, 30*4 považuje za obsah), Helena (S = 4*a = 4*7,5 o=7,5), Vanda (o = 22*a, o = 4*11 = 44).

Vůbec neřeší Olle.

Tedy 17 dětí úlohu zvládá, 5 dětí je mimo korespondenci.

5.1.00	(a*b) * 3 =	Na 1 m^2 stáli 3 lidé. Kolik lidí bylo na obdélníkové ploše celkem, byla-li 8 m dlouhá a 6 a půl metru široká? (Náčrtek - vzoreček - dosazení - výpočet - odpověď. Uč.: Budeme to násobit nebo dělit? (Po vypočítání obsahu.) - Darina ví.)
10.1.00	A: (a*b) : 2 = B: (a*a) : 2 =	A: Jak dlouho potrvá úprava povrchu obdélníkové podlahy dlouhé 7 m a široké 5,5 m, upravíme-li každou hodinu 2 m^2? B: Každou minutu udělají řemeslníci 2 m^2 nátěru. Za jak dlouho budou hotovi, natírají-li čtvercovou plochu o straně 6,8 m?

Úlohu řeší strukturálně **správně 13 dětí**, z toho 2 mají drobné početní chyby (Pavel a Denisa).

Strukturální chyby dělá 9 dětí:

4 (Luděk, Vilém, Martin a Vanda) pracují se vzorcem pro obvod (Vanda ani nedělí),

1 (Eda) strany sčítá místo násobení.

Další 4 (ale možná k nim patří i Vanda) jsou zřejmě mimo kontext:

Vojta má špatně i přiřazení rozměrů stranám, svůj kvaziobsah (dosahuje podivná čísla - jakoby z jiného příkladu - netuší, že tam patří zadané strany?) pak dále nedělí.

Darina jen zapsala 6,8*6,8, dál nic.

Olle dělí rovnou stranu, bez náznaku výpočtu obsahu.

Helena má kuriózní postup: Počítá obvod - 27,2. Pak zvláštním postupem upravuje délku strany: 2 m^2 = 0,2 (Evokují nějak metry čtvereční, resp. mocnitel „^{2}“, nutnost převodu s posunem desetinných míst?); 6,8 + 0,2 =7,0. Korespondence mezi natíráním plochy a operací násobení (za kolik budou mít jednu stranu) zřejmě pak dále: násobí obvod zřejmě oním „7,0“ (pod sebe), ale jako „27,2*0,7 = 19,04“ To je zřejmě teprve pro ni čas na jednu stranu, protože pak násobí (19,04*4 = 76,08) a výsledek uvádí v odpovědi převedený na hodiny - minuty - vteřiny: „1 hod 16 min a 0,08 vteřin“.

25.4.00	objem X obsah (pojmy), jednotky	Co to je objem? - jen 2 děti. Tak co to je obsah? - velikost plochy (Gita) - vs. objem jako velikost prostoru. 1 cm^3 - přibližně malá hrací kostka 1 dm^3 - ve třídě není, krychle na dlaždičce by byla o něco větší. Co se měří na km krychlové? - Darina: povrch oceánů
2.5.00	Objem (pojem)	Které útvary mají objem - tělesa. Co je objem - Darina: ta plocha uvnitř - pak opravuje: prostor. – Karel: Počet krychliček
2.5.00	hrana krychle -> objem: a*a*a	Uč. říká délku hrany, oni objem: 3 dm, 4 mm (Míťa: 32), 6 mm, Písemně: 4 m, 2 km, 3mm, 5 cm, 6 dm (1 chyba: Eda, Denisa) 10 m, 100 km, 4 dm, 1 km, 3 cm, 7 m (Tomáš: 143 m^3)
2.5.00	objem krychle -> hrana jakoby $\sqrt[3]{V}$, ve skutečnosti kanonické přiřazení	V = 64 Vráťa myslí nejdřív „8“. Diktát - známe V, napiš <u>a:</u> 64 m^3, 1 000 km^3, 8 cm^3, 216 mm^3

Uč. jim bude říkat objem, oni hranu.	
Slávek nadšeně: Jo takle! Já to vim! (u 8 m^3)	*Vypadá to na „aha“ - ale není jasné, jaká je povaha vhledu. Možná mu jen došla inverznost postupu (pro který ale není procedura, recept)? Pochybuju, že by tu šlo o nějakou korespondenci s názorným, imaginárním členěním krychle.*
Tomáš si hledá v předchozích příkladech, Míťa asi taky. - Vráťa u 64 myslí nejdřív „8“.	*To je ono: Vráťa tu asi zkouší nějaký opačný postup, mezikrok analogický počítání třetí mocniny - tedy druhou mocninu. Jenže to nefunguje. Oni mají šanci jedině se naučit rovnou párové přiřazení čísla třetí mocnině. To vlastně hledají Míťa a Tomáš. Jako pomocný postup mohou použít jen zkusmé zpětné násobení.*

2.5.00	hrana krychle -> objem, objem -> hrana	Diktát: a -> V, V -> a: hrana 3 m, objem 125 km^3, hrana je 1 000 m , 8 m^3. Darina 2 chyby, většina bez chyb.
9.5.99	objem krychle -> povrch $(\sqrt[3]{V})^2 * 6$	Objem 27, jaký má povrch? (Pro jednoduchost uč. zatím neudává s číslem jednotky.) Jen Fanda: 54. Uč.: Nejdříve hranu - bez hrany nespočítám ani objem, ani povrch.

9.5.99	objem krychle -> povrch $(\sqrt[3]{V})^2 * 6$	Objem 8. -Nikdo, kdo by nevěděl hranu: 2. - Uč. připomíná $6*a^2$. - Martin: 72(?) (6*6*2 namísto 6*2*2?) Bořek má problémy se čtvercovým členěním? (podobně jako v S-B?)
9.5.99	objem krychle -> povrch $(\sqrt[3]{V})^2 * 6$	Krychle má objem 27 m^3. Zjisti její povrch.

Uč. na tabuli: *KRYCHLE - OBJEM A POVRCH*	
Krychle má objem 27 m^3. Zjisti její povrch. - Uč.: Vždycky začneme tím vzorečkem, na který se ptáme.	*Uč. tu dodržuje posloupnost, které jsem si u něj už všiml. Nechá je nejdříve řešit intuitivně, z hlavy, bez přesných návodů - kanonické postupy jim dodává až poté. Má zkušenost, že pak je lépe pochopena jejich logika? Že nezůstávají nepochopenou mechanikou a slouží k diferenciaci a zvědomění logiky předchozích intuitivních postupů?*
$S = 6*a^2$	
*Co to je a^2? - Bořek: a*a - uč.: a co to je? - B: násobení*	
I Gita jen ztuha: obsah - čeho? Gita: obdél... čtverce	
Uč. připisuje: ... neznáme <u>a</u>. *Ale umíme si spočítat z objemu*	*Tedy:* $S = 6*a^2$*... neznáme <u>a</u>*
$V = a^3$ $27 = a^3$	
Uč. čeká, až se hlásí (skoro?) celá třída. - Pak na tabuli: $S = 6*3^2$	
Uč.: Pozor, 3^2 není šest. - Doplnit jednotky, odpověď. - Kryštof: metrů krychlových. - Uč.: vždyť je to povrch.	*Příznakovost toho, o čem zrovna vypovídá dané číslo a jaké jednotky tomu odpovídají, je tu patrná na každém kroku.* ***Přechod z délky na plochu a objem a zpět je pořád něčím cizím.*** *(Jsou Darininy potíže s převody posledně podobného druhu?)*

Kdo rozumí? – Nehlásí se Martin a Lada.	
$V = 125\ km^3$ $\underline{S = ?}$	
Darina na tabuli špatně hranu: 25 km	
Další příklad na tabuli Gita. – Karel neví hranu jako odmocninu z 216. - Gita dobře.	
uč.: Kdo nerozumí? – Eda.	

Martin: Já už to možná chápu. – Bořek: Ježišmarjá, to je... Já už to chápu dávno.	***Na které úrovni deferenciace to teď chápou?*** *Na úrovni globální korespondence vzorečků s obsahem a s objemem? Nebo na*

	úrovni korespondence obsahu vzorečků se strukturací plochy a objemu?

20.6.00	skupina A: objem krychle x hmotnost $3^3 * 1,5$ skupina B: objem krychle x cena $4^3 * 30,5$.	A: 1 litr kapaliny má hmotnost 1,5 kg. Jaká je celková hmotnost kapaliny v plné krychlové nádrži o hraně 3 m? B: Jaká je celková cena benzínu v krychlové nádrži o hraně 4 m, stojí-li 1 *l* benzínu 30,5 Kč?
20.6.00	objem krychle -> hrana A: $\sqrt[3]{0,64hl}$ B: $\sqrt[3]{0,27hl}$	A: Objem krychle je 0,64 hl. Vypočti délku hrany této krychle. B: Urči délku hrany krychle, která má objem 0,27 hl.
20.6.00	objem krychle -> povrch A: $(\sqrt[3]{27})^2 * 6$ B: $(\sqrt[3]{64})^2 * 6$	A: Jaký povrch má uzavřená krychlová nádoba, je-li její objem 27 litrů? B: Objem uzavřené krychlové nádoby je 64 litrů. Jaký má tato nádoba povrch?
20.6.00	A: neúplný objem kvádru : 8 litrů [80*50*(35-5)] : 8 000 =	A: Akvárium tvaru kvádru je 80 cm dlouhé, 50 cm široké, 35 cm vysoké a voda sahá 5 cm pod horní okraj. Kolik rybiček bychom do akvária mohli dát nejváše, potřebuje-li každá z nich 8 *l* vody?
	B: neúplný objem kvádru : 12 litrů [100*40*(63-3)] : 12 000 =	B: Jáma tvaru kvádru je 100 cm dlouhá, 40 cm široká a 63 cm hluboká. Kolika dvanáctilitrovými vědry vody bychom jámu naplnili tak, aby voda dosahovala 3 cm pod horní okraj?
20.6.00	objem kvádru a 2 hrany - vypočítat třetí: A: 30 *l* : (3 dm * 2 dm) = B: 60 *l* : (4 dm * 3 dm) =	A: Jak vysoký je kvádr, má-li objem 30 *l*, je 3 dm dlouhý a 2 dm široký? B: Kvádr má objem 60 *l*, je 4 dm dlouhý a 3 dm široký. Vypočti jeho výšku.
20.6.00	povrch kvádru (převod jednotek) A: 2*(3*5) + 2*(5*6) + 2*(3*6) =	A: Vypočti povrch tělesa kvádru, má-li rozměry 3 m, 5 m, 6 m. Výsledek pak převeď na cm^2.
	B: 2*(8*4) + 2*(4*6) + 2*(8*6) =	B: Rozměry skříňky tvaru kvádru jsou 8 dm, 4 dm, 6 dm. Vypočti povrch této skříňky a výsledek převeď na m^2.

Písemku máme od 21 dětí - chybí 3 děti (1 velmi dobrý, 2 slabší žáci)

Úspěšnost řešení jednotlivých úloh se nijak zvlášť neliší. Zdá se, že výsledky jednotlivých úloh nejsou úplně jednoznačným indikátorem zvládnutí strukturace kontextu a příslušných korespondencí, že jsou poměrně časté jak náhodné chyby tak náhodné úspěchy (zdánlivé vhledy do úlohy prostřednictvím zkusmé aplikace vzorce).

Za spolehlivější se tak dá považovat spíše sumace všech úloh. Děti se tu rozpadají do 4 nestejně četných skupin.

Za **zvládnutý** se kontext dá považovat u skupiny **7 dětí**, které dělají v 6 úlohách nejvýše 2 drobné chyby: Bořek, Lada, Karel, Míťa, Gita, Nina, Fanda. Až na Bořka se kryjí s těmi šesti, kdo dostali z písemky jedničku.

Další je skupina 5 dětí, které buď neřeší vůbec 1 - 2 úlohy nebo dělají větší počet chyb: Slávek (neřeší pouze úlohu 6 - ale zde vůbec strukturu povrchu nezvládá), Tomáš (u toho to překvapuje, čekali bychom ho spíše v první skupině), Kiška, Vráťa, Pavel. Vyjma Tomáše bychom odhadovali, že zvládají kontext příznakově, někteří možná s velkou oporou o mechanickou reprodukci vzorců? (Z písemky měli dvojku.)

Početně málo zastoupený „nižší“ střed tvoří jen 2 chlapci (Pepík, Olle), a snad Denisa, která má náznaky, ale plete přiřazení vzorců.

(Problém korespondence vzorce a struktury je zřejmě ještě zprostředkován kanonickým přiřazením "verbální pojem - vzorec". Špatná identifikace pojmu znamená pak aplikaci chybného vzorce. Někdy ještě do řetězce zprostředkování vstupuje značka, takže dítě může identifikovat adekvátní přiřazení pojmu, např. objem, ale přiřadí mu značku S a pak reprodukuje vzorec příslušný k S a tedy k povrchu.)

Zcela nezvládnutý je kontext u 6 dětí: Martin, Darina, Luděk, Vojta, Vanda, Kryštof.

ZÁVĚR

Prezentované úlohy představovaly naprostou většinu slovních úloh, se kterými se děti Modré třídy od 4. do 6. třídy setkaly. Přece jen jsme však ještě některé typy, které se vyskytují spíše zřídka či ojediněle, nestačili do analýzy zahrnout. Předběžně je charakterizujme. Jde jednak o typy s akcentem spíše na logiku. Případná matematická struktura tu např. vytváří prostřednictvím jednoduchých triád soubor podmínek, které musí být v nějaké kombinaci, případně všechny najednou dodrženy. Jednoduchým typem takových úloh jsou vlastně i triády sčítání s podmínkou. Další logické úlohy staví na rozpoznání ekvivalence pojmů. Ta je ve slovních úlohách přítomna velmi často už např. v podobě skrytých údajů, běžných anaforických a kataforických prostředků apod. Jsou však úlohy, v nichž je rozpoznání ekvivalence velmi komplikované nebo vyžaduje vymanit se z běžných konotací obecné češtiny. (Např. "Kolik bylo hus, když letěla jedna za druhou?")

Vlastně také na těchto ekvivalencích či naopak jejich nepřítomnosti stojí některé "chytáky". Částečně by to ukazovala úloha: "V rodině je pět bratrů. Každý bratr má 2 sestry. Kolik je v rodině sester?" Darina odpověděla "deset". Chytáky jsou také postaveny na dalších fenoménech, které jsou v řešení slovních úloh přítomny. Jde o chápání vztahů různých tříd a podtříd, které mohou formalizovaně být vyjádřeny jako vztahy podmnožin, průniku množin, kontingenční tabulka apod.

Jde konečně o úlohy s akcentem na sukcesivnost reálných procesů, jejichž vyjádření běžnou matematickou strukturou, byť s odpovídající korespondencí členů, vede k chybným řešením. Buď proto, že matematická struktura, tendující k setření rozdílu mezi simultánností a sukcesivností, mezi statickým schématem a dynamicky, v čase probíhajícím dějem, přecení pravidelnost výsledků děje nebo proto, že sice matematická struktura řešení je nalezena, ale její vyjádření v reálných krocích, respektujících omezení zadání není přesto zřejmé.

K výčtu toho, co všechno jsme v tomto textu neprovedli, patří ovšem především dluh samotnému materiálu, který byl prezentován. Zbývá celá podrobnější analýza sémantiky textů úloh, nejspíše s využitím přinejmenším některých lingvistických postupů či alespoň postupů lingvistikou inspirovaných. Tento krok ovšem nemůže být samoúčelný, musí být veden snahou vyčlenit pomocí lingvistických kategorií reálné fenomény vývoje dětského chápání textu a tím i myšlení.

Přesto se domníváme, že jsme prokázali naši tezi z předchozích zpráv, že vývoj počítání není cestou od zvládnutí mateřského jazyka k novému jazyku matematiky. Že jednak vývoj osvojování sémantiky českého jazyka zdaleka není na základní škole ukončen, jednak že se děje také prostřednictvím matematiky. Že totiž matematika podstatným způsobem kultivuje jazykový vývoj.

Uveďme k tomu - věrni etnografickým východiskům našeho bádání - na závěr úvahu inspirovanou situací ve třídě.

3.11.97:

A už píšem:	
1 p ....15 kg ←----¬ *2 p ....3 krát více __|* *(kolik v obou pytlích dohromady?:)* *c(elkem) ....x*	*Mezi prvním a druhým řádkem jim dělá na tabuli šipku - uč. ji nevysvětluje, možná ji mají vysvětlenu: 3x více než tohle, ukazuje šipka.* *c ve třetím řádku na tabuli si Eda zapisuje jako slovo: celkem.*
Zápis si mají psát, protože pak neudělají chybu, jako kdyby hned psali příklad.	*Uč. argumentuje užitečnost zápisu - bez něj se v rovnou zapsaném příkladě snadno udělá chyba.*
*Co musíme vypočítat nejdřív? - Luděk: 3*15. - Uč.: Ale co to vypočítáme? – Vráťa: 45 - Luděk (ztuha): Kolik je v pytli. - Uč.: Ale v kterym? - Luděk: V prvnim. - Uč.: To víme, 15.*	*Tohle je situace, kterou je třeba podrobně analyzovat.*

Děti tu snadno dospívají k řešení v jazyce čísel a jejich vztahů, v průzračnosti (?) matematických syntagmat a snad i syntaxe. Ale dělá jim velké problémy vést paralelní řeč v jazyce, vyjádřit matematická syntagmata, zabudovaná do matematického kontextu jakožto simultánní (či vysoce simultaneizované) struktury (? - nakolik je to problém přechodu od sukcesivní k simultánní struktuře?) v jazyce.

Možná jde opravdu o dva aspekty problému: jednak rozvinutí implicitního syntagmatu ve zřetelně sukcesivní vyjádření (tzn. zapsání příkladem či posloupností dvou příkladů): někteří z nich vědí hned výsledek (nevím, jestli tady taky), ale vyjádřit, "jakým příkladem" k němu došli, je pro ně následný speciální problém - problém "zvědomění" intuitivních postupů?

Ani tam, kde je syntagma počítání bez problémů rozvinuto do sukcesivní podoby příkladu, není pro děti snadné formulovat paralelní jazykový kontext s explicitně vyjádřenými kvantitativními (tzn. s matematickými syntagmaty korespondujícími) vztahy. Důvodem je patrně to, že tato syntagmata nejsou nijak samozřejmou součástí přirozeného jazyka na té úrovni, jak ho děti ovládají, nýbrž že vznikají restrukturací původního přirozeného jazyka (restrukturací jeho významů), zprostředkovanou jazykem matematiky, který je vůči přirozenému jazyku v postavení metajazyka, v postavení analogickém tomu, v jakém je vůči přirozenému jazyku školní čeština, tzn. čeština jako předmět, jako mluvnice.

*Restrukturované významy jazyka jsou pak vůči matematickým kontextům příznakovou paralelní řadou: to, v čem se děti pohybují bezpečněji, samozřejměji, jsou čísla a operace s nimi - od nich pak odvozují jazykový popis. Tak používají čísla dokonce i pro označení paradigmatických členů jazykového kontextu, jako označující, která jsou přístupnější, samozřejmější než jazykové výrazy - možná proto, že jsou také stručnější a jednoznačnější (zejména spolu s ukazováním). Tak "3*15" je pro Luďka mnohem samozřejmější výraz než "množství soli ve druhém pytli" a učitelce dá hodně práce, než ho k tomuto korespondujícímu výrazu dovede. Jeho výraz je navíc obsažnější - je v něm rovnou vyjádřeno syntagma množství ve dvou pytlích, zatímco komplikovaný jazykový výraz je pouze výrazem paradigmatickým - pouze s vyjádřením neurčitého vztahu k nějakému prvnímu pytli (je-li tohle pytel druhý).*