POZNÁMKY K MATEMATICKÉ KOMPETENCI DĚTÍ V 8. TŘÍDĚ

Miroslav Rendl

OBSAH

CELKOVÉ VÝSLEDKY A SROVNÁNÍ 4. A 8. TŘÍDY
ČÍSLA
ZLOMKY
ALGEBRA
GEOMETRIE
SLOVNÍ ÚLOHY
ÚMĚRA
GRAFY A ANALÝZA DAT
JÁDRO MATEMATICKÉ KOMPETENCE V 8. TŘÍDĚ
ZÁVĚR
LITERATURA

V prvním pololetí r. 2002 náš soubor dokončoval 8. třídu. Právě 8. třídy tvořily v r. 1995 a 1999 jednu z populací českých žáků zahrnutých do mezinárodního srovnávacího výzkum matematických a přírodovědných znalostí - TIMSS. Zároveň byly tehdy testováni také žáci 4. tříd – toho jsme v r. 1998 využili k administraci testů TIMSS (z r. 1995) v našem souboru. V osmé třídě jsme pak tento postup opakovali – použili jsme přitom test TIMSS-R z r. 1999.[1] Získali jsme tak údaje jednak charakterizující náš soubor z hlediska matematických a přírodovědných kompetencí vůči populaci českých žáků, jednak umožňující srovnání výsledků našeho souboru ve 4. a 8. třídě. V tomto textu prezentujeme zatím dílčí výsledky jedné ze tříd souboru. Má označení Modrá, v rámci jejího sledování je mj. podrobně zkoumán vývoj počítání, matematických znalostí a kompetencí.

CELKOVÉ VÝSLEDKY A SROVNÁNÍ 4. A 8. TŘÍDY

Test obsahuje matematickou a přírodovědnou část (nikoli však pro žáky - položky jsou promíchány). Celkové výsledky lze tedy vyjádřit třemi skóry - dvěma dílčími (někdě je označujeme Math a Science) a jejich celkovým součtem.

Naše údaje umožňují jednak celkové srovnání třídy, jednak intraindividuální srovnání 18 dětí, které absolvovaly test ve 4. i 8. ročníku.

[1] Celá tato linie výzkumu by nebyla možná bez spolupráce s oddělením mezinárodních výzkumů ÚIV. Za ni patří náš dík jeho vedoucí dr. Janě Strakové, dále dr. Janě Pelečkové a dr. Vladislavu Tomáškovi.

Celkové výsledky ve 4. třídě

	Počet dětí	Průměr celk. skóru (max = 63)	Směr. odch. celk. skóru	Průměr Math (max = 44)	Směr. odch. Math	Průměr Science (max = 19)	Směr. odch. Science
ČR	405	44,9	8,9	30	7,3	14,9	2,3
LG	101	49,2	10,5	34,1	8,2	15,2	2,9
Mo		49,6	8,0	34,1	6,1	15,4	2,3

Řádek LG obsahuje výsledky celého souboru zkoumaného v longitudinálním výzkumu, řádek Mo pak naší Modrou třídu. Je patrné, jak její výsledky jsou prakticky tytéž jako celého souboru. Obojí se pak příliš neliší od populace ČR v přírodovědných znalostech, avšak liší se o zhruba polovinu směrodatné odchylky v matematické části testu a v důsledku toho i v celkových výsledcích. Přitom reálný rozdíl byl spíše větší. V našem celém souboru (LG) dosáhlo 6 dětí stropu v matematické části testu (44 bodů), zatímco v ČR nikdo, v přírodovědné části (19 bodů) pak 7 dětí (tedy 7%), zatímco v ČR pouze 1,5%. Ovšem v Modré třídě tomu tak bylo jen v přírodovědě (2 děti), v matematice se jen několik dětí stropu blížilo.

Výsledky v 8. třídě jsou diferencovanější.

	Počet dětí	Průměr celk. skóru (max = 82)	Směr. odch. celk. skóru	Průměr Math (max = 47)	Směr. odch. Math	Průměr Science (max = 35)	Směr. odch. Science
ČR[2]	min. 419	48,5		25,7		22,8	
Mo	25	55,9	12,4	30,8	8,6	25,1	4,9

Odstup naší třídy od populace žáků ČR se oproti 4. třídě poněkud zvětšil, zdá se však, že především v přírodovědné části. Ve 4. třídě představoval průměr ČR v matematice 27. percentil výkonů naší třídy, v 8. třídě pak 28. percentil; oproti tomu v přírodovědné části ve 4. třídě 37. percentil, zatímco v 8. třídě 28. percentil. (V celkovém skóru to představuje ve 4. třídě 37. percentil - v 8. třídě pak 32. percentil.)

Jak vypadá srovnání z hlediska skupiny 18 dětí, které navštěvovaly třídu ve 4. i v 8. ročníku? Jejich celkové výsledky se v obou ročnících téměř shodují s celkovými výsledky třídy. Zajímavější je proto intraindividuální srovnání.

Shoda ve výsledcích je velmi vysoká. Z hlediska celkového skóru je korelace skórů 0,94, korelace pořadí 0,90. Jen u 7 dětí je rozdíl pořadí ve skupině větší než 1, výraznější posuny vidíme u 5 dětí. Také výkony v matematice vykázaly překvapivou stabilitu. Korelace výkonů je 0,92, pořadí pak 0,89. Posuny o 2 a více míst v pořadí vidíme u poloviny dětí, výraznější posuny (o 3 místa a více) však jen u čtyř. Prakticky stejný je obraz u výsledků přírodovědné části testu – korelace 0,89 (resp. 0,88). Převažující obraz stability ovšem dokreslují některé

[2] Počet testovaných dětí v ČR je pro každou položku různý, protože jednotlivé testové sešity se některými skupinami úloh překrývaly. Počet tak sahá od minimálního počtu 419 až po 3450. Z tohoto hlediska je počet dětí v naší třídě velmi nízký a akcentuje tak předběžnost prezentovaných celkových výsledků. Na druhé straně představuje Modrá třída dlouhodobě průměr našeho souboru a mohla by dobře posloužit k jejich odhadu.

Směrodatné odchylky v populaci ČR nejsme schopni stanovit, protože průměrný skór jsme získávali přepočtem procentuální úspěšnosti celého vzorku v jednotlivých položkách, nikoli z individuálních výsledků. I celkové skóry za ČR jsou tak aproximací, resp. agregací výsledků, neměly by se však příliš lišit od výsledků těch, kteří řešili dané položky pouze v rámci stejného testového sešitu, jako náš soubor.

individuální trajektorie. Tak největší posun k lepším výkonům zaznamenáváme u dvou dívek - u jedné v obou částech testu, u druhé jen v přírodovědné. Také tři největší propady výkonů mají každý jinou konstelaci. V jednom případě je negativní posun výrazný v matematice a nízký v přírodovědě; jde však o dívku, která patří ke špičce třídy a její posun je dán spíše rozšířením této špičky, resp. neznamená žádný znatelný pokles výkonů. Ve druhém případě je naopak výrazný negativní posun v matematice spojen jen s mírným posunem v přírodovědě, ve třetím případě je nejdramatičtější negativní posun v matematice částečně kompenzován vzestupem v přírodovědě.

Jak s těmito změnami mezi 4. a 8. třídou souvisí prospěch? Mezi 18 dětmi, od nichž máme údaje v obou ročnících, najdeme relativně stabilní skupiny, reprezentující nadprůměr, průměr a podprůměr jak v prospěchu, tak ve výkonu v testu TIMSS. Vezmeme-li v úvahu jen skór v matematické části testu (Math), pak skupinu, která je nadprůměrná jak v Math tak v prospěchu, a to ve 4. i 8. třídě, tvoří 4 děti. Průměr a podprůměr třídy už není tak vyhraněný a stabilní - skupinu s převažujícími průměrnými výkony tvoří také 4 děti, převahu podprůměrných výkonů vidíme u 3 chlapců. Přesný obraz by ovšem daly jen individuální trajektorie.

Souvislost s některými předměty ukazují korelace v následující tabulce.

4. třída	Průměr známek	Český jazyk	Matematika	Přírodověda	Angličtina			
Celk. skór	0,76	0,76	0,88	0,35	0,61			
Math	0,72	0,73	0,85	0,29	0,58			
Science	0,73	0,70	0,77	0,44	0,56			
8. třída	Průměr známek	Český jazyk	Matematika	Přírodopis	Angličtina	Zeměpis	Chemie	Fyzika
Celk. skór	0,76	0,77	0,84	0,31	0,54	0,65	0,79	0,08
Math	0,72	0,77	0,81	0,25	0,55	0,62	0,73	0,09
Science	0,69	0,64	0,75	0,35	0,44	0,59	0,74	0,05

Překvapivé jsou snad nízké korelace výsledků testu s přírodovědou ve 4. třídě a s přírodopisem a fyzikou v 8. třídě. Je na nich ovšem patrný problém korelací se známkami v jednotlivých předmětech. Ve všech uvedených případech byly na vysvědčení použity pouze (s jedinou výjimkou) dva klasifikační stupně. Nejlepším ukazatelem je proto z tohoto hlediska průměrný prospěch.

U ostatních uvedených předmětů (s diferencovanější klasifikací) lze uvažovat o tom, nakolik jsou blízké kompetence vyžadované na jedné straně školním předmětem a na druhé straně testem.[3]

[3] Zajímavou skutečnost vysoké korelace výsledku testu nejen s matematikou a chemií a zeměpisem, ale i s češtinou a angličtinou lze pojmout dvěma odlišnými způsoby. Obligátní vysvětlení v psychologii odkáže na obecné rozumové schopnosti, které za těmito korelacemi stojí. Pro pochopení povahy těchto obecných schopností odkáže jinam, ke své vlastní teorii, aplikované v diagnostických nástrojích co možná nejnezávisleji na školním vzdělání. Druhou možností je však hledat obsah těchto obecných kompetencí nikoli mimo školu, ale právě v nezjevném, hlubším obsahu školních předmětů, v jeho hlubších, podpovrchových strukturách a strukturogenních účincích na vývoj myšlení dětí.

Matematická část testu má celkem 45 položek. Ty lze rozdělit do několika obsahových oblastí. Vyjdeme z mezinárodního rozdělení a následně s ním srovnáme následně naše vlastní, které odpovídá našim dosavadním analýzám.

Oblast podle TIMSS	Počet položek	Naše třída – úspěšnost v %	ČR – úspěšnost v %	Mezinár. průměr – % úspěšnosti	ČR – oblast celkově	Mezinár. prům. – oblast celkově
Význam zlomků a čísel	16	65,3%	53,4%	51,4%	507	487
Geometrie	5	69,6%	61,9%	54,1%	513	487
Algebra	10	61,6%	50,2%	42,9%	514	487
Měření	9	67,1%	51,7%	43,7%	535	487
Reprezentace dat, analýza a pravděpodobnost	5	77,6%	74,4%	67,4%	513	487
Celkem	45	66,2%	55,5%	50,1%	520	487

V tabulce uvádíme ve 2. – 4. sloupci úspěšnost v položkách testu, který jsme použili, v 5. - 6. sloupci celkové výsledky vyjádřené ve skóru užívaném pro mezinárodní srovnání.

Způsob členění oblastí, jak byl proveden v TIMSS, nám z mnoha důvodů nevyhovuje. Některé oblasti jsou z našeho hlediska koncipovány podle povrchních souvislostí. Patrné je to zejména u oblasti Měření, kam jsou zřejmě zařazeny všechny úlohy, v nichž se nějak pracuje s jednotkami délky, obsahu a objemu. Tak sem např. spadá položka, v níž se má vybrat údaj o délce krabičky, který může po zaokrouhlení být 9 cm, stejně jako položka, v níž se má určit obsah obdélníka. Z našeho hlediska je pro první položku podstatnější zaokrouhlování jako zacházení s čísly než to, že jde o centimetry a délku krabičky, a řadíme ji tedy do oblasti Čísla. Obsah obdélníku pak řadíme do Geometrie jakožto úlohu, apelující na koncept členění geometrického útvaru.

Některé oblasti jsou málo diferencované. Tak zejména oblast Smysl zlomků a čísel řadí do téže oblasti jak práci se zlomky tak i s desetinnými čísly, ale také slovní úlohy, pracující s různými koncepty kontextuálních souvislostí. Pro naši potřebu zavádíme diferencovanější členění.

Konečně oproti TIMSS používáme naše členění nedisjunktivně. Jedna položka testu, která obsahuje více aspektů, může tak být analyzována v různých skupinách úloh.

Dále uvádíme přehledné srovnání začlenění položek v TIMSS a v naší analýze..

Pol.	Naše zařazení	Zařazení podle TIMSS	Pol.	Naše zařazení	Zařazení podle TIMSS
A1	Zlomky	Význam zlomků a čísel	A5	Geometrie	Geometrie
B9	Zlomky	Význam zlomků a čísel	B11	Geometrie	Geometrie
E3	Zlomky	Význam zlomků a čísel	C1	Geometrie	Měření
I6	Zlomky	Význam zlomků a čísel	C3	Geometrie	Geometrie
T2b	Zlomky, Slovní úlohy	Význam zlomků a čísel	E2	Geometrie	Geometrie
A3	Čísla	Měření	E6	Geometrie	Měření
B10	Čísla	Význam zlomků a čísel	I7	Geometrie	Měření
C4	Čísla	Význam zlomků a čísel	S2a	Geometrie	Měření
C6	Čísla	Význam zlomků a čísel	S2b	Geometrie	Měření
E4	Čísla	Význam zlomků a čísel	S3c	Geometrie	Měření
I5	Čísla	Význam zlomků a čísel	T3	Geometrie	Měření
T4	Čísla	Význam zlomků a čísel	I2	Slovní úlohy; Zlomky	Význam čísla a zlomku
A2	Algebra	Algebra	S3	Slovní úlohy	Význam čísla a zlomku
B12	Algebra	Algebra	T1	Algebra; Slovní úlohy	Algebra
C5	Algebra	Algebra	T2a	Algebra; Slovní úlohy	Algebra

Pol.	Naše zařazení	Zařazení podle TIMSS	Pol.	Naše zařazení	Zařazení podle TIMSS
E5	Algebra	Algebra	A4	Úměra; Slovní úlohy	Význam čísla a zlomku
I1	Algebra	Algebra	B8	Úměra; Slovní úlohy	Význam čísla a zlomku
I4	Algebra	Algebra	I3	Úměra; Slovní úlohy	Měření
I8	Algebra	Geometrie	B3	Úměra	*Fyzika*
S1a	Algebra	Algebra	E11	Úměra	*Fyzika*
S1b	Algebra	Algebra	I13	Úměra	*Fyzika*
S1c	Algebra	Algebra			

Pol.	Naše zařazení	Zařazení podle TIMSS
A6	Reprezentace dat, analýza a pravděpodobnost – průměr	Reprezentace dat, analýza a pravděpodobnost
B7	Reprezentace dat, analýza a pravděpodobnost – grafy	Reprezentace dat, analýza a pravděpodobnost
C2	Reprezentace dat, analýza a pravděpodobnost – grafy	Reprezentace dat, analýza a pravděpodobnost
E1	Reprezentace dat, analýza a pravděpodobnost – grafy	Reprezentace dat, analýza a pravděpodobnost
I9	Reprezentace dat, analýza a pravděpodobnost – pravděpodobnost	Reprezentace dat, analýza a pravděpodobnost

V našem členění tedy není oblast Měření, dosti odlišný obsah má oblast Geometrie (především absorbovala většinu položek „Měření“), zvlášť jsou vyčleněna Čísla a Zlomky a jsou také vyčleněny některé oblasti, které TIMSS nekoncipuje, především Slovní úlohy a Úměra.

Srovnání výsledků naší třídy s výkony žákovské populace ČR a s mezinárodním průměrem v takto vyčleněných položkách pak vypadá následovně. (Jde o srovnání v položkách varianty testu, která byla použita v našem výzkumu. V samotném výzkumu TIMSS bylo použito více variant, které se s námi použitým testem v různé míře překrývaly. Výzkum TIMSS tak mohl sledovat mnohem širší rozsah položek, než pokrývala jedna varianta. Varianty testu – testové sešity – byly vyrovnané co do obtížnosti i co do zastoupení jednotlivých obsahových oblastí, jak je definoval TIMSS.)

	Počet položek	Sledovaná třída	ČR v položkách testu	Mezinárodní průměr v testu
Čísla	7	77,1%	70,8%	58,6%
Zlomky	5	59,2%	43,1%	48,3%
Zlomky vč. slov. úloh	6	60,4%	44,2%	48,7%
Algebra	10	58,0%	48,5%	42,8%
Algebra vč. slov. úloh	12	58,0%	46%	41%
Geometrie	11	68,4%	55,0%	47,9%
Slovní úlohy	4	56,0%	38,9%	36,3%
Slovní úlohy vč. úměry a zlomků	8	58,5%	42,4%	40,0%
Úměra	3	73,3%	58,5%	54,3%
Úměra vč. fyziky	6	66,0%	51,4%	49,6%
Grafy	3	76.0%	73,4%	67,0%
Grafy, průměr, pravděpodobnost	5	77,6%	74,4%	67,4%
Celkem		66,2%	55,5%	50,1%

Tabulka umožňuje identifikovat oblasti, ve kterých se třída výrazně vzdaluje mezinárodnímu průměru a zároveň i české populaci. Ty lze pak považovat za její specifické silné stránky. Patří k nim zejména Geometrie, Slovní úlohy jak s Úměrou a se Zlomky tak bez nich, Algebra (zejména se zahrnutím slovních úloh) a chápání Úměry.

Jedinou oblastí, kde naše třída vysoce překračuje mezinárodní průměr a průměr českých žáků se jí přitom blíží, jsou Čísla. Tato oblast tedy reprezentuje nejlépe, kde jsou čeští žáci nejsilnější.

Naproti tomu Zlomky představují silnou stránku naší třídy, ale u českých žáků jako celku jsou naopak slabinou. Ať jsou součástí slovních úloh či nikoli, představují jedinou oblast testu, kde jsou žáci ČR pod mezinárodním průměrem. (Při zahrnutí Čísel a Zlomků do téže oblasti je tato skutečnost nezřetelná.)

V oblasti Grafů, analýzy dat a pravděpodobnosti je výkon naší třídy mírně nad mezinárodním průměrem a je tak víceméně ve shodě s českou populací. Tato oblast je ovšem v testu z hlediska našeho členění zastoupena nejslaběji – představuje 5 z 45 matematických položek [4]

Dále budeme prezentovat popis kritických položek jednotlivých oblastí spíše s komentářem než důkladnou kvalitativní analýzou.

ČÍSLA

Děti naší třídy bezpečně zvládly vztah zaokrouhlení čísla s jedním desetinným místem na celé číslo (A3 – 100% úspěšnost), sestavit ze čtyř cifer největší a nejmenší možné číslo a stanovit rozdíl mezi nimi (E4 – 88%). Jen ojedinělé chyby dělaly při určení rozdílu mezi dvěma čísly o dvou desetinných místech (I5 – 80%), určení nejhoršího odhadu součtu dvou trojciferných čísel (C6 – 76%) a určení tloušťky 400 listů papíru, známe-li tloušťku jednoho (T4 – 76%). Více než dvě chyby v posledních čtyřech uvedených položkách jsme našli ve třídě u 4 dětí s nejhoršími výkony v matematické části testu.

Kritická je **položka B10** („Které z následujících čísel je nejmenší? – a) 0,625; b) 0,25; c) 0,375; d) 0,5; e) 0,125“)[5] , a to v tomto smyslu: Všechny děti s 10 nejlepšími výkony v testu tuto položku plní. Z ostatních 15 ji pak plní 6 dětí. (Pro 4 z nich je přitom tato oblast silnou stránkou, dělají v ní nejvýše jednu chybu ze 7 položek.) Z 9 chyb je 8 odpovědí „a“, která může být způsobena také čtenářskou chybou, nikoli nutně neporozuměním desetinným číslům. Naproti tomu chyby „d“, zjevně indikující právě potíže s desetinnými čísly, se ve třídě vyskytla jednou. (V ČR je mnohem častější – 13,5% žáků, ještě častější je pak mezinárodně – 24,2%).

Položka C4 („Pro kterou z uvedených dvojic čísel platí, že 2,25 je větší než první číslo a zároveň menší než druhé číslo.“ ve třech z nabízených dvojic je kombinováno celé číslo se zlomkem se jmenovatelem 4) má ve sledované třídě nesystematickou distribuci chyb. Je to jedna z mála položek, v nichž je výsledek třídy (56% správných odpovědí) pod průměrem ČR. Uvažujeme o tom, že se tu při chybách kombinuje neporozumění instrukci s potížemi převodu čtvrtin na desetinná čísla.

[4] Výsledky našich žáků ovlivňuje tato oblast zejména ve srovnání se zeměmi s nejlepšími výsledky. Ale tady stojí za povšimnutí dvě skutečnosti. Jednou jsou zcela mimořádné výsledky Japonska ve všech třech úlohách s grafy (vesměs přes 90% úspěšných řešení). Vůči nim zaostávají i další země absolutní špičky (kolem 85%).

Druhou skutečností je to, že ve dvou z těchto úloh (C2 a E1) dosahují žáci ČR výsledků srovnatelných se zeměmi špičky (tedy vyjma Japonska), avšak v úloze B7 za nimi zaostávají o 20-30%. Tato úloha je tedy specifická ještě něčím jiným, než je nutnost čtení z grafu.

[5] Položka je uvedena v publikaci ÚIV „Úlohy z matematiky a přírodních věd pro žáky 8. ročníků“, s. 20.

ZLOMKY

Nejsnazší **úlohu I6** („Napiš zlomek, který je menší než 4/9“) řeší 76% dětí v naší třídě (oproti 57,9% v ČR a 59,8% mezinárodně). Úloha je zajímavá tím, že obdobná byla zadána už ve 4. třídě: napsat zlomek větší, než 2/7. Šokující je zjištění, že ji ve třídě řešilo správně 77,3% dětí. (Složení třídy se přitom nezměnilo nijak dramaticky, z dnešních 25 dětí jich bylo v tehdejší 4. třídě 18.)

Jak vypadala tehdejší řešení?

Adekvátní změnu čitatele při ponechání jmenovatele volilo ve 4. třídě 12 dětí, zmenšení jmenovatele při ponechání čitatele 3 děti, zvětšení obou, přičemž řešení je tak možná jen náhodně správné, zvolily 2 děti (4/8, resp. 10/10).

Z chybných řešení se nejčastěji opakovalo „2/8“, tedy zmenšení čitatele a současně zvětšení jmenovatele.

Srovnání s 8. třídou ukazuje obdobné strategie. Adekvátní úprava čitatele (s ponecháním jmenovatele) se vyskytla 9x, úprava jmenovatele při ponechání jmenovatele 5x, adekvátní úpravy obou 4x. Snad jde tedy o náznak, že se trochu snížila četnost úpravou čitatele, tedy změnou počtu „x-tin“, která může být vedena do značné míry jazykovou analogií: „3 devítiny“ je méně než „4 devítiny“.

Další srovnání říká, že z 18 dětí, které dělaly test ve 4. i 8. třídě, jich 10 řešilo tuto úlohu správně v obou testech, 1 v obou případech špatně, 4 děti pak špatně ve 4. a správně v 8. třídě. V rozporu se „směrem vývoje“ jsou řešení 4 dětí, které řešily úlohu správně ve 4. třídě, ale chybně v 8. To poukazuje k tomu, že procento správných řešení ve 4. třídě neindikuje přesně, kolik dětí problematiku porovnávání zlomků úspěšně zvládlo, nicméně i tak je velmi vysoké a do 8. třídy jakoby jen stagnovalo. Může k tomu přispívat ještě jedna skutečnost: v době administrace testu ve 4. třídě byly zlomky právě probírány, a to dokonce početní operace s nimi.

Úlohu v 8. třídě neřeší opravdu především děti s nejhoršími výkony, 6 chyb se tu kumuluje u 10 dětí s výkonem 27 bodů a nižším.

Podobně jednoznačnou distribuci chyb nacházíme u **úlohy A1** („Kolik dalších čtverečků na obrázku musí být vystínováno, aby byly vystínovány 4/5 čtverečků“- přičemž jsou vystínovány 3 z 10 čtverečků). 7 z 8 chyb tu najdeme v téže skupině dětí jako u předchozí položky I6.

Zhruba stejnou úspěšnost i stejnou tendenci vykazuje **úloha E3** (vyjádřit zlomkem, jakou částí hodiny je doba mezi 1 h 10 min a 1 h 30 min). Zde však podle našeho názoru hraje roli komplikované (resp. zhuštěné) znění zadání a také přechod k nedesítkové soustavě. (Čtyři z osmi chyb volí odpověď „1/5“, jako by 20 minut bylo vztaženo ke 100 a nikoli k 60.)

Opakem je **položka T2b**[6], kde mají děti vyjádřit zlomkem počet knih v menších krabicích ku celkovému počtu knih. Krabic je přitom stejný počet, v menších je 8 knih, ve větších 12. Úloha je tedy řešitelná i bez správného zjištění, kolik knih z celkového počtu 140 bylo v menších krabicích, resp. kolik bylo menších krabic (úloha T2a). Reálně však takový případ nenastal, úlohu řešilo správně jen 6 dětí ze 14 těch, které řešily správně úlohu T2a.[7] Šest správných řešení (úspěšnost 24%) jsme našli u 9 dětí s nejlepšími výsledky. Blízko správného řešení byly další 3 děti – 2 z nich uvedly poměr dvou částí (namísto poměr části k celku), jeden pak pracoval se správným vztahem, ovšem s nesprávným číslem z předchozí části úlohy. Třetina dětí neuvedla žádnou odpověď. Ve zbývajících řešeních pak převažuje

[6] Položka je uvedena v publikaci ÚIV „Úlohy z matematiky a přírodních věd pro žáky 8. ročníků“, s. 31-32.

[7] Děti tu tedy nejspíše pracují s konkrétními čísly. Vztáhnout poměr počtu knih v každé dvojici krabic na celkový počet a navíc ještě vysoudit z poměru dvou částí poměr jedné z těchto částí k celku a vyjádřit ho zlomkem je zřejmě mimo jejich možnosti.

tendence vyjádřit „něco“ jako zlomek: 7/1 zřejmě jako prostý počet krabic, ovšem vyjádřený zlomkem, 1/8 jako jedna kniha v menší krabici, 1/12 jako jedna kniha ve větší krabici. Jen jedno uvedené řešení nerespektuje, že má jít o zlomek – uvádí počet knih: 56.

Vztah oblasti Zlomky k celkovému výkonu vyjadřuje tabulka:

celkový skór/Zlomky	skór 4-6	skór 0-3
nadprůměr	10	3
podprůměr	2	10

ALGEBRA

V našem členění zahrnuje 10 úloh, se slovními úlohami pak 12.

Bez větších problémů řešily děti úlohu, v níž bylo třeba z obrázku váhy v rovnováze, prezentujícího z uspořádání „[1 kg + 1 polovina cihly] = [1 cihla]” vyvodit hmotnost cihly (**A2** – úspěšnost 92%). Stejně snadná byla také úloha **B12**, v níž bylo třeba identifikovat v nabídce rovnici vyjadřující skutečnost, že „jestliže *n* vynásobíme 7 a pak přičteme 6, je výsledek 41“[8].

Jen o něco obtížnější je **položka E5** (úspěšnost 80%), v níž mají děti identifikovat pravidlo, jak u tří dvojic čísel (3 – 6, 6 – 15, 8 – 21) získat z prvního čísla druhé. Děti neformulují pravidlo samy, pouze vybírají z nabídky – stačí tedy, aby postupně ověřily nabídnutá pravidla na zadaných dvojicích. Celkem 5 chyb se vyskytuje vesměs v dolní polovině pořadí, ale tam nijak systematicky. Přibližně totéž lze říci o **úloze C5**, v níž děti mají zjistit počet zápalek v 10. kroku systematicky se rozvíjejícího obrazce, přičemž první tři kroky jsou zobrazeny.

Strukturálně hodně podobná úloze C5 je **série úloh S1 a, b, c**. Jde tu o rozvoj počtu trojúhelníků, z nichž každý je polovinou jednoho čtverečku postupně se zvětšující čtvercové sítě. V prvním kroku je složena z jednoho čtverečku (= 2 trojúhelníků), ve druhém ze 4 čtverečků (= 8 trojúhelníků), ve třetím z 9 čtverečků (= 18 trojúhelníků). Tyto kroky jsou zobrazeny. Úloha T1a požaduje určit počet trojúhelníků ve 3. a 4. kroku. Předpokládali bychom, že úloha S1a je nanejvýš o něco obtížnější, protože tu jde o dvourozměrný nárůst obrazce, zatímco v C5 spíše lineární. Tento předpoklad se potvrzuje nikoli jen přibližně stejnou celkovou úspěšností, nýbrž také při intraindividuálním srovnání: Z 18 řešitelů úlohy C5 řeší úlohu S1a správně 13 dětí, chybně 5. Opačné případy (správně úloha S1a a chybně C5) najdeme jen 2.

Jednoznačná a logická souvislost s dalšími úlohami je pak viditelná i ve výsledcích. Z 12 řešitelů úlohy S1a jich umí v úloze S1b určit počet trojúhelníků v 7. kroku 10 (a nikdo jiný), z nich 7 jich umí určit počet trojúhelníků v 50. kroku a z těch pak 5 je schopno vlastními slovy vysvětlit, jak při tom postupovat. Těchto 5 dětí patří celkovým skórem mezi 6 nejlepších v matematické části testu.

Vysokou úroveň kompetence v oblasti Algebry indikuje také **položka I1** (úspěšnost 40%), v níž mají děti rozhodnout, co představuje proměnná ve výrazu „k + (k+2) + (k+4) = 84“, jehož pomocí se hledají tři po sobě jdoucí sudá čísla, jejichž součet je 84. Ze skupiny 8 nejlepších pocházelo 7 z 10 správných řešení. (Zbylá tři jsou rozložena nesystematicky.)

Naproti tomu výsledky položek I4 a I8 měly ve třídě zřejmě omezenou vypovídací hodnotu. Chyby v **položce I4**, v níž měly děti najít další číslo společné dvěma aritmeticky rostoucím řadám, byly zcela nesystematické: v horní polovině celkového pořadí (13 dětí) najdeme 7 chyb, v dolní polovině (12 dětí) 8 chyb. Nenašli jsme snad pokus řešit úlohu

[8] Položka je uvedena v publikaci ÚIV „Úlohy z matematiky a přírodních věd pro žáky 8. ročníků“, s. 44.
V mezinárodní publikaci o výsledcích TIMSS je úloha przentována jako příklad tzv. „Median International Benchmark“ (jakýsi standard průměrné úrovně) – viz Mullis et al., s. 82.

algebraickou úvahou, děti většinou vypisovaly pokračování obou řad, až narazily na společné číslo. V tomto elementárním postupu však dělaly překvapivé množství chyb. Odhadujeme, že je tu mj. projevem jejich nízké počtářské zběhlosti, dané využíváním kalkulaček pro k nejjednodušší výpočty.

V položce **I8** (36%), v níž ze dvou dvojic souřadnic, jimiž prochází přímka, měly děti určit souřadnice bodu, který na této přímce také leží. Nízká úspěšnost souvisí podle našeho názoru s tím, že ortogonální systém souřadnic do té doby třída vůbec neprobírala. Bylo by sice možno předpokládat, že za takové situace bude položka identifikovat vysokou úroveň kompetence, avšak 3 případy správných odpovědí z dolní třetiny pořadí nás vedou k závěru o vysoké míře náhodnosti správné odpovědi. Projevuje se tu patrně možnost vybrat ji na základě neadekvátní úvahy, která zadané dvojice 2;3 a 4;7 doplňuje tak, že konstruuje dvě na sobě nezávislé řady: první členy dvojic doplňuje na řadu 2-3-4 a druhé na řadu 3-5-7 a sestavuje tak „správné“ řešení 3;5.

Vysokou míru kompetence v oblasti Algebry tedy vyznačuje schopnost postihnout a formulovat – slovně nebo algebraickou formalizací - pravidlo rozvoje nějakého počtu nebo čísel, jak ji operacionalizují zejména položky I1 a S1 b, c.[9]

GEOMETRIE

Na rozdíl od TIMSS sem řadíme všechny úlohy, které souvisejí s geometrickým členěním objektů nebo také s členěním geometrických objektů. Spadá sem zejména několik položek, které TIMSS zařazuje do oblasti Měření.

Nejsnadnější položky v této oblasti mají úspěšnost řešení 80-90%. Jde v nich o elementární prostorovou představivost při přetáčení krychle (B11 – 88%)[10], porovnání objemu kvádrů členěných na stejné krychličky (C1 – 84%), pravdivost výroků srovnávajících dva shodné lichoběžníky, přičemž nesprávné varianty testují především elementární orientaci v geometrických pojmech: pravý úhel, stejně dlouhé strany, obvod, obsah (C3 – 84%), popis trojúhelníků (ve čtverci členěném úhlopříčkami) a jejich ne/shodnost (A5 – 80%).

Obsahově se k těmto položkám přimyká úloha **E2**, v níž jde o součet úhlů v trojúhelníku a o popis úhlu. Ve shodných trojúhelnících je v každém zadán odlišný úhel, je třeba určit velikost úhlu, shodného s třetím (jeho shodnost je z obrázku zjevná i bez znalosti poučky o shodnosti souhlasných úhlů). Úspěšných bylo 60% řešení. Chybné varianty nejsou jednoznačné (z hlediska úvahy, která za nimi stojí; přesto se nám u 5 z 9 chyb zdá, že problémem je čtení označení zadaného úhlu, že totiž za vrchol úhlu EGC považovaly děti nikoli prostřední, ale první nebo poslední písmeno.

Ve zbylých položkách, které řadíme do oblasti Geometrie, jde o různě složité varianty zadání konceptu obsahu a obvodu obdélníku či čtverce. Nejsnazší bylo identifikovat z obrázku obdélníka vepsaného kosodélníku jeho rozměry a vypočítat jeho obsah (T3[11] – 80%). Pomineme-li jedno neřešení úlohy (u chlapce, který zřejmě nestihl poslední tři úlohy v druhé části testu), je pouze jedna ze 4 chyb záměnou obsahu za obvod. V dalších chybách jde zjevně o násobení rozměrů, avšak buď je jeden z rozměrů špatně identifikován (to spíše) nebo jde o chyby v násobilce čtyř.

---

[9] Důležitá je právě schopnost explicitní formulace; intuitivní, nereflektované postižení vztahů mezi čísly zřejmě k algebraické kompetenci nepostačuje. Při zběžném zkoumání výsledků číselných řad v Amthauerově IST, administrovaném v této třídě na počátku osmé třídy, se zdálo, že dobrý výsledek v číselných řadách tvoří nutný, ale nikoli postačující předpoklad k úspěšnosti v oblasti algebry.

[10] Úloha je uvedena v publikaci ÚIV „Úlohy z matematiky a přírodních věd pro žáky 8. ročníků“, s. 37.

[11] Úloha je uvedena v publikaci ÚIV „Úlohy z matematiky a přírodních věd pro žáky 8. ročníků“, s. 67.

Poměrně vysokou úspěšnost má výpočet obsahu chodníku kolem bazénu, přičemž náčrtek zobrazuje bazén jako bílý obdélník uvnitř většího šedého, resp. lemovaný šedými okraji (**I7** – 72%). V šesti ze 7 chyb figuruje pouze výpočet obsahu většího obdélníku bez odečtení „bazénu“. Zajímavostí je, že častější (4 případy) je přitom varianta s numerickou chybou, kdy při rozměrech 70 a 23 docházejí děti k výsledku 161 namísto 1610. Opět to svědčí o nízké míře počtářských dovedností.

Zajímavá pro srovnání se 4. třídou je úloha **E6**, v níž je třeba určit délku strany obdélníka, který byl ohnut z drátu dlouhého 20 cm, je-li jeho šířka 4 cm. Ve 4. třídě šlo o jednu ze dvou nejtěžších položek matematické části testu (znění bylo shodné), kterou vyřešily pouze 2 děti (z 22). Shodou okolností právě jedno z nich dělá v 8. třídě chybu, která je nejčastější: počítá druhý rozměr dělením, jako by byl zadán obsah, nikoli (implicitně) obvod.

Dnešní úspěšnost třídy v úloze je 56 % (14 dětí z 25). Z 18 dětí, které test absolvovaly ve 4. třídě, ji dnes řeší 10 správně – tedy přibližně stejné procento jako v celé třídě.

Nejobtížnější úlohy v oblasti Geometrie vycházely ze zadání obrazce ve tvaru rovnoramenného kříže, složeného z 5 čtverců, u něhož je znám obsah. Úloha S2a požadovala určit obsah jednoho čtverce v obrazci, úloha S2b délku strany jednoho čtverce a úloha S2c obvod celého obrazce. Vztah mezi úspěšností řešení těchto tří úloh je opět jednoznačný: z 16 dětí, které řeší správně úlohu S2a, jich 12 (a nikdo jiný) řeší úlohu S2b, z těch pak 9 (a nikdo jiný) řeší úlohu S2c. Všech 9 řešitelů úlohy S2c a 11 z 12 řešitelů úlohy S2b je přitom z horní poloviny pořadí podle celkového výkonu v matematické části testu (13 dětí). Jinak řečeno, z dolní poloviny pořadí (12 dětí) řešily správně jen 4 děti úlohu S2a a jediné dítě S2b.

Kritickým místem kompetence v oblasti Geometrie je tedy v naší třídě bezpečné zvládnutí konceptů obsahu a obvodu čtverce a obdélníka (včetně jejich rozlišování), tak aby mohly být používány spontánně, nepříznakově, jako implicitní předpoklad složitějších zadání.[12]

SLOVNÍ ÚLOHY

Tuto oblast jsme vyčlenili s vědomím toho, jaký význam mají slovní úlohy ve škole a že patří pro děti k nejobtížnějším. Zahrnuli jsme sem takové úlohy, jejichž slovní zadání vytváří složitější kontext, než je tomu u monotriadických úloh (tj. takových, kde jsou zadány dvě číselné hodnoty a operací s nimi je třeba dojít ke třetí). Takovému vymezení vyhovuje v testu 8 úloh, přičemž však většina z nich některým svým aspektem spadá zároveň i do jiné oblasti.

Nejsnazší se ukázala jedna ze slovních úloh s úměrou: „Jestliže 100 g určité potravy obsahuje 300 J energie, kolik energie obsahuje 30 g téže potravy?“ (B8[13] - 88%).

Další úloha s úměrou byla o něco obtížnější: Dívka uběhla 3 kola za stejnou dobu jako chlapec 4 kola. Kolik kol uběhne dívka, když chlapec uběhne 12 kol? (**A4** – 68%) Chyby se vyskytují především u dětí s nejhoršími výkony – 5 nejhorších vesměs tuto úlohu neřeší. Přesto ojediněle i u dětí s průměrnými výkony narážíme na skutečnost, že nekoncipují zadání jako vztah úměry (resp. vyšší rychlost dívky), nýbrž jako náskok jednoho kola, který se už dále nezvyšuje (rychlost už zůstává stejná).

Zhruba stejně obtížná byla úloha T1 (72%), která by ve škole byla označena jako úloha o dělení celku na nestejné části. Jde přitom o dělení na dvě části, které je z těchto úloh nejsnazší a je dětem dostupné už v páté třídě, protože nevyžaduje nutně sestavit rovnici. Ovšem v době

[12] Odhadujeme ovšem, že reálně je kompetence řešit tyto úlohy ve třídě o něco vyšší. Zdá se, že vysoký podíl neřešení úloh, který tvoří absence jakékoli odpovědi (21 z 38 případů neřešení) může ukazovat také na neochotu se úlohou, která se na první pohled jeví složitější a v níž je třeba dělat vlastní výpočty a ne jen vybrat z nabídnutých odpovědí, vůbec zabývat. Úlohy S2a, b, c byly navíc na konci první části testu.

[13] Položka je uvedena v publikaci ÚIV „Úlohy z matematiky a přírodních věd pro žáky 8. ročníků“, s. 20.

zadání testu naše třída právě „slovní úlohy s rovnicemi“ probírala a většina dětí také rovnici bez problémů aplikovala.

Zadání požaduje určit počet chlapců a dívek v klubu, když celkově je tam 86 dětí a dívek je o 14 více.[14] Chybná řešení nacházíme s jedinou výjimkou v dolní polovině pořadí – chybuje tu 6 z 12 dětí.

Další dvě slovní úlohy pracují se zlomky. Úloha I2 se ptá, o kolik má jeden člověk více románů než druhý – oba mají 45 knih, u jednoho jsou romány 4/5 jeho knih, u druhého 2/3 jeho knih. Úspěšnost třídy v této úloze (68%) dokazuje poměrně dobrou úroveň zvládnutí elementárního významu zlomku v kontextu slovního zadání. Rozložení chyb je podobné jako v předchozí úloze: s jedinou výjimkou nacházíme chyby pouze v dolní polovině pořadí, chybuje tam 7 dětí z 12.

Jen o něco obtížnější je **úloha T2a**[15]: 140 knih je zabaleno ve dvou typech krabic – po 8 a po 12 kusech, obou krabic je stejný počet. Kolik je krabic po 12 kusech? Úspěšných řešení je 56% (14 dětí z 25). Dvě z chybných řešení lze považovat jen za nepřesnou interpretaci otázky, protože uvádějí počet knih ve větších krabicích namísto počtu krabic. Interpretace dalších chybných řešení by vyžadovala podrobnější analýzu individuálních postupů..

Nejobtížnější slovní úlohou se ukázala být **úloha S3** (úspěšnost 28%). Bylo to pro nás velmi překvapivé, protože její řešení je podle našich zkušeností dostupné dětem možná už v páté třídě. Byť je úloha strukturálně nejsložitější z prezentovaných, prezentuje text zadání velmi známé dílčí kontexty, z nichž žádný by nepředstavoval pro děti problém. Úloha se ptá, kolik paliva zůstane v nádrži, původně plné, která pojme 45 litrů, na konci výletu dlouhého 350 km při spotřebě 8,5 litrů/100km.[16] Struktura úlohy má tedy tři parciální triadické kontexty (pokud budeme za speciální kontext považovat úpravu ujeté vzdálenosti na stovky kilometrů, aby bylo možno ji vztáhnout ke spotřebě na 100 km, či jinou analogickou úpravu; další dva dílčí kontexty představuje „spotřebované palivo“ a „zbytek z celé nádrže“), uspořádané hierarchicky ve čtyřech úrovních.

Bližším zkoumáním ovšem zjišťujeme, že k redukci struktury dochází jen v případě dvou variant chybných odpovědí, kde je zjevně pouze vypočítáno množství spotřebovaného paliva (v jedné variantě navíc s numerickou chybou) a opomenut výpočet zbytku paliva v nádrži. Tyto dvě varianty volí 9 dětí. Vezmeme-li v úvahu tři případy zcela chybějící odpovědi, pak zbylých 6 chybných řešení nepředstavuje chyby strukturální, nýbrž numerické, které vznikají buď při násobení 3,5*8,5 (či analogické variantě výpočtu spotřebovaného paliva) nebo při odčítání 45 - 29,75.

Strukturální chyby jsou častější v dolní polovině pořadí (dopouští se jich 6 dětí z 12), ale třikrát je najdeme i u dětí z lepší poloviny celkových výkonů. Chyby pouze numerické (při strukturálně adekvátním postupu) jsou rovnoměrně rozloženy v obou polovinách (po třech).

Lze shrnout, že slovní úlohy nejsou v testu nijak výrazně zastoupeny, většina slovních úloh představuje tříúrovňovou strukturu se třemi triádami (včetně dělení celku na dvě nestejné části) nebo nejjednodušší případy úměry (kterou jinde charakterizujeme jako shodnou strukturaci dvou celků). Ve škole by takové úlohy patřily k velmi jednoduchým, většinou se děti v 8. třídě setkávají s mnohem složitějšími.

Výsledky ve slovních úlohách lze v naší třídě zřetelně rozdělit do tří pásem. Přidržíme-li se dosavadního členění na horní a dolní polovinu pořadí v celkovém výkonu, pak platí, že v horní polovině najdeme 5 výsledků nadprůměrných a 8 průměrných, zatímco v dolní části pořadí 2 výkony průměrné a 10 výkonů podprůměrných.

[14] Úloha je uvedena v publikaci ÚIV „Úlohy z matematiky a přírodních věd pro žáky 8. ročníků“, s. 50.
[15] Tamtéž, s. 31.
[16] Zadání uvádíme zhuštěně.

ÚMĚRA

Koncept úměrnosti, postihující lineární závislost dvou veličin, je v testu obsahem 6 položek. V matematické části testu jde o položky A4, B8 a I3, o nichž jsme referovali výše v rámci Slovních úloh. Kromě nich nacházíme tři relevantní položky v přírodovědné části testu, všechny v oblasti Fyzika.

Nejsnazší z těchto položek (I13 – úspěšnost 80%; zarážející je nízká úspěšnost v ČR: 32,6%) požaduje doplnit dvousloupcovou tabulku, kde v levém sloupci jsou dvě hodnoty napětí – 2 a 4 – a v pravém tři hodnoty proudu: 15, 30, 60. Tabulku lze vlastně doplnit jen na základě vztahů čísel, bez ohledu na znalost Ohmova zákona. (Ten ovšem byl v době zadání testu probrán, a to poměrně nedávno.)

Střední obtížnost má úloha **E11**, která prezentuje obrázek, na němž žárovka nasvěcuje kartu ve vzdálenosti 20 cm, ta pak vrhá stín, mající délku strany 10 cm, na stínítko vzdálené dalších 20 cm. Děti mají určit, jaká bude délka hrany stínu, posune-li se stínítko o 40 cm dále (od žárovky i karty). Linearita závislosti je tu prezentována graficky, děti musí jednak zrekonstruovat poměry nových vzdáleností mezi žárovkou, kartou a stínítkem (buď vzdálenost žárovka – stínítko jako čtyřnásobek vzdálenosti žárovka – karta nebo nová vzdálenost žárovka - stínítko jako dvojnásobek původní), jednak identifikovat vztah přímé úměry. Položku řešilo úspěšně 64% dětí. Z chybných odpovědí je patrné, že chybující děti vztah úměry neidentifikovaly – 2 volily odpověď, podle níž se velikost stínu nezmění, 5 z nich dokonce takovou, podle níž by se stín zmenšil. Třetí chybnou variantu, kterou bychom považovali za známku toho, že vztah úměry byl postřehnut, ale nebyly dobře identifikovány veličiny, které do ní vstupují, nevolil nikdo. (Dvě odpovědi chyběly.)

Domnívali jsme se, že položka bude dobře postihovat koncept úměrnosti nezávisle na zvládnutí školního postupu, ale zřejmě tomu tak nebylo. V horní polovině pořadí nacházíme 8 správných řešení, v dolní polovině také. I kdybychom připustili, že test přece jen prověřuje především školní znalosti, museli bychom v tomto případě najít souvislost alespoň s výkony v inteligenčním testu. Při srovnání s výsledku testu Stanford-Binet z druhého pololetí 7. třídy však nezjišťujeme souvislost ani z hlediska celkového výkonu - v horní polovině pořadí je 7 správných řešení (z 13 dětí), v dolní pak 9 - ani z hlediska skóru tzv. kvantitativního myšlení: v horní části pořadí (14 dětí) je 8 správných řešení, v dolní části (11 dětí) také 8.

V těchto souvislostech dospíváme k pochybnostem, o čem správné řešení položky E11 vypovídá. Zdá se pravděpodobné, že řešitelé sice nutně identifikovali vztah úměry v globální podobě „čím je stínítko dále, tím větší stín“, ale že za volbou odpovědi není nutně přesné uvědomění kvantitativních vztahů, nýbrž jen volba největšího čísla. Skupina řešitelů pak může zahrnovat jak ty, kteří zde úměru bezpečně chápou a aplikují, tak ty, kteří uplatňují jen nediferencovaný odhad.

Nejobtížnější se ukázala položka B3[17]. V tabulce jsou pro každý ze čtyř předmětů uvedeny hmotnost a objem. Děti mají rozhodnout, který předmět má největší hustotu. Úlohu řešilo v naší třídě správně 32% dětí (zhruba stejně tomu bylo v ČR i mezinárodně). Úloha nutí pracovat jednak se vztahem přímé úměry, když jsou předměty „převáděny“ na stejnou hmotnost a k nim zjišťovány odpovídající změny objemu (či obráceně), jednak se vztahem nepřímé úměry mezi objemem a hustotou – to však postačuje globálně, nediferencovaně, v podobě "čím větší objem, tím menší hustota (při stejné hmotnosti)“. Také rozložení chyb je v naší třídě obdobné jako v ČR. Největší počet dětí volí odpověď „a“ (52%). která představuje předmět s největším objemem (absolutně i relativně, ve vztahu ke hmotnosti). Tato jednoznačnost se zdá svědčit o tom, že kritickým místem úlohy je právě vztah nepřímé úměry mezi objemem a hustotou.

---

[17] Položka je uvedena v publikaci ÚIV „Úlohy z matematiky a přírodních věd pro žáky 8. ročníků“, s. 73.

Zdá se tedy, že chápání vztahů úměry je dětem dostupné, ale zřetelně závisí na obeznámenosti s kontextem. Domníváme se ovšem, že koncept nepřímé úměry je strukturálně složitější a že by úspěšnost úloh s ním byla nižší i v kontextech, s nimiž jsou děti dobře obeznámeny.

GRAFY A ANALÝZA DAT

Ze tří úloh, které prezentovaly grafy a vyžadovaly práci s nimi, byly dvě řešeny s vysokou úspěšností (88%, resp. 84%). Obtížnější byla jen úloha B7- graf prodeje obleků a kabátů prodaný za jednotlivé měsíce[18] s úspěšností 56%. Děti měly z grafu určit „období dvou měsíců, ve kterém byl nárůst prodeje kabátů největší“. Část chyb zřejmě vznikla čtením křivky „obleků“, nikoli „kabátů“, pro které svědčí dvě z nabízených variant. Druhý typ chyby pak zřejmě identifikuje největší počet prodaných kabátů namísto největšího nárůstu. Jedna z variant přitom kombinuje obě chyby - dělá ji téměř čtvrtina dětí (6). „Největší počet“ namísto „největší nárůst“ kabátů mají zřejmě na mysli 4 děti – to by znamenalo, že celkem 10 dětí (40%) dělá chybu v odlišení těchto dvou pojmů (nebo je nerozlišuje). Správně pak identifikuje nárůst, ovšem u obleků namísto kabátů, 1 dítě.

Úlohu, v níž mají děti porovnat průměry výkonů (vždy tří) dvou dětí v testech, řešilo správně 76% dětí. Jen v jednom případě chyby nacházíme písemný výpočet, který dokazuje, že postup byl správný, avšak chybný byl součet hodnot u prvního výpočtu průměru. V ostatních případech (dalších 5) chyb může jít jak u numerické chyby při počítání z hlavy, tak o chybný postup, kdy se hledá střed hodnot tak, že se určí u dvojice a pak se znovu „vyvažuje“ získané číslo vůči třetí zadané hodnotě.

Úlohu, kde děti mají určit, který výsledek je nejméně pravděpodobný u kola štěstí s 24 výsečemi, když je 1/8 modrých, 1/24 zelených, 1/2 oranžových a 1/3 červených, řešilo správně 84% z nich. Čtyři chyby měly nesystematickou distribuci.

JÁDRO MATEMATICKÉ KOMPETENCE V 8. TŘÍDĚ

Děti v 8. třídě bezpečně zvládly zacházení **práci s desetinnými čísly**, nicméně části dětí možná dělalo problém určit nejmenší číslo, měla-li čísla rozdílný počet desetinných míst (položka B10).

Elementární zvládnutí **zlomků** patří ke kompetenci většiny dětí. Na problémy ovšem poukazuje skutečnost, že část dětí (přinejmenším čtvrtina) nezvládá bezpečně u zlomků určit vztah větší-menší (položka I6), ani znázornění zlomku, pokud členy poměru počtů na obrázku neodpovídají přímo čitateli a jmenovateli. (V úloze A1 je třeba identifikovat 4/5 jako 8 čtverečků z 10, chybuje v ní třetina dětí.) Bezpečné zvládnutí zlomků dost výrazně odlišuje děti s nadprůměrnou úrovní kompetence. Schopnost vyjádřit zlomkem poměr, pokud jeho členy jsou vyjádřeny nepřímo, slovním zadáním, je charakteristická jen pro děti s nejlepšími výkony, tři čtvrtiny dětí to nedokázaly (úloha T2b).

Ke kritickým kompetencím v oblasti, kterou ve shodě s pojetím TIMSS označujeme jako **algebra**, patří schopnost postihnout pravidelnost rozvoje nějakého počtu a dokázat vyvodit, jak bude naznačená řada pokračovat. Vyšší úroveň kompetence pak spočívá ve schopnosti formulovat pro tuto pravidelnost explicitní pravidlo. Chápání algebraických výrazů je zatím elementární, algebraickému zápisu „tří po sobě jdoucích sudých čísel“ (I1) porozuměla méně než polovina dětí.

[18] Uvedena v publikaci ÚIV „Úlohy z matematiky a přírodních věd pro žáky 8. ročníků“, s. 55.

Ke kritických schopnostem v oblasti **geometrie** patří jednak schopnost dělat jednoduché úsudky na základě chápání elementárních geometrických vztahů (vyvodit velikost úhlu souhlasného k úhlu v trojúhelníku, jenž není zadán přímo, ale prostřednictvím dvou zbývajících úhlů, zvládlo 60% dětí – položka E2), jednak bezpečné užívání konceptů obsahu a obvodu obdélníka a čtverce. Nárůst kompetence od 4. třídy ilustruje úloha, v níž je třeba z velikosti délky obvodu, zadaného jako délka drátu, a při znalosti šířky určit délku obdélníka (E6). Zatímco ve 4. třídě řešily děti tuto úlohu výjimečně (2 děti z 22), v 8. třídě ji řeší více než polovina. Obsah plochy zadané jako rozdíl dvou obdélníků zvládají tři čtvrtiny dětí, ale se zvyšující se složitostí útvaru úspěšnost klesá. Jen třetina dětí bezpečně zvládla všechny tři otázky na některý aspekt útvaru složeného z pěti čtverců, polovina dětí zvládla dvě z těchto otázek.

Polovina až tři čtvrtiny dětí řešily úspěšně **slovní úlohy**, pokud měly nejvýše tři dílčí kontexty a trojúrovňovou hierarchii kontextů. V úloze se čtyřmi úrovněmi klesá úspěšnost na 28% - ovšem čtvrtina dětí z celkového počtu tu nechybuje v chápání struktury úlohy, nýbrž dělá numerické chyby v práci s desetinnými čísly.

Děti prokázaly poměrně bezpečné zvládnutí jednoduchých případů přímé **úměrnosti**. Ovšem složitější kontexty, v nichž je třeba aplikovat jakýsi koncept „stálosti poměru“, už zvládaly hůře. Chápání povahy úměry je také velmi závislé na obeznámenosti se sémantikou kontextu. Z tohoto hlediska pak měla přinejmenším polovina dětí problém s povahou vztahu objemu a hustoty jakožto nepřímé úměry.

Tento pokus o stručné postižení matematické kompetence osmáků je ovšem omezen na obsah testu. Reálně je jejich kompetence širší. Z oblastí, které děti ve škole probraly, neobsahoval test zejména procenta (řekněme jako specifický ekvivalent zlomků), konstrukční úlohy v geometrii – zejména schopnost sestrojit podle různého zadání trojúhelník a čtyřúhelník, užití Pythagorovy věty, složitější slovní úlohy založené na využití rovnic (dělení celku na nestejné části, úlohy o pohybu, o směsích, o společné práci) a základy úprav algebraických výrazů. Na druhé straně je ovšem patrné, jak z testu – jeho obsahu a výsledků – tak z naší dnešní zkušenosti, kdy sledujeme děti před pololetím deváté třídy, jak jednorázové zvládnutí učiva, jakkoli se v dané chvíli zdá bez problémů, nijak nezaručuje trvalý efekt. Teprve opakované procvičování, opakované návraty k dříve probranému učivu vytvářejí reálnou kompetenci, kdy potřebné koncepty, zajišťující vhled do úlohy, jsou kdykoli pohotově k dispozici.

ZÁVĚR

Ve sledování vývoje počítání a matematické kompetence v osmé třídě byly využity výsledky testu TIMSS-R. Byla zpracována předběžná analýza výsledků zatím jedné třídy a provedeno srovnání s výsledky téže třídy v r. 1998, kdy byla srovnávána s českou populací 4. ročníků. Podobně jako tehdy se celkové výsledky této třídy, která představuje v našem souboru průměr, pohybují nad průměrem populace ČR. Rozdíl se přitom oproti výsledkům ve 4. třídě zvýšil. Zároveň větší rozsah a přiměřenější náročnost testu vedly v naší 8. třídě k mnohem větší diferenciaci výsledků.

Ve 4. třídách byla jako jádro matematické kompetence, jak ji konstruuje test, identifikována korespondence slovního zadání úloh s paradigmatem násobení a dělení a s chápáním nejjednodušších případů chápání zlomku jako poměru. V 8. třídě toto jádro představují především nejjednodušší případy algebraických konceptů (přičemž za algebraické je autory testu považováno i samo postižení pravidelnosti, opakování aritmetických vztahů, nikoli nutně její algebraická formalizace) a. geometrické koncepty, zejména pak spontánní, samozřejmé chápání rozdílu mezi obsahem a obvodem obdélníka a čtverce. Další oblastí, která charakterizuje vývoj kompetence v 8. třídě, je chápání zlomků – jak jako čísel zvláštního druhu, tak jako prostředku k vyjádření vztahů poměru, proporce. Konečně poslední významnou oblastí jsou slovní úlohy – tzn. oblast korespondence různých matematických operací a vztahů se vztahy v realitě.

Oblast reprezentace dat v grafech, vysuzování z nich, stejně jako oblast analýzy údajů (např. aritmetického průměru jako elementárního prostředku statistické analýzy) či chápání pravděpodobnosti jsou v testu zastoupeny okrajově. Naše děti s nimi neměly výraznější problémy, ačkoli na 2. stupni ZŠ nejsou nijak výrazněji speciálně probírány.

LITERATURA

Mullis, I. V. S. et al.: TIMSS 1999. International Mahematics Report. (Findings from IEA's Repeat of the Third International Mathematics and Science Study at the Eight Grade.) IEA a International Study Center (Boston College Lynch School of Education) 2000.

Palečková, J. (ed.): Úlohy z matematiky a přírodních věd pro žáky 8. ročníků. Praha, Ústav po informace ve vzdělávání 2001.

Palečková, J., Tomášek, V.: Posun ve znalostech čtrnáctiletých žáků v matematice a přírodních vědách. Zpráva o výsledcích mezinárodního výzkumu TIMSS. Praha, Ústav pro informace ve vzdělávání 2001.